

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ZYGMUNT JACEK ZAWISTOWSKI

METODY TEORII GRUP W  
ZASTOSOWANIU  
DO UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z  
NIELINIOWYM I NIELOKALNYM  
ODDZIAŁYWANIEM

*Rozprawa habilitacyjna*



Warszawa 2006

# Spis treści

<b>I. Lista publikacji stanowiących rozprawę habilitacyjną</b>	<b>3</b>
<b>II. Wprowadzenie</b>	<b>7</b>
<b>1. Wstęp</b>	<b>9</b>
<b>2. Stan wiedzy w dziedzinie</b>	<b>11</b>
2.1 Rys historyczny .....	11
2.2 Inne metody badania symetrii równań różniczkowo-całkowych .....	13
<b>3. Opis metody</b>	<b>17</b>
3.1 Przekształcenia punktowe .....	17
3.2 Przedłużenie do przestrzeni dżetów i niezmienniczość równań .....	20
3.3 Infinitesimalne kryterium niezmienniczości .....	21
<b>4. Omówienie prac włączonych do rozprawy habilitacyjnej</b>	<b>27</b>
<b>5. Podsumowanie</b>	<b>31</b>
<b>5. Bibliografia</b>	<b>33</b>
<b>III. Publikacje stanowiące rozprawę habilitacyjną</b>	<b>37</b>

## Część I

# Lista publikacji stanowiących rozprawę habilitacyjną

**Prace stanowiące rozprawę habilitacyjną:**

- [H1] = [52] Z. J. Zawistowski, *Symmetries of Integro-Differential Equations*, Rep. Math. Phys. **48**, No 1/2, 269, (2001).
- [H2] = [54] Z. J. Zawistowski, *Symmetries of Equations with Functional Arguments*, Rep. Math. Phys. **50**, No 2, 125, (2002).
- [H3] = [55] V. B. Taranov and Z. J. Zawistowski, *Electron Plasma Upper Hybrid Kinetic Symmetries*, J. Tech. Phys. **44**, No 3, 303, (2003).
- [H4] = [56] Z. J. Zawistowski, *Symmetries of Radial Maxwell-Vlasov Equations*, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine **50**, Part 1, 304, (2004).
- [H5] = [57] Z. J. Zawistowski, *General Criterion of Invariance for Integro-Differential Equations*, Rep. Math. Phys. **54**, No 2, 341, (2004).

## Część II

# Wprowadzenie

## 2.1 Wstęp

Niniejsza rozprawa habilitacyjna przedstawia dorobek naukowy autora dotyczący zastosowania metod teorii grup do badania układów równań różniczkowo-całkowych (IDE) opisujących układy dynamiczne z nieliniowym i nielokalnym oddziaływaniem. Dorobek ten zawarty jest w oryginalnych pracach autora [49]-[58]. Prace [52]=[H1], [54]=[H2], [55]=[H3], [56]=[H4] i [57]=[H5], które zawierają najistotniejsze oryginalne idee autora, zostały włączone do niniejszej rozprawy. Kwintesencją sformułowanej teorii jest twierdzenie, tzw. infinitezymalne kryterium niezmienniczości równań różniczkowo-całkowych, stanowiące warunek konieczny niezmienniczości danego układu równań względem poszukiwanej grupy symetrii. W kolejnych pracach autora twierdzenie to było uogólniane i w ostatecznej postaci (patrz punkt 2.3.3) stosuje się do bardzo szerokiej klasy układów równań różniczkowo-całkowych obejmującej wszystkie realistyczne zastosowania fizyczne. Ważną częścią teorii jest oryginalna metoda rozwiązywania tzw. równań określających na generatory grupy symetrii, co stanowi główną trudność techniczną przy stosowaniu dowolnej metody. Polega ona na zastosowaniu lematu Lagrange'a pozwalającego na przejście do wyrażenia podcałkowego, co sprowadza odpowiednie liniowe różniczkowo-całkowe równanie określające do liniowego równania różniczkowego. Zaproponowana teoria należy do grupy metod bezpośrednich (patrz punkt 2.2) i ma charakter pragmatyczny. Jest nastawiona na praktyczne zastosowania. Jej efektywność została potwierdzona zastosowaniami w fizyce plazmy i optyce nieliniowej. Znalazła też naśladowców i kontynuatorów. Özer użył tej metody i próbował ją uogólnić w pracy [37] do wyznaczenia symetrii równań Benneya opisujących dwuwymiarowy przepływ nielepkiego płynu w polu grawitacyjnym zaś w [38] do grupowej analizy bezzderzeniowego równania Boltzmann'a szczególnego typu. Frewer, Oberlack i Guenther posłużyli się tą metodą badając równoważność równań Eulera, opisujących stacjonarny, osiowo-symetryczny, przepływ nieściśliwego płynu, i równania Bragga-Hawthorne'a [16].

Znaczenie metod symetrii w fizyce jest nieocenione a ich zastosowanie ma długą tradycję. Teoria Liego przeniknęła całą fizykę, od rozwiązywania konkretnych problemów dzięki znalezionym symetriom do budowania całych teorii zgodnych z narzuconymi warunkami symetrii. Praktycznie wszystkie znane rozwiązania równań nieliniowych zostały znalezione dzięki symetriom tych równań, choć nie zawsze świadomie. Zastosowanie metod teorii grup pozwala wyznaczać szczególne rozwiązania, tzw. rozwiązania niezmiennicze, klasyfikować takie rozwiązania, badać właściwości rozwiązań bez konieczności rozwiązywania samych równań, upraszczać równania (np. redukując ich rząd lub liczbę zmiennych), co pozwala dalej stosować metody przybliżone i numeryczne. W przypadku skomplikowanych równań nieliniowych, zwłaszcza różniczkowo-całkowych, są to jedyne dostępne metody analityczne. Żadne inne metody nie mają tak szerokiego zakresu zastosowań.

Struktura pracy jest następująca. W części II w punkcie 2.2 omówiony jest aktualny stan wiedzy w rozważanej dziedzinie. W punkcie 2.3 przedstawiona jest charakterystyka zaproponowanej teorii i jej uogólnień. W punkcie 2.4 omówione zostały załączone prace oryginalne. Podsumowanie pracy zawarte jest w punkcie 2.5. Część III zawiera załączone, opublikowane, oryginalne prace autora.

## 2.2 Stan wiedzy w dziedzinie

### 2.2.1 Rys historyczny

Zwykle pojęcie symetrii w fizyce kojarzy się z twierdzeniem Nöther i zasadami zachowania, które wynikają z niezmienniczości całki działania względem odpowiednich przekształceń. Na przykład niezmienniczość względem translacji w czasie prowadzi do zachowania energii, zaś niezmienniczość względem translacji przestrzennych do zachowania pędu. Jednak historycznie pierwotne było badanie symetrii równań a nie związanego z nimi lagranżjanu i całki działania. Pod koniec XIX wieku Sophus Lie zainspirowany pracami Galois i Abela dotyczącymi równań algebraicznych postanowił stworzyć analogiczną metodę dla równań różniczkowych. Wprowadził on niezwykle ważne w matematyce i fizyce pojęcie grupy ciągłej (różniczkowej, analitycznej) oraz jej algebry (przekształcenia infinitezymalne), zwanych dziś grupą i algebrą Liego [29]. We współczesnym języku grupa Liego to rozmaitość analityczna, która jest jednocześnie grupą i obie struktury, algebraiczna i różniczkowa, są uzgodnione, tzn. działanie grupowe jest analityczne. Algebra Liego to przestrzeń styczna do grupy Liego w punkcie będącym elementem neutralnym grupy lub równoważnie przestrzeń pól wektorowych nad grupą Liego lewo (lub prawo) niezmienniczych [18, 45, 46, 33]. Algebra Liego w pełni charakteryzuje grupę Liego lokalnie. Badanie symetrii równań sprowadza się do wyznaczenia wszystkich niezależnych generatorów jednoparametrowych przekształceń zachowujących te równania. Generatory te stanowią bazę algebry Liego grupy Liego. W zastosowaniach fizycznych zwykle udaje się odtworzyć grupę Liego na podstawie znajomości jej algebry posługując się odwzorowaniem *exp*, tzn. sumując szereg Liego za pomocą twierdzenia BCH (Baker, Campbell, Hausdorff) [15]. Siłą teorii Liego polega na swoistej linearyzacji problemu. Zamiast badać skomplikowane nieliniowe zależności, w przypadku grupy Liego wystarczy wyznaczyć jej algebrę, która jest przestrzenią liniową. W interesującym nas przypadku równań różniczkowych (różniczkowo-całkowych) współczynniki definiujące generatory jednoparametrowych podgrup grupy Liego symetrii wyznaczamy z *liniowych* równań różniczkowych (różniczkowo-całkowych), tzw. równań określających (patrz p. 3.3). Lie badał głównie równania zwyczajne [30], ale również zajmował się równaniami cząstkowymi [28, 31]. Sformułował on wszystkie istotne, dalekosiężne pojęcia teorii, których znaczenie zostało docenione dopiero w XX wieku. Z innych uczonych przełomu XIX i XX wieku, którzy wnieśli istotny wkład do rozwoju teorii grup Liego, należy wymienić A. V. Bäcklunda, F. Engela i L. Bianchiego.

Pierwszy okres rozwoju teorii Liego kończy się w 1918 roku opublikowaniem знаmienitej pracy Emmy Nöther [32], która nie tylko pokazała związek między symetriami wariacyjnymi (niezmienniczość całki działania) i zasadami zachowania [3] ale wprowadziła uogólnione transformacje symetrii zwane dziś niesłusznie przekształceniami Lie-Bäcklunda. Generatory tych przekształceń zależą nie tylko od zmiennych niezależnych i zależnych ale również od pochodnych zmiennych zależnych dowolnego rzędu. W przypadku równań, dla których istnieje lagranżjan, a więc wynikające z zasady wariacyjnej jako równania Eulera-Lagrange'a, grupa symetrii całki działania jest zawarta w grupie symetrii samego równania. Zatem jeśli znamy jednoparametrową podgrupę symetrii wariacyjnej i odpowiadające jej prawo zachowania, to dysponujemy dodatkową informacją. Oprócz niezmienniczości równania mamy niezmienniczość całki działania. Dlatego

właśnie możliwa jest w tym przypadku redukcja rzędu równania o 2, a nie o 1 jak w przypadku symetrii równania. Ponieważ twierdzenie Nöther nie daje przepisu na poszukiwanie grupy symetrii całki działania (zakłada znajomość takiej grupy), więc jeśli znamy grupę symetrii równania, to sprawdzając przez podstawienie, które przekształcenia symetrii równania zachowują również całkę działania możemy efektywnie znaleźć wszystkie prawa zachowania w przypadku teorii z lagranżjanem. Ze względu na fundamentalne znaczenie twierdzenia Nöther w fizyce jego zastosowanie zdominowało na wiele lat pierwotne zainteresowanie symetrami samych równań. Przyczyniła się również do tego nikła znajomość zaawansowanej geometrii różniczkowej, teorii form różniczkowych i różniczkowalności różniczkowalnych rozwijanych przez takich matematyków jak H. Poincaré, E. Cartan i H. Weyl, którzy uogólnili teorię Liego. Spowodowało to praktyczny zanik stosowania metody Liego badania symetrii równań różniczkowych aż do połowy XX wieku. Oczywiście stosowano różne szczegółowe metody, zwłaszcza do równań zwyczajnych, jak np. analiza wymiarowa, twierdzenie Pi Buckinghama, czy też rozwiązania samopodobne nie zdając sobie jednak sprawy z faktu istnienia ogólniejszej teorii, z której one wynikają. Przełomem stała się w roku 1950 książka Birkhoffa [2] pokazująca zastosowania metod teorii grup w hydrodynamicie.

Renesans teorii Liego badania symetrii równań różniczkowych nastąpił dzięki pracom L. V. Ovsiannikova i jego uczniów z Nowosybirsk w latach 50-tych XX wieku. Dzięki wprowadzonemu przez Ehresmanna [11, 12] pojęciu dżetu Ovsiannikov sformułował teorię Liego w ścisłym języku współczesnej matematyki. W uproszczeniu, dżet  $k$ -go rzędu ( $k$ -jet) funkcji w danym punkcie (zbiór zmiennych niezależnych), to ten punkt, wartość funkcji w tym punkcie i zbiór wszystkich pochodnych tej funkcji w tym punkcie do  $k$ -go rzędu włącznie (rozwinęcia Talora funkcji w danym punkcie do rzędu  $k$ ). Ścisłej, jest to klasa równoważności ze względu na relację styczności  $k$ -go rzędu przekrojów lokalnie trywialnego rozwłóknienia nad danym punktem. Jest to sposób nadania ścisłego sensu traktowania w metodzie Liego wszystkich zmiennych w równaniu, tj. zmiennych niezależnych, zmiennych zależnych i ich pochodnych formalnie jak zmiennych niezależnych i ograniczenia się do znajomości praw transformacyjnych tych formalnie niezależnych zmiennych. Do badania niezmienniczości równania wystarczy nam umiejętność transformowania wielkości występujących w równaniu, np. pochodnych. Rzeczywisty sens tych wielkości jest nieistotny, potrzebny jest tylko wstępnie do wyznaczenia tych praw transformacyjnych na podstawie transformacji zmiennych niezależnych i zależnych (przekształcenia punktowe). W przypadku pochodnych posługujemy się w tym celu regułą łańcuchową różniczkowania funkcji złożonej. W ten sposób rozszerzamy przestrzeń w której działa grupa z przestrzeni zmiennych niezależnych i zależnych na przestrzeń zawierającą dodatkowo pochodne do rzędu odpowiadającego rzędowi równania. Operacja rozszerzenia (przedłużenia - prolongation) przestrzeni nabiera sensu podniesienia struktury grupy do przestrzeni dżetów. W ten sposób został nadany teorii geometryczny charakter i uściślone zostało pojęcie symetrii równania. Punktem wyjścia jest ogólne określenie symetrii jako niezmienniczości jakiegoś zbioru względem grupy przekształceń przestrzeni zawierającej ten zbiór. W przypadku równania interesuje nas zbiór jego rozwiązań i przez symetrię rozumiemy niezmienniczość tego zbioru, tzn. przekształcenia symetrii przeprowadzają rozwiązania równania w inne rozwiązania tego równania. Wynika stąd możliwość konstruowania nowych rozwiązań z już znanych dzięki znajomości grupy symetrii równania. Jednak nie znamy na wstępie zbioru rozwiązań, a wprost

przeciwnie naszym zasadniczym celem jest znalezienie jak największej liczby ścisłych rozwiązań za pomocą metod teorii grup. Dlatego też niezmienniczość zbioru rozwiązań należy przetłumaczyć na niezmienniczość formy równania. Dzięki pojęciu dżetu nieprecyzyjne pojęcie niezmienniczości formy równania można uściślić i nadać mu geometryczny sens. W przestrzeni dżetów równanie różniczkowe staje się równaniem funkcyjnym, często algebraicznym, zadającym pewną rozmaitość w tej przestrzeni. Niezmienniczość tej rozmaitości wyraża w sposób ścisły niezmienniczość formy równania i nadaje jej sens geometryczny.

Badania szkoły Ovsiannikova były kontynuowane w latach 60-tych i 70-tych XX wieku czego rezultatem były kolejne monografie [34, 35, 36]. W tych latach powstały silne ośrodki w Moskwie i Kijowie oraz w USA i w Europie, głównie w Szwecji, Anglii i Niemczech. Pod koniec lat 80-tych teoria osiągnęła dojrzały poziom. Oprócz metod wyznaczania grup symetrii równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych opracowano metody znajdowania rozwiązań niezmienniczych względem podgrup pełnej grupy symetrii, symetrii nielokalnych, symetrii warunkowych, symetrii przybliżonych, symetrii dla zagadnień brzegowych. Uogólniono teorię Nöther, rozwinięto teorię wyższych symetrii (przekształcenia Lie-Bäcklunda). Zbadano wiele konkretnych równań. Pełny przegląd metod i kierunków badań oraz otrzymane wyniki i aktualny stan wiedzy można znaleźć w monografiach Ovsiannikova [36], Ibragimova [24], Olvera [33], Blumana i jego uczniów [4, 5], Stephaniego [42], Fushchicha i jego uczniów [15] Vinogradova i Krasilshchika [47] oraz w CRC handbook Ibragimova [25]. W latach 70-tych rozpoczęto badania symetrii równań różniczkowo-całkowych opisujących układy dynamiczne z nielokalnym oddziaływaniem stanowiące przedmiot niniejszej pracy. Omówimy je szczegółowo w następnym punkcie.

### 2.2.2 Inne metody badania symetrii równań różniczkowo-całkowych

Intensywne badania symetrii równań różniczkowo-całkowych rozpoczęły się w latach 70-tych XX wieku. Początkowo stosowano *ad hoc* różne sposoby dobrane do szczególnej postaci badanego równania. Przykładem takiego postępowania jest praca [13], w której wykorzystano fakt, że człon całkowy w równaniu ma postać pierwiastka kwadratowego z operatora różniczkowego i przestrzeń rozwiązań równania różniczkowo-całkowego jest zawarta w przestrzeni rozwiązań równania różniczkowego cząstkowego danego tym operatorem. Po wyznaczeniu grupy symetrii pomocniczego równania różniczkowego znaleziono grupę symetrii wyjściowego równania przez podstawienie - sprawdzenie, które ze znalezionych przekształceń zachowują również wyjściowe równanie. Inny przykład stanowi praca Selekmana [40], w której rozważa się równania różniczkowo-całkowe z członem całkowym w postaci transformaty Fouriera. W tym przypadku udaje się efektywnie znaleźć pochodną Liego dającą warunek niezmienniczości i użyć jej do wyznaczenia grupy symetrii. Stopniowo pojawiły się bardziej systematyczne metody znajdujące zastosowanie do szerszej klasy równań. Można je podzielić na dwie grupy: metody bezpośrednie i metody pośrednie.

Metody *pośrednie* polegają na zastąpieniu wyjściowego układu równań różniczkowo-całkowych równoważnym układem pomocniczym, którego symetrie znamy lub umiemy wyznaczyć za pomocą znanych metod, a następnie odtworzeniu na tej podstawie symetrii równań wyjściowych. Najczęściej pomocniczy układ równań jest układem rów-

nań różniczkowych, dla którego możemy zastosować metodę Liego-Ovsiannikova. Przykładem takiej procedury jest elegancka metoda momentów Taranova [44] dla równań Vlasova-Maxwella opisujących dynamikę plazmy bezzderzeniowej. Zastąpił on układ równań różniczkowo-całkowych Vlasova-Maxwella równoważnym, nieskończonym układem równań różniczkowych na momenty jednocząstkowej funkcji rozkładu. Dzięki szczególnej postaci tego pomocniczego układu równań możliwe było, mimo nieskończonej liczby równań, skuteczne zastosowanie metody Ovsiannikova, a następnie odtworzenie grupy symetrii wyjściowych równań Vlasova-Maxwella. Występuje tu delikatny problem równoważności nieskończonego układu równań i skończonego układu równań różniczkowo-całkowych. Skuteczność metody Taranova w fizyce plazmy wynika ze szczególnej postaci badanych równań Vlasova-Maxwella, w których momenty funkcji rozkładu pojawiają się w sposób naturalny. Inną ważną metodą pośrednią jest uogólnienie na przypadek równań różniczkowo-całkowych metody Harrisona i Estabrooka [22] opracowanej dla równań różniczkowych. Zastąpili oni badanie układu równań różniczkowych badaniem równoważnego układu dla form różniczkowych. Najpierw przechodzą do równoważnego układu równań pierwszego rzędu definiując pochodne jako nowe zmienne, następnie w standardowy sposób budują odpowiednie formy różniczkowe [22, 42, 23]. Metoda jest ogólna i elegancka matematycznie. Pozwala na zastosowanie dobrze rozwiniętego formalizmu form różniczkowych. W szczególności warunek niezmienniczości przybiera postać warunku na znikanie pochodnej Liego odpowiedniej formy różniczkowej, ogólniej do domkniętości odpowiedniego ideału form różniczkowych ze względu na działanie pochodnej Liego. W ten sposób występujący w metodzie Liego-Ovsiannikova dodatkowy warunek ograniczenia do przestrzeni rozwiązań (porównaj p. 2.3.3, Twierdzenie 1 oraz (13) w [H5]) jest automatycznie spełniony tak jak ma to miejsce w metodzie Liego-Ovsiannikova tylko dla równań liniowych. Jednak rachunki w języku form są żmudne i zwykle są bardziej skomplikowane niż w metodach bezpośrednich. W przypadku równań różniczkowo-całkowych metodę Harrisona i Estabrooka stosowali głównie Fushchich i jego uczniowie ze szkoły Kijowskiej. W pracy [14] Fushchich i Selekhan użyli tej metody do równań różniczkowo-całkowych niezmienniczych względem grup Galileusza, Poincarégo, Schrödingera i grupy konforemnej. Selekhan [41] badał grupowe własności równania Boltzmanna. Natomiast Stoigny [43] i Popovich [39] badali symetrie równań różniczkowo-całkowych typu Hartree. Ograniczenie się do niektórych typów równań o konkretnej postaci wynika z trudności sprowadzenia danego układu równań różniczkowo-całkowych do równoważnego układu dla form różniczkowych. Jest to zadanie znacznie trudniejsze niż w przypadku równań różniczkowych. Metody pośrednie wymagają przejścia od problemu wyjściowego do problemu pomocniczego i z powrotem, co związane jest z dużym dodatkowym nakładem pracy. Często takie przejście jest bardzo trudnym zadaniem i rodzi wątpliwości interpretacyjne związane z zagadnieniem równoważności. Powoduje to, że mimo formalnej ogólności metody te okazują się skuteczne tylko dla odpowiednio wybranej klasy równań. Ponadto, często okazuje się, że badanie symetrii problemu pomocniczego jest trudniejsze od zastosowania metody bezpośredniej będącej przedmiotem niniejszej rozprawy.

Metody *bezpśrednie* są pozbawione wad metod pośrednich i dlatego są intensywnie rozwijane w ostatnich latach. Ogólną i prostą metodę bezpośrednią można znaleźć w 5-tym rozdziale III tomu CRC Handbook [25]. Polega ona na przyrównaniu do zera pochodnej równania różniczkowo-całkowego względem parametru grupowego poszukiwanej

jednoparametrowej podgrupy symetrii, w punkcie, w którym ten parametr przyjmuje wartość zerową. Formalnie odpowiada to znikaniu odpowiedniej pochodnej Liego. Gdy tak otrzymane równanie zostanie poprawnie rozpisane, tzn. uwzględniając zależność obszaru całkowania od parametru grupowego wynikającą z zależności tego obszaru od zmiennych niezależnych, zależnych i ich pochodnych w zależności od rozważanej klasy równań, to odtworzone zostanie kryterium niezmienniczości odpowiadające tym klasom równań uzyskane w pracach stanowiących niniejszą rozprawę. Jednakże taka ewaluacja tego warunku musi być dokonywana za każdym razem gdy chcemy użyć tej metody, co jest trudnym i żmudnym zadaniem. To tak jakbyśmy powtarzali za każdym razem wyprowadzenie naszego kryterium niezmienniczości. Takie postępowanie bywa skuteczne w przypadkach prostych równań, natomiast w przypadkach złożonych staje się niepraktyczne. Jest to zadanie dla komputera a nie dla człowieka i w przypadku równań różniczkowych taka metoda została zastosowana w programie obliczeń symbolicznych w języku *Mathematica* przez Baumanna [1]. Problemy związane ze zmiennością obszaru całkowania znikają w przypadku przekształceń Lie-Bäcklunda w postaci kanonicznej (pionowej, ewolucyjnej), gdyż zmienne niezależne nie podlegają wtedy transformacji (patrz niżej oraz p. 2.3.1). Właśnie w takim przypadku metoda jest najczęściej stosowana. Grigoriev i Meleshko zastosowali tę metodę do badania symetrii równania Boltzmanna specjalnego typu [20, 21].

Vinogradov i Krasilshchik [48, 47] zaproponowali ogólną i wyrafinowaną metodę bezpośrednią opartą na przedłużeniu do *nielokalnych* zmiennych - funkcji pierwotnych zmiennych zależnych. W przypadku szczególnych równań typu Volterry, które są równoważne równaniom różniczkowym z warunkiem początkowym, prowadzi to do eliminacji całek z równań różniczkowo-całkowych. W ogólnym przypadku, zwłaszcza dla typowych w zastosowaniach fizycznych równań ze stałymi granicami całkowania, realizacja tej idei, będącej w istocie uogólnieniem podstawowego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego, wymaga zastosowania zaawansowanego aparatu matematycznego, w szczególności teorii nakryć układów równań różniczkowych oraz procedury przedłużania dla równań różniczkowo-brzegowych. W ten sposób metoda ta staje się metodą pośrednią z pomocniczym problemem różniczkowo-brzegowym [47]. Ze względu na konieczność stosowania zaawansowanej teorii matematycznej oraz skomplikowane i żmudne rachunki, metoda znalazła niewielkie zastosowanie praktyczne. Jedynym znanym ważnym przykładem jej zastosowania jest wyznaczenie grupy symetrii równania koagulacji Smoluchowskiego przez Chetverikova i Kudryavtseva [6, 7].

Bardziej udaną realizację idei wprowadzenia nielokalnych zmiennych odnajdujemy w pracach Kovalova, Krivenki i Pustovalova [26, 27] dotyczących symetrii równań Vlasova-Maxwella. Potraktowali oni całki po prędkościach występujące w tych równaniach jako nowe zmienne. Całki te definiują zerowy i pierwszy moment funkcji rozkładu i mają sens fizyczny gęstości przestrzennej ładunku i prądu elektrycznego. Metoda jest skuteczna dzięki szczególnej postaci równań Vlasova-Maxwella i nie ma waloru ogólności. Autorzy zapomnieli o konieczności wyrażenia wyniku (generatory grupy symetrii) w pierwotnych zmiennych. Pozostawienie pomocniczych zmiennych nielokalnych zmienia interpretację znalezionej symetrii. Ponadto, można uniknąć trików matematycznych z funkcją  $\delta$  Diraca, zastosowanych przez autorów, poprawnie przeprowadzając przedłużenie do nielokalnych zmiennych, wykorzystując wzory transformacyjne dla całek przedstawione w niniejszej rozprawie. Wystarczy skorzystać ze wzoru zawartego w kryterium

niezmienniczości z pracy [52]=[H1].

Na koniec warto wrócić do kanonicznych (ewolucyjnych) transformacji Lie-Bäcklunda [24, 25, 33, 4]. Z jednej strony rozważamy szerszą grupę przekształceń, z drugiej zaś znikają problemy związane z transformacją obszaru całkowania (patrz p.3.1). Kryterium niezmienniczości równania różniczkowo-całkowego znacznie się upraszcza. Poza przypadkiem ruchomego obszaru całkowania, tzn. zależności tego obszaru (granic całkowania) od zmiennych zależnych i ich pochodnych [58], znikają wkłady od obszaru całkowania w członie całkowym kryterium. Człon całkowity ogranicza się do pierwszego wyrazu w kryteriach niezmienniczości z prac [52]=[H1], [57]=[H5], tzn. sprowadza się do wejścia pod całkę przedłużonego generatora. Można również stosować efektywnie wspomnianą wyżej metodę różniczkowania względem parametru grupowego. Niestety cena za to uogólnienie i uproszczenie kryterium niezmienniczości jest wysoka. Znajdowanie przekształceń symetrii Lie-Bäcklunda jest znacznie trudniejsze i w ogólnym przypadku nie potrafimy ich wyznaczyć. Wiąże się to z koniecznością uwzględnienia oprócz badanego równania wszystkich (nieskończonych) jego konsekwencji różniczkowych.

Ponieważ metody pośrednie są mniej ogólne i mniej efektywne a próby pozbycia się wyrazów całkowych w metodach bezpośrednich, np. za pomocą wprowadzenia zmiennych nielokalnych, okazały się nieskuteczne lub niezbyt ogólne, w pracach stanowiących niniejszą rozprawę przyjęto następującą strategię. W przypadku wielkości lokalnych, takich jak pochodne czy też zmienne zespolone lub funkcje od argumentów opóźnionych i przedwczesnych (ogólnie: funkcyjnych), stosuje się klasyczną procedurę Lie-Ovsiannikova przedłużenia (rozszerzenia) grupy. Natomiast wielkości nielocalne (całki) pozostawia się bez zmian i poszukuje się nowej postaci kryterium niezmienniczości.

## 2.3 Opis metody

### 2.3.1 Przekształcenia punktowe

W pracach [H1]-[H5] została przedstawiona bezpośrednia metoda wyznaczania grup Liego przekształceń punktowych zachowujących równania różniczkowo-całkowe następującej ogólnej postaci

$$W \left( F(x, y, y_1, \dots, y_m), \int_{X(z)} dx^1 \dots dx^l f(x^1, \dots, x^l, x, y, y_1, \dots, y_k) \right) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie  $n, m, k, l, p, q$  są dowolnymi liczbami naturalnymi ( $l \leq n$ ),  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , funkcje  $W, F$  and  $f$  są dowolne ale wystarczająco regularne by zapewnić istnienie rozwiązań rów. (2.1). Symbol  $y_m$  oznacza zbiór wszystkich pochodnych cząstkowych  $m$ -tego rzędu:

$$y_m = \left\{ \frac{\partial^m y}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}} \equiv \partial_{x^{i_1}} \dots \partial_{x^{i_m}} y \equiv y_{i_1 \dots i_m} \right\}.$$

zaś granice całkowania (obszar  $X$ ) zależą od *zewnętrznych*, w stosunku do zmiennych całkowania, tzn. nie należących do obszaru  $X$ , zmiennych  $z$ , włączając w to zmienne niezależne, zmienne zależne i ich pochodne [58]

$$z = (z^1, \dots, z^q) \equiv (x^{l+1}, \dots, x^n, y, y_1, \dots, y_p). \quad (2.2)$$

W rów. (2.1) może występować wiele różnych wyrażeń całkowych. W stosunku do pracy [H5] uogólnienie polega na zastąpieniu  $X(x^{l+1}, \dots, x^n)$  przez  $X(z)$ , tzn. na dopuszczeniu zależności obszaru całkowania od zmiennych zależnych i ich pochodnych. Granice obszaru całkowania

$$\partial X \ni \underline{x} = (\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^l), \quad \underline{x}^i = \phi^i(z^1, \dots, z^q). \quad (2.3)$$

są zadane dowolnymi, gładkimi funkcjami  $\phi^i$ . Zatem obszar całkowania może się zmieniać dynamicznie, zależnie od wartości rozwiązań rów. (2.1). Wariant metody, gdy obszar całkowania *nie* zależy od zewnętrznych zmiennych został przedstawiony w pracy [H1].

Badanie symetrii równań typu (2.1) sprowadza się do badania symetrii równania *kanonicznego*, w którym funkcja  $W$  jest sumą wyrazu czysto różniczkowego  $F$  i wyrazu całkowego  $I$  (dokładniej całkowo-różniczkowego, gdyż pod całką występuje dowolny operator różniczkowy)

$$F(x, y, y_1, \dots, y_m) + \int_{X(z)} dx^1 \dots dx^l f(x^1, \dots, x^l, x, y, y_1, \dots, y_k) = 0. \quad (2.4)$$

Dla uproszczenia notacji, zmniejszenia liczby wskaźników, w pracach [H1], [H5] i [58] ograniczono się do jednego równania skalarnego. Uogólnienie na przypadek układu równań dla kilku zmiennych zależnych  $y = (y^1, \dots, y^r)$  jest oczywiste. Sprowadza się do stosowania otrzymanego kryterium niezmienniczości do każdego równania z osobna.

Przypadek  $f = 0$  redukuje rów. (2.1) do równania różniczkowego, zatem prezentowana metoda zawiera metodę Ovsiannikova jako szczególny przypadek.

Interesuje nas niezmienniczość równań różniczkowo-całkowych typu (2.1) względem *przekształceń punktowych*

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= e^{\epsilon G} x^i = x^i + \epsilon \xi^i(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \tilde{y} &= e^{\epsilon G} y = y + \epsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{2.5}$$

dla których *infinitesimalny generator*, należący do algebry Liego poszukiwanej grupy Liego przekształceń punktowych, ma postać

$$G = \xi^i(x, y) \partial_{x^i} + \eta(x, y) \partial_y.\tag{2.6}$$

Stosujemy standardową konwencję sumowania po powtarzających się wskaźnikach.

Dla "niemych" ("cichych") zmiennych całkowania  $x^1, \dots, x^l$  obowiązuje to samo prawo transformacyjne co dla zmiennych  $x^1, \dots, x^l$ , zadane tymi samymi funkcjami  $\xi^i$

$$\tilde{x}'^i = e^{\epsilon G} x'^i = x'^i + \epsilon \xi^i(x', y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{for } i = 1, \dots, l.\tag{2.7}$$

Z punktu widzenia prawa transformacyjnego zmienne primowane ("nieme") i nieprimowane rozróżniane są tylko przez ich wartości. Dotyczy to zarówno punktów wewnętrznych obszaru  $X$  jak i punktów należących do brzegu  $\underline{x} \in \partial X$ . Jeśli chcemy jawnie uwzględnić prawo transformacyjne dla "cichych" zmiennych całkowania, to należy dodać do generatora (2.6) następujący wyraz

$$\sum_{i=1}^l \xi^i(x', y) \partial_{x'^i}.\tag{2.8}$$

W przypadku gdy sumowanie nie przebiega całego zakresu zmiennej nie stosujemy konwencji sumacyjnej i wypisujemy jawnie znak sumy. Gdy dopuszczamy zależność obszaru całkowania  $X(z)$  od zewnętrznych zmiennych, pojawia się dodatkowy, parametryczny mechanizm zmienności tego obszaru. Granice obszaru całkowania  $\underline{x}^i = \phi^i(z^1, \dots, z^q)$  zależą od zmiennych zewnętrznych  $z$ , które transformują się pod wpływem przekształceń (2.5).

Ze względu na operację rozszerzenia (przedłużenia) grupy przekształceń do przestrzeni dżetów (patrz p. 2.3.2) przekształcenia punktowe odgrywają wyróżnioną rolę. Tylko w ich przypadku, a dla problemu skalarnego (jedno równanie na jedną zmienną zależną) również dla przekształceń stycznościowych, operacja przedłużania zamyka się na skończonym rzędzie równym rzędowi równania [24, 25, 33, 4, 42]. Pozwala to efektywnie wyznaczać generatory grupy symetrii. Gdy dopuścimy przekształcenia wyższego rzędu, tzn. zależne od pochodnych wyższych rzędów, to operacja przedłużenia prowadzi do nieskończonego wzrostu rzędu przekształcenia. Musimy od razu rozważać przekształcenia Lie-Bäcklunda a więc przekształcenia nieskończonego rzędu zależne od wszystkich pochodnych. Kryterium symetrii równania w takim przypadku musi uwzględniać wszystkie, nieskończone, konsekwencje różniczkowe równania. Wynikające stąd równania określające na generatory nie dają się w ogólności rozwiązać ze względu na występowanie pochodnych nieskończonego rzędu. Tylko w przypadku równań zwyczajnych udaje się użyć badanego równania do eliminacji niepożądanych pochodnych wyższych rzędów otrzymując tzw. symetrie dynamiczne [42]. W kontekście równań różniczkowo-całkowych przekształcenia Lie-Bäcklunda są interesujące ze względu



Z powyższych względów ograniczyliśmy się do przekształceń punktowych, dla których zostało znalezione ogólne kryterium niezmienniczości. Uproszczoną wersję tego kryterium dla przekształceń Lie-Bäcklunda otrzymuje się trywialnie przez pominięcie niektórych wyrazów.

### 2.3.2 Przedłużenie do przestrzeni dżetów i niezmienniczość równań

Niezmienniczość układu równań różniczkowo-całkowych względem przekształceń punktowych (2.5) oznacza niezmienniczość zbioru rozwiązań względem tych przekształceń, tzn. przekształcenia symetrii przeprowadzają rozwiązania układu równań w inne rozwiązania tego układu.

$$W(F, I) = 0 \implies W(\tilde{F}, \tilde{I}) = 0, \quad (2.10)$$

gdzie  $I$  oznacza wyraz całkowy w (2.1). Aby skorzystać z tej definicji musimy wiedzieć jak transformują się wszystkie wielkości występujące w rów. (2.1) pod wpływem przekształceń punktowych (2.5). W szczególności dotyczy to pochodnych zmiennych zależnych w (2.1). W ten sposób dochodzimy do koncepcji *rozszerzonej (przedłużonej)* przestrzeni. W przypadku pochodnych jest to przestrzeń dżetów. W tym języku pochodne zmiennych zależnych traktujemy jako nowe zmienne formalnie niezależne i jedyne co o nich musimy wiedzieć, to ich sposób transformacji pod wpływem (2.5). Oczywiście muszą się one transformować tak jak pochodne zmiennych zależnych. *Rozszerzone przekształcenia punktowe* dane są następującymi wzorami ([36, 33, 4], porównaj wzory (7)-(9) z pracy [H5])

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= e^{\epsilon G^{(m)}} x^i = x^i + \epsilon \xi^i(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \tilde{y} &= e^{\epsilon G^{(m)}} y = y + \epsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \tilde{y}_i &= e^{\epsilon G^{(m)}} y_i = y_i + \epsilon \eta_i(x, y, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &\vdots \\ \tilde{y}_{i_1 \dots i_m} &= e^{\epsilon G^{(m)}} y_{i_1 \dots i_m} = y_{i_1 \dots i_m} + \epsilon \eta_{i_1 \dots i_m}(x, y, y, \dots, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie *rozszerzony generator* ma postać

$$G^{(m)} = G + \eta_i \partial_{y_i} + \dots + \eta_{i_1 \dots i_m} \partial_{y_{i_1 \dots i_m}}. \quad (2.12)$$

Współczynniki  $\eta_i, \dots, \eta_{i_1 \dots i_m}$ , definiujące *rozszerzoną grupę*, dane są następującymi związkami rekurencyjnymi:

$$\begin{aligned} \eta_i &= D_i \eta - y_j D_i \xi^j \\ &\vdots \\ \eta_{i_1 \dots i_m} &= D_{i_m} \eta_{i_1 \dots i_{m-1}} - y_{i_1 \dots i_{m-1} j} D_{i_m} \xi^j \end{aligned} \quad (2.13)$$

a pochodna zupełna (total derivative)  $D_i$  jest zdefiniowana następująco

$$D_i = \partial_i + y_i \partial_y + y_{ij} \partial_{(y_j)} + \dots + y_{i i_1 \dots i_n} \partial_{(y_{i_1 \dots i_n})} + \dots$$

Wzory (2.11) otrzymujemy rekurencyjnie zaczynając od transformacji pierwszej pochodnej

$$y_i \longrightarrow \tilde{y}_i = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i}.$$

Dla funkcji złożonej  $\tilde{y}(x(\tilde{x}))$  obliczamy

$$\tilde{y}_i = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{D\tilde{y}}{Dx_j} \frac{Dx_j}{D\tilde{x}_i} = \left( y_j + \epsilon \frac{D\eta}{Dx_j} \right) \left( \delta_{ij} - \epsilon \frac{D\xi_j}{D\tilde{x}_i} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

gdzie zależność  $x(\tilde{x})$  otrzymujemy przez odwrócenie wzorów (2.5)

$$x^i = \tilde{x}^i - \epsilon \xi^i(x(\tilde{x}), y(\tilde{x})) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Ponieważ

$$\frac{D\xi_j}{D\tilde{x}_i} = \frac{D\xi_j}{Dx_i} + \mathcal{O}(\epsilon).$$

więc z dokładnością do wyrazów rzędu  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\tilde{y}_i = y_i + \epsilon \left( \frac{D\eta}{Dx_i} - (y_j) \frac{D\xi_j}{Dx_i} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Odtworzyliśmy w ten sposób wzór na współczynnik  $\eta_i$  w (2.13). Stosując tę samą procedurę znajdujemy pozostałe współczynniki definiujące rozszerzone przekształcenia (2.13), gdyż druga pochodna zmiennej zależnej jest pochodną pierwszej pochodnej itd.

W przestrzeni dżetów równanie (2.1) zadaje pewną rozmaitość i niezmienniczość tej rozmaitości pod wpływem rozszerzonych przekształceń (2.11) wyraża niezmienniczość równania (2.1).

Tę samą ideę rozszerzania przestrzeni, w której działają przekształcenia punktowe (2.5), stosujemy do innych wielkości lokalnych występujących w rów. (2.1). W pracy [H2] zastosowano ją do zmiennych zależnych od tzw. argumentów funkcjonalnych  $y^\varphi(x) = y(\varphi(x))$ ,  $y_i^\varphi(x) = y_i(\varphi(x))$ , ... , gdzie funkcja  $\varphi(x)$  jest dana, np.  $\varphi(x) = x - a$  dla opóźnionego argumentu.

### 2.3.3 Infinitesimalne kryterium niezmienniczości

Zgodnie z (2.10) należy przyrównać do zera równanie otrzymane za pomocą rozszerzonych przekształceń (2.11)  $W(\tilde{F}, \tilde{I}) = 0$ . Ogólna metoda Liego polega na ograniczeniu się do infinitesimalnych przekształceń, tzn. do wyznaczenia algebry Liego poszukiwanej grupy symetrii. Zatem, działamy na (2.1) rozszerzonymi przekształceniami (2.11) wypisując jawnie tylko wyrazy liniowe w parametrze grupowym  $\epsilon$ . Następnie rozwijamy funkcje  $W$ ,  $F$  i  $f$  w szereg Talora i pozostawiamy tylko wyrazy liniowe w parametrze  $\epsilon$ . Otrzymany rezultat próbujemy wyrazić za pomocą rozszerzonego generatora (2.12).

Rozwijając funkcję  $W$  w szereg Talora otrzymujemy

$$W(\tilde{F}, \tilde{I}) = W(F, I) + \frac{\partial W}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial W}{\partial I} \Delta I + \dots$$

Zatem zadanie sprowadza się do zbadania zmian wyrazu różniczkowego  $\Delta F$  i wyrazu całkowego  $\Delta I$  pod wpływem (2.11), czyli wystarczy rozwiązać równanie o postaci kanonicznej (2.4). W przypadku wyrazu różniczkowego otrzymujemy (porównaj wzór (10) w pracy [H5] lub [H1])

$$\Delta F = F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}, \dots, \tilde{y}) - F(x, y, y, \dots, y) = \epsilon G^{(m)} F(x, y, y, \dots, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.14)$$

skąd, w przypadku równania różniczkowego otrzymujemy kryterium Ovsiannikova.

Zasadniczy problem polega na wyznaczeniu zmiany wyrazu całkowego

$$\Delta I = \int_{\tilde{X}(\tilde{z})} d\tilde{x}'^1 \dots d\tilde{x}'^l f(\tilde{x}', \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}, \dots, \tilde{y}) - \int_{X(z)} dx'^1 \dots dx'^l f(x', x, y, y, \dots, y) \quad (2.15)$$

pod wpływem rozszerzonych przekształceń (2.11). W tym celu próbujemy sprowadzić przekształcony obszar  $\tilde{X}(\tilde{z})$  do wyjściowego obszaru całkowania  $X(z)$ , aby obliczyć różnicę całek. W ogólnym przypadku zależności obszaru całkowania  $X(z)$  do zewnętrznych zmiennych mamy dwa mechanizmy zmiany tego obszaru. Pierwszy wynika z jawnej transformacji punktów należących do  $X$ , włączając brzeg  $\partial X$ , pod wpływem (2.11). Drugi jest skutkiem parametrycznej zależności granic całkowania od zewnętrznych zmiennych, które również zmieniają się pod wpływem (2.11). Najpierw uwzględniamy zmianę  $X$  wynikającą z pierwszego mechanizmu. W tym celu zmieniamy zmienne w pierwszej całce (2.15) zgodnie z przekształceniami (2.7)

$$\{\tilde{x}'^1, \dots, \tilde{x}'^l\} \mapsto \{x'^1, \dots, x'^l\}.$$

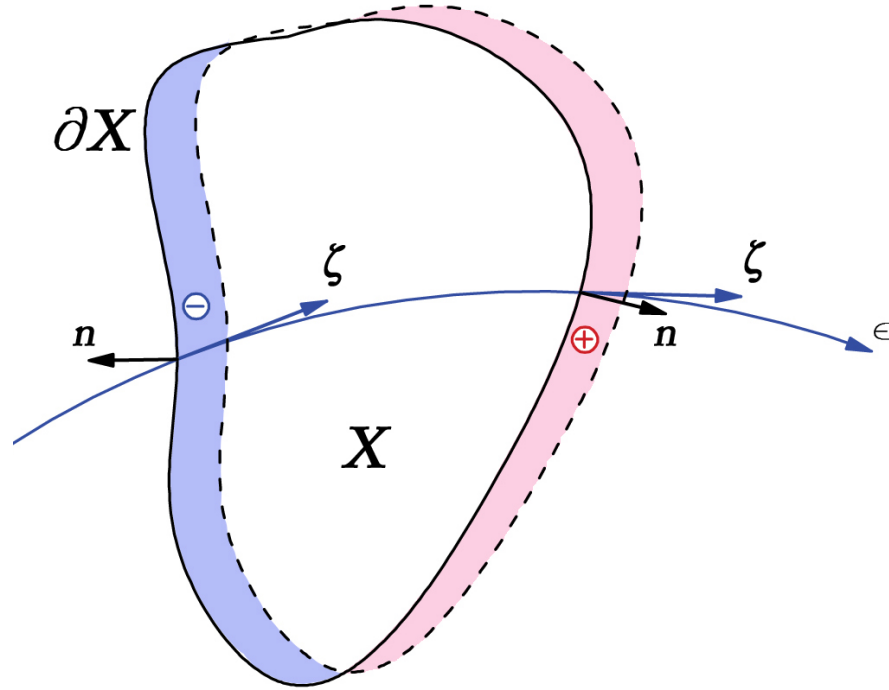
Wymaga to obliczenia jacobianu tej transformacji z dokładnością do wyrazów liniowych w parametrze  $\epsilon$  (porównaj pracę [H1] str. 272 oraz pracę [H5] str. 254). W przypadku braku zależności obszaru całkowania od zewnętrznych zmiennych ta zamiana zmiennych sprowadza pierwszą całkę w (2.15) do obszaru wyjściowego  $X$ . Dalej rozwijamy w szereg Talora wyrażenia podcałkowe ograniczając się do wyrazów pierwszego rzędu i otrzymujemy w ten sposób kryterium niezmienniczości równań różniczkowo-całkowych z pracy [H1]. W ogólnym przypadku, gdy obszar całkowania zależy od zewnętrznych zmiennych, to nie wystarcza ze względu na drugi mechanizm zmian  $X(z)$ . Obszar całkowania w pierwszej całce w (2.15) zmienia się z  $\tilde{X}(\tilde{z})$  na  $X(\tilde{z}) \neq X(z)$  [58] (porównaj wzór na górze str. 255 w pracy [H5], w którym wyrażenie  $X(\tilde{x}^{l+1}, \dots, \tilde{x}^n)$  należy zastąpić wyrażeniem  $X(\tilde{z})$  zaś  $X(x^{l+1}, \dots, x^n)$  wyrażeniem  $X(z)$ ).

W następnym kroku przedstawiamy obszar  $X(\tilde{z})$  jako sumę teoriomnogościową wyjściowego zbioru  $X(z)$  i zorientowanego "przyrostu"  $\Delta X(z)$

$$X(\tilde{z}) = X(z) \cup \Delta X(z),$$

gdzie zorientowany zbiór  $\Delta X(z)$  powstaje z brzegu  $\partial X$  pod wpływem rozszerzonych przekształceń w przestrzeni dżetów (2.11). Zbiór  $\Delta X(z)$  dziedziczy standardową orientację brzegu  $\partial X$ : normalna  $\mathbf{n}$  do  $\partial X$  ma kierunek dodatni, gdy jest skierowana na zewnątrz ograniczonego obszaru  $X$ . Części przyrostu  $\Delta X$ , które powstają z  $\partial X$  w kierunku dodatniej normalnej pod wpływem przekształceń (2.11) są dodatnio zorientowane. Tzn. iloczyn skalarny normalnej  $\mathbf{n}$  i wektora  $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^q) \equiv (\xi^{(l+1)}, \dots, \xi^n, \eta, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ ,

przedstawiającego współczynniki przekształceń (2.11) dla zewnętrznych zmiennych, jest dodatni. Te części  $\Delta X$  przedstawiają rozszerzanie się obszaru  $X$  i nie przecinają się z nim. Pozostałe części  $\Delta X$  mają znak ujemny i odpowiadają kurczeniu się obszaru  $X$ . Sytuację ilustruje następujący symboliczny rysunek.



Całka po zorientowanym przyroście  $\Delta X$  dziedziczy odpowiednie znaki poszczególnych części  $\Delta X$ . Dzięki temu całka po obszarze  $X(\tilde{z})$  jest równa sumie całek  $\Delta I' + \Delta I''$  po  $X(z)$  i  $\Delta X(z)$  odpowiednio.

W całce po wyjściowym obszarze  $X(z)$  rozwijamy wyrażenie podcałkowe w szereg Taylora, pozostawiamy wyrazy liniowe w parametrze grupowym  $\epsilon$  i otrzymujemy w ten sposób ([58]) wyrazy dające kryterium niezmienniczości z pracy [H1] (porównaj rachunki na dole str. 255 w pracy [H5] i wynik (11) na str. 256).

Pozostaje do obliczenia całka  $\Delta I''$  po obszarze  $\Delta X(z)$ . Wykorzystujemy w tym celu infinitezymalny charakter rozważanego jednoparametrowego przekształcenia (2.11). Obszar  $\Delta X(z)$  ma infinitezymalny rozmiar w kierunku działania tego przekształcenia. Rozkładamy całkę po  $\Delta X(z)$  na całkę po brzegu  $\partial X$  oraz na wewnętrzną jednowymiarową całkę w kierunku prostopadłym do brzegu wzdłuż normalnej  $\mathbf{n}$  po infinitezymalnym odcinku

$$\sum_{i=1}^l n^i \Delta x^i,$$

będącym rzutem na kierunek normalnej  $\mathbf{n}$  infinitezymalnego odcinka zakreślonego przez punkt brzegu  $\partial X$  pod wpływem infinitezymalnego przekształcenia (2.11) (rozwijamy w

szereg Taylora funkcje  $\phi^i$  definiujące granice całki (2.3))

$$\Delta \underline{x}^i = \tilde{x}^i - x^i = \sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \Delta z^j = \epsilon \sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \zeta^j(\underline{x}, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Do tej jednowymiarowej całki po infitezymalnym odcinku stosujemy twierdzenie o wartości średniej, dzięki czemu całka  $\Delta I^n$  z dokładnością do wyrazów liniowych względem parametru  $\epsilon$  jest równa następującej całce powierzchniowej po brzegu  $\partial X$

$$\Delta I^n = \epsilon \int_{\partial X} d\sigma \sum_{i=1}^l n^i \sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \zeta^j(\underline{x}, y) f(\underline{x}, x, y, y, \dots, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

gdzie  $d\sigma$  oznacza miarę na  $\partial X$ . Za pomocą twierdzenia Gaussa przekształcamy tę całkę powierzchniową w całkę objętościową po wyjściowym obszarze  $X(z)$

$$\Delta I^n = \epsilon \int_{X(z)} dx'^1 \dots dx'^l \sum_{i=1}^l \partial_{x'^i} \sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \zeta^j(x', y) f(x', x, y, y, \dots, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.16)$$

Rezultat (2.16) jest prostym uogólnieniem wzoru (12) z pracy [H5], w którym należy zastąpić zewnętrzne zmienne niezależne  $(x^{l+1}, \dots, x^n)$  zmiennymi zewnętrznymi (2.2)  $z = (z^1, \dots, z^q) \equiv (x^{l+1}, \dots, x^n, y, y, \dots, y)$ , zaś wektor  $\xi = (\xi^{(l+1)}, \dots, \xi^n)$  wektorem

$$\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^q) \equiv (\xi^{(l+1)}, \dots, \xi^n, \eta, \eta_1, \dots, \eta_m, \dots).$$

Wzór (2.16) daje nowe wyrazy w kryterium niezmienniczości wynikające z zależności obszaru całkowania od zewnętrznych zmiennych.

Ostatecznie otrzymujemy ([58]) *infitezymalne kryterium niezmienniczości* równań różniczkowo-całkowych postaci (2.4) w postaci twierdzenia:

**Twierdzenie 1.** *Warunek konieczny niezmienniczości równań (2.4) pod wpływem przekształceń (2.5) ma następującą postać:*

$$\begin{aligned} & G^{(m)} F(x, y, y, \dots, y) \\ & + \int_{X(z)} dx'^1 \dots dx'^l \left[ G^{(k)} f(x', x, y, y, \dots, y) + f(x', x, y, y, \dots, y) \sum_{i=1}^l \frac{\partial \xi^i(x', y)}{\partial x'^i} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^l \partial_{x'^i} \sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \zeta^j(x', y) f(x', x, y, y, \dots, y) \right] = 0 \quad \text{na rozwiązaniach (2.4),} \end{aligned}$$

gdzie współczynniki  $\zeta^j$  odpowiadają zewnętrznym zmiennym  $z^j$ , od których zależy obszar całkowania.

Ta postać kryterium niezmienniczości jest uogólnieniem wzoru (13) z pracy [H5] na przypadek, gdy obszar całkowania zależy od zewnętrznych zmiennych  $z$ , tzn. również od zmiennych zależnych i ich pochodnych.

W przypadku równania (2.1) kryterium niezmienniczości przyjmuje postać warunku

$$\frac{\partial W}{\partial F} G^{(m)} F + \frac{\partial W}{\partial I} \int_{X(z)} dx'^1 \dots dx'^l \left[ G^{(k)} f + f \sum_{i=1}^l \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^i} + \sum_{i=1}^l \partial_{x'^i} \sum_{j=1}^q \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \zeta^j f \right] = 0$$

na rozwiązaniach  $W(F, I) = 0$ .

Kryterium niezmienniczości daje tzw. równania *określające* na współczynniki  $\xi^i, \eta$  definiujące generatory poszukiwanych przekształceń punktowych, zachowujących równania różniczkowo-całkowe. Są to jednorodne *liniowe* równania różniczkowo-całkowe. Ponieważ te równania muszą być spełnione tożsamościowo ze względu na zmienne w przestrzeni dżetów  $x, y, y_1, \dots$ , które są formalnie niezależne, więc można się pozbyć równań całkowych korzystając z lematu Lagrange'a rachunku wariacyjnego [17]. W tym celu należy przedstawić wyrażenia podcałkowe w postaci iloczynu jednej ze zmiennych  $x, y, y_1, \dots$  i wyrażenia niezależnego od tej zmiennej. W zastosowaniach fizycznych zwykle się to udaje dzięki dodatkowym informacjom o badanym równaniu, które wynikają z fizycznego kontekstu. Np. w przypadku równań Vlasova-Maxwella wystarczy założyć analityczność zależności współczynnika  $\eta$  od zmiennej zależnej, jednoczątkowej funkcji rozkładu. Takie założenie jest równoważne przyjęciu, że przekształcenia punktowe tworzące grupę Liego zależą analitycznie nie tylko od parametru  $\epsilon$  ale również od punktu w przestrzeni, w której działają. W ten sposób przechodzimy od różniczkowo-całkowych równań określających do wyrażań podcałkowych, będących liniowymi równaniami różniczkowymi.

## 2.4 Omówienie prac włączonych do rozprawy habilitacyjnej

[H1] = [52] Z. J. Zawistowski, *Symmetries of Integro-Differential Equations*, Rep. Math. Phys. **48**, No 1/2, 269, (2001).

Praca stanowi podsumowanie wyników pierwszego okresu badań symetrii równań różniczkowo-całkowych. Zawiera wyprowadzenie infinitesimalnego kryterium niezmienniczości równań różniczkowo-całkowych względem przekształceń punktowych w przypadku, gdy obszar całkowania *nie* zależy od zewnętrznych zmiennych, tzn. zmiennych niezależnych spoza obszaru całkowania oraz zmiennych zależnych i ich pochodnych. Otrzymane kryterium zostało zastosowane do wyznaczenia grupy symetrii równań Vlasova-Maxwella opisujących bezzderzeniową plazmę. Wyznaczono algebrę Liego i pełną grupę Liego symetrii punktowych dla tych równań. Ze względu na formalne ograniczenie objętości pracy do 8 stron nie zamieszczono w niej wyników dotyczących pełnej klasyfikacji podgrup niezmienniczych i odpowiadających im rozwiązań niezmienniczych.

Już w tej najmniej ogólnej formie kryterium niezmienniczości stosuje się do bardzo szerokiego kręgu zagadnień fizycznych. Było intensywnie wykorzystywane do badania równań kinetycznych (równanie Boltzmann), równań dynamiki płynów (równanie Benneya oraz pośrednie równania Eulera równoważne równaniu Bragga-Hawthorne'a) i równań fizyki plazmy.

[H2] = [54] Z. J. Zawistowski, *Symmetries of Equations with Functional Arguments*, Rep. Math. Phys. **50**, No 2, 125, (2002).

W tej pracy przedstawiono istotne uogólnienie teorii na przypadek równań z tzw. funkcjonalnymi argumentami, np. opóźnionymi lub wyprzedzonymi. Uogólnienie dotyczy zarówno równań różniczkowych, zwyczajnych i cząstkowych, jak równań różniczkowo-całkowych. Ponieważ zmienne zależne będące funkcjami argumentów funkcjonalnych są wielkościami lokalnymi, więc można zastosować metodę Liego-Ovsiannikova rozszerzenia (przedłużenia) grupy przekształceń. Odpowiednie wzory transformacyjne zostały wyprowadzone w pracy. Ponadto, w pracy zostało wykorzystane rozszerzenie grupy na zmienne zespolone, szczegółowo omówione w [51]. To rozszerzenie choć proste nie jest jednak trywialne, gdyż pochodna kwadratu modułu  $|\mathcal{E}|^2$  względem  $\mathcal{E}$  nie istnieje, ponieważ funkcja  $\mathcal{E}^*(\mathcal{E})$  nie jest różniczkowalna. Okazuje się, że wraz z równaniem wyjściowym trzeba rozważyć jego sprzężoną wersję, zaś wzory transformacyjne dla wielkości sprzężonych otrzymujemy przez sprzężenie zespolone.

W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych opóźnione argumenty pojawiają się w teorii sterowania w układach ze sprzężeniem zwrotnym. W przypadku równań cząstkowych opisują one zagadnienia polowe z opóźnioną odpowiedzią. Procesy z

rozłożoną opóźnioną odpowiedzią prowadzą do równań różniczkowo-całkowych z opóźnionymi argumentami. Przykład takiego równania, tzw. nielokalne, nieliniowe równanie Schrödingera (nNLS), został zbadany w pracy. Równanie to opisuje ewolucję wolno zmiennej amplitudy fal Langmuira w plazmie. Zostało ono otrzymane metodami asymptotycznymi z równań Vlasova-Maxwella [50]. Dotyczy ważnych zagadnień praktycznych w fizyce plazmy. Przeprowadzona analiza grupowa pozwoliła stwierdzić nieistnienie solitonów Zakharova, które pojawiają się w przybliżeniu hydrodynamicznym. Analogiczne równanie nNLS pojawia się w optyce nieliniowej.

[H3] = [55] V. B. Taranov and Z. J. Zawistowski, *Electron Plasma Upper Hybrid Kinetic Symmetries*, J. Tech. Phys. **44**, No 3, 303, (2003).

Praca napisana wspólnie z dr V. Taranovem dotyczy ważnego, praktycznego problemu dynamiki plazmy w polu magnetycznym. Rozważane zagadnienie dotyczy zarówno plazmy kosmicznej (wpływ pola magnetycznego Słońca i Ziemi) jak plazmy laboratoryjnej (pułapki magnetyczne, tokomaki). Znaleziona została pełna grupa symetrii dwiema niezależnymi metodami: metodą momentów Taranova [44] i metodą bezpośrednią Zawistowskiego [H1]=[52]. Jednym z celów było porównanie obu metod w praktyce. Otrzymano zgodne wyniki. Metoda bezpośrednia okazała się bardziej efektywna. Ten przykład kolejny raz potwierdza skuteczność metody bezpośredniej. W pracy została przeprowadzona pełna klasyfikacja podgrup niezmienniczych i odpowiadających im klas rozwiązań niezmienniczych. Przeanalizowano granicę zimnej plazmy oraz związek z elektronową plazmą Langmuira.

[H4] = [56] Z. J. Zawistowski, *Symmetries of Radial Maxwell-Vlasov Equations*, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine **50**, Part 1, 304, (2004).

Praca stanowi przykład zastosowania kryterium niezmienniczości, otrzymanego w pracy [H1] = [52], do ważnego fizycznie przypadku plazmy o symetrii sferycznej. Z ogólnych właściwości symetrii równań elektrodynamiki wynika, że w dwóch przypadkach ruchów, ruchów prostoliniowych i ruchów radialnych, nie ma promieniowania elektromagnetycznego. Ten sam wniosek wynika z teorii promieniowania, gdyż znika wówczas poprzeczna składowa transformaty Fouriera prądu elektrycznego. Zatem nie występują efekty retardacji typowe dla pola promieniowania i pole elektromagnetyczne zachowuje się jak pole elektrostatyczne "wmrożone" w plazmę. Przypadek ruchu prostoliniowego jest szeroko wykorzystywany w teorii plazmy, natomiast przypadek ruchów czysto ra-

dialnych nie był, według wiedzy autora, w ogóle badany.

Zagadnienie jest bardzo ważne w zastosowaniach praktycznych, gdyż fala sferyczna zbiegająca, wywołana przez sferycznie symetryczne pobudzenie lub wskutek implozji, może być użyta jako mechanizm grzania plazmy w procesie reakcji termojądrowej. W związku z tym kontynuowane są badania plazmy wieloskładnikowej zawierającej cząstki o jednakowym stosunku ładunku do masy (cząstki  $\alpha$  i jony deuteru).

[H5] = [57] Z. J. Zawistowski, *General Criterion of Invariance for Integro-Differential Equations*, Rep. Math. Phys. **54**, No 2, 341, (2004).

W tej pracy przedstawiono uogólnienie teorii na przypadek równań różniczkowo-całkowych zawierających całki po obszarach, które mogą zależeć od *zewnętrznych* zmiennych niezależnych. Zależność od zewnętrznych zmiennych prowadzi do dodatkowego mechanizmu zmiany obszaru całkowania pod wpływem punktowych przekształceń symetrii. Przedyskutowano inne uogólnienia dopuszczalnej postaci równań, w szczególności wyraz całkowy nie musi się pojawiać w równaniu addytywnie. Przeprowadzono krytyczną analizę innych metod wyznaczania symetrii równań różniczkowo-całkowych.

Przedstawiona teoria w prosty sposób uogólnia się na przypadek zewnętrznych zmiennych będących zmiennymi zależnymi i ich pochodnymi, co prowadzi do zagadnienia z dynamicznie zmiennym obszarem całkowania [58] (porównaj p. 3.1 i p.3.3). W postaci zawartej w pracy [H5] = [57] i jej uogólnieniu [58] teoria obejmuje wszystkie przypadki równań różniczkowo-całkowych mających sens fizyczny, które można sobie wyobrazić i stanowi kulminację rozwijanej metody.

## 2.5 Podsumowanie

W pracach stanowiących rozprawę habilitacyjną zawarte są najistotniejsze etapy budowania ogólnej metody znajdowania grup symetrii równań różniczkowo-całkowych opisujących układy dynamiczne z nielokalnym oddziaływaniem oraz wybrane, charakterystyczne przykłady zastosowań tej metody. Przez symetrię rozumiemy tu niezmienniczość tych równań względem grupy Liego przekształceń punktowych. W kolejnych krokach metoda była uogólniana zaczynając od równań różniczkowo-całkowych, w których obszar całkowania nie zależy od zmiennych zewnętrznych, tzn. zmiennych nie należących do tego obszaru. Następnie uogólniono teorię na przypadek zależności obszaru całkowania od zewnętrznych zmiennych niezależnych. W ostatecznej formie metoda dopuszcza zależność obszaru całkowania od zmiennych zewnętrznych zależnych i ich pochodnych. Zależność obszaru całkowania od rozwiązań równania opisuje dynamiczne zmiany tego obszaru, tzw. ruchome granice całkowania. Tak ogólna postać równań obejmowanych metodą była inspirowana zastosowaniami fizycznymi. Np. w optyce nieliniowej, w teorii modów sprzężonych, oddziaływanie opisywane jest całkami przekrywania, tzn. całkami po poprzecznych przekrojach wiązek światła. Ze względu na nieliniowość teorii występuje zjawisko samoogniskowania się silnej (laserowej) wiązki światła i związana z tym zmiana jej przekroju w zależności od natężenia światła. Oprócz tego uogólniono teorię na przypadek zmiennych zespolonych oraz na bardzo ważny przypadek argumentów "funkcyjnych", równania z tzw. argumentami funkcjonalnymi. W najprostszym przypadku są to równania z opóźnionym argumentem oraz równania splotowe. Ostateczna postać otrzymanego kryterium niezmienniczości równań różniczkowo-całkowych obejmuje praktycznie wszystkie równania występujące w zastosowaniach fizycznych.

Metoda jest naturalnym uogólnieniem klasycznej teorii Liego-Ovsiannikova dla równań różniczkowych. Nie wymaga stosowania zaawansowanego aparatu matematycznego. W przypadku wielkości lokalnych, takich jak pochodne czy też argumenty funkcyjne, stosujemy klasyczną procedurę rozszerzenia (przedłużenia) grupy symetrii na te zmienne. W przypadku wielkości nielokalnych stosowane dotychczas metody są pracochłonne, mało efektywne i często stosują się do ograniczonej klasy równań. Dlatego też pozostawiamy wyrażenia nielokalne bez zmian i poszukujemy nowej formy kryterium niezmienniczości. Sformułowana teoria ma charakter pragmatyczny i jest nastawiona na zastosowania praktyczne.

Metoda została sprawdzona w zastosowaniach praktycznych do badania skomplikowanych nieliniowych i nielokalnych równań fizyki. Okazała się bardzo skuteczna. Autor stosował ją np. do analizy grupowej równań Vlasova-Maxwella i nielokalnego, nieliniowego równania Schrödingera. Inni badacze (Özer, Frewer et.al.) stosowali ją do badania równania Boltzmanna i skomplikowanych równań dynamiki płynów.

Otrzymane kryterium niezmienniczości stanowi warunek konieczny istnienia symetrii. W związku z tym pozwala ono wyznaczyć wszystkie potencjalne grupy symetrii badanego równania. Problem warunku dostatecznego jest znacznie bardziej skomplikowany niż w przypadku równań różniczkowych. Wymaga uprzedniego sformułowania globalnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla równań różniczkowo-całkowych. Jest to trudne zadanie na nową podstawową i bardzo obszerną pracę, co pokazują próby podjęte w pracach DiPermy i Lionsa [8]-[9], Dudyńskiego i Ekiel-Jeżewskiej [10] oraz w monografii Glassey'a [19]. Z praktycznego punktu widzenia warunek konieczny jest

ważniejszy. Przez podstawienie można sprawdzić, czy wyznaczone przekształcenia są rzeczywiście symetriami danego równania. Takiego sprawdzenia i tak należy dokonać aby wyeliminować ewentualne pomyłki rachunkowe, poza tym już przykład równań różniczkowych cząstkowych pokazuje, że korzystanie z warunku dostatecznego może być bardziej skomplikowane niż bezpośrednio sprawdzenie (patrz [33]: dodatkowe warunki regularności dla równań cząstkowych oprócz warunku maksymalnego rzędu).

Tematyka badań przedstawiona w niniejszej rozprawie będzie kontynuowana. Przede wszystkim chodzi tu o zastosowania teorii do zagadnień fizycznych. Przewiduje się napisanie odpowiedniego pakietu dla programu *Mathematica* wykorzystującego algorytmiczny charakter sformułowanego kryterium niezmienniczości. Po zakończeniu obecnego etapu badań dotyczącego wyznaczania grup symetrii równań różniczkowo-całkowych, planowane jest podjęcie nowego, perspektywicznego zadania, jakim jest opracowanie metody znajdowania praw zachowania dla takich równań. W tym przypadku niezbędny jest formalizm nie korzystający z istnienia lagranżjanu i związanego z nim twierdzenia Nöther.

# Bibliografia

- [1] G. Baumann, *Symmetry analysis of differential equations with Mathematica*, New York, Springer, 2000.
- [2] G. Birkhoff, *Hydrodynamics: A Study in Logic, Facts and Similitude*, Princeton University Press, Princeton 1950.
- [3] P. Blanchard, E. Brüning, *Variational Methods in Mathematical Physics. A Unified Approach*, Springer-Verlag, NY, 1992.
- [4] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Springer, New York 1989.
- [5] G. W. Bluman and C. Anco, *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Springer, New York 2002.
- [6] V.N. Chetverikov and A.G. Kudryavtsev, *Acta Applicandae Mathematicae*, **41**, No 1-3, 45, (1995).
- [7] V.N. Chetverikov and A.G. Kudryavtsev, *Modeling integro-differential equations and a method for computing their symmetries and conservation laws*, in *The interplay between differential geometry and differential equations*, Lychagin V.V. ed., Providence, Rhode Island, Amer. Math. Soc. 1995, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.2*, 1995, V.167,1-22.
- [8] R. J. Di Perma, P. L. Lions, *Comm. on Pure and Applied Mathematics* Vol. XLII, 729, (1989).
- [9] R. J. Di Perma, P. L. Lions, *Ann.Math.* Vol. 130, 321, (1989).
- [10] M. Dudyński, M. L. Ekiel-Jeżewska, *J.Stat.Phys.* Vol. 66, No 3//4, 991, (1992).
- [11] C. Ehresmann, *Les prolongements d'une variété différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 598-600, 777-779, 1081-1083, (1951); **234**, 1028-1030, 1424-1425, (1952).
- [12] C. Ehresmann, *Introduction à la théorie des structures infinitesimales et des pseudo-groupes de Lie*, in *Géométrie Différentielle*, Colloq. Inter. du Centre Nat. de la recherche Scientifique, 97-110, Strasbourg 1953.
- [13] V.I. Fushchich, *On a method of investigating the group properties of integro-differential equations*, *Ukrain. Mat. Zh.*, 1981, V.33, N 6, 834-838 [in Russian].

- [14] V.I. Fushchich and N.A. Selekman., *Integro-differential equations that are invariant with respect to the Galilei, Poincare, Schrödinger and conformal groups*, *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR ser. A*, 1983, N 5, 21-24 [in Ukrainian].
- [15] V.I. Fushchich, V.M. Shtelen and N.I. Serov: *Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.
- [16] M. Frewer, M. Oberlack and S. Guenther, *Symmetry investigations on the incompressible stationary axisymmetric Euler equations with swirl*, *Fluid Dynamics Research* **39**, (2006).
- [17] I.M. Gelfand and S.W. Fomin, *Calculus of variations*, Englewood Cliff, Prentice-Hall, 1962.
- [18] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Wiley, N.Y. 1974.
- [19] R. T. Glassey:, *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*, SIAM, Philadelphia 1992.
- [20] Yu.N. Grigoriev and S.V. Meleshko, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **297**, No 2, 323, (1987) (in Russian).
- [21] Yu.N. Grigoriev and S.V. Meleshko, *Arch. Mech.*, **42**, No 6, 693, (1990).
- [22] B.K. Harrison and F.B. Estabrook, *J. Math. Phys.*, **12**, No 4, 653, (1971).
- [23] B.K. Harrison, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, **1**, Paper 001, (2005), ([www.emis.de/journals/SIGMA/2005/Paper001](http://www.emis.de/journals/SIGMA/2005/Paper001)).
- [24] N. Ch. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht 1985.
- [25] N.H. Ibragimov (Editor), *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations*, Boca Raton, Florida, CRC Press, Inc., Vol.1, 1994; Vol.2, 1995; Vol.3, 1996.
- [26] V.N. Kovalev, S.V. Krivenko and V.V. Pustovalov, *Pisma Zh. Exper. Teoret. Fiz*, **55**, No 4, 256, (1992) (in Russian); English transl. in *JEPT Lett.*, (1992).
- [27] V.N. Kovalev, S.V. Krivenko and V.V. Pustovalov, *J.Nonlinear Math. Phys.*, **3**, No 1-2, 175, (1996).
- [28] S. Lie, *Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung*, *Arch. Math.* **6**, 328-368, (19881); również: *Gesammelte Abhandlungen*, **3**, 492-523, B. G. Teubner, Leipzig 1922.
- [29] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, Vol. I-III, B. G. Teubner, Leipzig 1888, 1890, 1893.
- [30] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen transformationen*, B. G. Teubner, Leipzig 1891.

- [31] S. Lie, *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Leipz. Berich. **1**, 53-128, (1895; również: *Gesammelte Abhandlungen*, **4**, 320-384, B. G. Teubner, Leipzig 1929.
- [32] E. Nöther, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. KÖnig. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.- Phys. Kl., 235-257, (1918), (English translation: *Transport Theory and Stat. Phys.* **1**, 186-207, (1971))
- [33] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York 1986.
- [34] L. W. Owsiannikow, *Gruppowyje swojstwa differencjalnych urawnienij*, Nauka, Nowosibirsk 1978.
- [35] L. W. Owsiannikow, *Gruppowoj analiz differencjalnych urawnienij*, Nauka, Moskwa 1978.
- [36] L. V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, Boston 1982.
- [37] T. Özer, *Symmetry group analysis of Benney system and an application for shallow-water equations*, Mech. Res. Comm. **32**, 241, (2005).
- [38] T. Özer, *Symmetry group of the equations with nonlocal structure and an application for the collisionless Boltzmann equation*, Int. J. Engng. Sci. **43**, 121, (2005).
- [39] R.E. Popovich, *Symmetry properties of an integro-differential of Hartree type*, in Algebra-theoretic investigations in mathematical physics, pp. 50-53, Kiev, Institute of Mathematics Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1990 [in Russian].
- [40] N.A. Selekhman, *Maximal algebra of symmetry of a system of integro-differential equations*, in Algebra-theoretic investigations in mathematical physics, pp. 125-131, Kiev, Institute of Mathematics Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1981 [in Russian].
- [41] N.A. Selekhman, *The group properties of the Boltzmann equation*, in Algebra-theoretic investigations in mathematical physics, pp. 65-68, Kiev, Institute of Mathematics Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1983 [in Russian].
- [42] H. Stephani, *Differential equations. Their solutions using symmetries*, ed. M. Mc Callum, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
- [43] V.I. Stoigny, *The group properties of integro-differential equations of Hartree type*, in Symmetry and solutions of equations of mathematical physics, pp. 82-83, Kiev, Institute of Mathematics Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1989 [in Russian].
- [44] V.B. Taranov, *ZhTF* **46**, 1271, (1976) [in Russian], English translation: *Sov. Phys. Tech. Phys.* **21**, 720, (1976).
- [45] F. W. Warner, *Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, NY, 1983.

- [46] W. Wojtyński, *Grupy i algebry Liego*, PWN, Warszawa 1986
- [47] A.M. Vinogradov and I.S. Krasilshchik (Editors), *Symmetries and conservation laws for equations of mathematical physics*, Moscow, Factorial, 1997 (in Russian); The English translation of the book: *Translations of Mathematical Monographs*, Vol.182, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1999.
- [48] A.M. Vinogradov and I.S. Krasilshchik, *Acta Applicandae Mathematicae*, **2**, No 1, 79, (1984).
- [49] Zawistowski Z.J., On symmetries of integro-differential equations, *Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci.*, 1998, V.46, N 2, 187-197.
- [50] Z. J. Zawistowski and A. Turski, *J. Tech. Phys.* **39**, No 1, 115, (1998).
- [51] Z. J. Zawistowski and A. Turski, *J. Tech. Phys.* **39**, No 2, 297, (1998).
- [52] Z. J. Zawistowski, *Rep. Math. Phys.* **48**, No 1/2, 269, (2001).
- [53] Z. J. Zawistowski, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* **43**, Part 1, 263, (2002).
- [54] Z. J. Zawistowski, *Rep. Math. Phys.* **50**, No 2, 125, (2002).
- [55] V. B. Taranov and Z. J. Zawistowski, *J. Tech. Phys.* **44**, No 3, 303, (2003).
- [56] Z. J. Zawistowski, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* **50**, Part 1, 304, (2004).
- [57] Z. J. Zawistowski, *Rep. Math. Phys.* **54**, No 2, 341, (2004).
- [58] Z. J. Zawistowski, *J. Tech. Phys.* **47**, No 2, (2006)(w druku).

## Część III

# Publikacje stanowiące rozprawę habilitacyjną