2.1 Wstęp

Zagadnienia związane z *nieliniowym* i *nielokalnym* oddziaływaniem występują powszechnie we współczesnej technice i technologii. Nieliniowość pojawia się w związku ze szczególnymi właściwościami materiałów lub w wyniku oddziaływania ośrodka materialnego z silnymi polami. Natomiast nielokalność związana jest z pamięcią wybranych materiałów, gdzie prowadzi do występowania całek względem czasu w równaniach, lub jest wynikiem oddziaływania pól z ośrodkiem, gdzie prowadzi do całek po przestrzeni. Klasycznym przykładem jest teoria kinetyczna, np. człon zderzeniowy w równaniu Boltzmanna, czy też równania Vlasova-Maxwella dla plazmy bezzderzeniowej.

Przedstawione poniżej przykłady ilustrują szeroki zakres różnorodnych zastosowań równań różniczkowo-całkowych w fizyce i technice. Ważną dziedziną zastosowań są zagadnienia związane z problemami relaksacji. Dotyczy to np. nowoczesnych materiałów z pamięcią, materiałów lepko-sprężystych oraz modelowania procesów produkcyjnych np. wytwarzania polimerów. Wszędzie gdzie występuje zjawisko histerezy, nielokalność w czasie pojawia się w sposób naturalny na pierwotnym, ścisłym poziomie opisu. Dla bardzo szybkich procesów takie właściwości wykazują również "zwykłe" materiały. Nielokalność przestrzenna pojawia się w sposób naturalny w opisie statystycznym zjawisk, np. przy badaniu zjawiska koagulacji [6], [7]. Ważnym przykładem zastosowań w mechanice jest teoria "ciągłych kryształów", gdzie dokonuje się przejścia granicznego od ośrodka dyskretnego do ciągłego (Kroener). W związkach konstytutywnych pojawiają się wówczas całkowania po przestrzeni. Również w modelu pseudokontinuum (Kunin, Kroener, Rogula) możliwy jest opis ośrodka dyskretnego jako kontinuum za cenę występowania związków nielokalnych. W elektrodynamice ośrodków ciągłych związki między polami $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ oraz $\mathbf{D}, \mathbf{H}$, opisujące właściwości ośrodka, wyrażają się w ogólności związkami nielokalnymi z całkowaniem po czasie i przestrzeni. Tylko dla pewnych skal czasowych i przestrzennych możliwe jest zaniedbanie dyspersji czasowej i przestrzennej ośrodka. Bardzo ważnym obszarem zastosowań jest nieliniowa akustyka i nieliniowa optyka ośrodków materialnych. Aktualny przykład z akustyki stanowi praca V. Guseva (J. Acoustic Soc. Am. 2005, 11 (4 Pt 1), 1850), gdzie równanie różniczkowo-całkowe opisuje opisuje propagację fali akustycznej w rezonansowych prętach zbudowanych z materiału z histerezą i kwadratową nieliniowością. Inny, ciekawy przykład zastosowania w mechanice pęknięć pochodzi z pracy Y. Antipova, który pokazał, że wbrew oczekiwaniom pęknięcia mogą się propagować szybciej niż dźwięk w ośrodku (www.math.lsu.edu/antipov).

Podstawowym narzędziem opisu nielokalnych zjawisk sa równania różniczkowo-całkowe. W przypadku złożonych zjawisk są to skomplikowane równania, dla których standardowe metody zawodzą i zwykle stosuje się metody przybliżone a najczęściej metody numeryczne. Wadą tych ostatnich jest to, że są pracochłonne i często zawodzą w przypadku problemów nieliniowych. Przede wszystkim jednak nie dają wglądu w mechanizm zjawiska, nie pozwalają na jakościowe zrozumienie przebiegu procesu i wpływu poszczególnych parametrów, tak ważne w projektowaniu konkretnych urządzeń. Dlatego istotna jest możliwość znajdowania ścisłych analitycznych rozwiązań, nawet jeśli są to tylko rozwiązania przybliżonych równań opisujących uproszczony model zjawiska. Często użyteczne jest zbadanie ścisłych właściwości rozwiązań bez znajdowania samych rozwiązań. Znajomość ścisłych rozwiązań lub przynajmniej ich ogólnej postaci jest użyteczna przy konstruowaniu metod przybliżonych, np. rozwinięć perturbacyjnych wokół danego rozwiązania. Naturalnym i uniwersalnym narzędziem do badania takich zagadnień jest teoria grup Liego, co pokazuje przykład równań różniczkowych [4], [33], [36]. Stąd narodził się pomysł uogólnienia tych metod i ich zastosowania w przypadku równań różniczkowo-całkowych. Znaczenie metod symetrii w nauce jest nieocenione, a ich zastosowanie ma długą tradycję. Praktycznie wszystkie znane rozwiązania równań nieliniowych zostały znalezione dzięki symetriom tych równań, choć nie zawsze świadomie. Zastosowanie teorii grup pozwala wyznaczać szczególne rozwiązania, tzw. rozwiązania niezmiennicze, klasyfikować takie rozwiązania, badać właściwości rozwiązań bez konieczności rozwiązywania samych równań, upraszczać równania (np. redukując ich rząd lub liczbę zmiennych), co pozwala dalej stosować metody przybliżone i numeryczne. W przypadku skomplikowanych równań nieliniowych, zwłaszcza różniczkowo-całkowych, są to jedyne, dostępne metody analityczne. Żadne inne metody nie mają tak szerokiego zakresu zastosowań.

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda wyrosła z badania konkretnego zagadnienia technicznego, jednowymiarowej plazmy Vlasova-Maxwella. W tym przypadku, opisanym równaniami różniczkowo-całkowymi szczególnej postaci, udało się wyznaczyć pełną grupę symetrii, poklasyfikować podgrupy niezmiennicze i znaleźć konkretne rozwiązania niezmiennicze odpowiadające tym podgrupom, a następnie skonstruować nowe rozwiązania. Uzyskane rezultaty i skuteczność metody skłoniły autora do poszukiwania uogólnień, umożliwiających zastosowanie tej metody do innych zagadnień z nielokalnym i nieliniowym oddziaływaniem, występujących we wspomnianych wyżej dziedzinach techniki. Była to droga od szczegółu (konkretny problem z techniki plazmy) do ogółu (sformułowanie ogólnej metody o szerokim zakresie praktycznych zastosowań). W drodze uogólnień postaci członu całkowego została zbudowana ogólna metoda badania równań różniczkowo-całkowych, obejmująca praktycznie wszystkie równania występujące w zagadnieniach technicznych. Najpierw uogólniono poprzednie wyniki dotyczące szczególnej postaci równań na *ogólny* przypadek równań ze stałym lub zmiennym obszarem całkowania ale *niezależnym* od zewnętrznych względem całkowania zmiennych [H1=52]. Następnie dołączono możliwość występowania tzw. argumentów funkcjonalnych (np. opóźnionych lub przedwczesnych) [H2=54]. Pozwala to na zastosowanie metody do układów ze sprzężeniem zwrotnym. W ostatecznej formie metody [H5=57], [58]) człon całkowy może zależeć od zewnętrznych względem całkowania zmiennych, w tym od zmiennej zależnej i od jej pochodnych. Prowadzi to do dynamicznej zmiany obszaru całkowania. Takie równania pojawiają się w nieliniowej akustyce i w nieliniowej optyce, gdzie wskutek samoogniskowania się silnej wiązki światła lub impulsu akustycznego zmienia się efektywny obszar oddziaływania z innymi modami (całka przekrywania). W budowaniu tych uogólnień zachowano praktyczny charakter metody nastawiony na zastosowania - wyznaczanie i badanie właściwości rozwiązań równań różniczkowo-całkowych opisujących konkretne zagadnienia techniczne. Ponadto przedstawiono nowe zastosowania w przypadku ważnych, konkretnych zagadnień techniki plazmy: przypadek ściśle sferyczny mający zastosowanie do ogrzewania plazmy w procesie reakcji termojądrowej [H4=56] oraz przypadek plazmy w polu magnetycznym (wpływ pola magnetycznego Słońca lub Ziemi na magnetosferę oraz zachowanie się plazmy laboratoryjnej w pułapkach magnetycznych) [H3=55].

Niniejsza rozprawa habilitacyjna stanowi podsumowanie dorobku naukowego autora dotyczącego zastosowania teorii grup do badania układów równań różniczkowo-całkowych opisujących układy dynamiczne z nieliniowym i nielokalnym oddziaływaniem. Dorobek ten zawarty jest w oryginalnych pracach autora [49]-[58]. Prace [52]=[H1], [54]=[H2], [55]=[H3], [56]=[H4] i [57]=[H5], które zawierają najistotniejsze oryginalne idee autora, zostały włączone do niniejszej rozprawy. Kwintesencją sformułowanej teorii jest twierdzenie, tzw. infinitezymalne kryterium niezmienniczości równań różniczkowo-całkowych, stanowiące warunek konieczny niezmienniczości danego układu równań względem poszukiwanej grupy symetrii. Ważną częścią teorii jest oryginalna metoda rozwiązywania tzw. równań określających na generatory grupy symetrii, co stanowi główną trudność techniczną przy stosowaniu dowolnej metody. Polega ona na zastosowaniu lematu Lagrange'a pozwalającego na przejście do wyrażenia podcałkowego, co sprowadza odpowiednie liniowe różniczkowo-całkowe równanie określające do liniowego równania różniczkowego. Zaproponowana teoria należy do grupy metod bezpośrednich (patrz punkt 2.2). Jej efektywność została potwierdzona zastosowaniami w fizyce plazmy i optyce nieliniowej. Znalazła tez naśladowców i kontynuatorów. Özer użył tej metody i próbował ją uogólniać w pracy [37] do wyznaczenia symetrii równań Benneya opisujących dwuwymiarowy przepływ nielepkiego płynu w polu grawitacyjnym zaś w [38] do grupowej analizy bezzderzeniowego równania Boltzmanna szczególnego typu. Frewer, Oberlack i Guenther posłużyli się tą metodą badając równoważność równań Eulera, opisujących stacjonarny, osiowo-symetryczny przepływ nieściśliwego płynu i równania Bragga-Hawthorne'a [16].