

XXVI MIĘDZYNARODOWA SZKOŁA

Komputerowego Wspomagania Projektowania,
Wytwarzania i Eksploatacji

Jurata 2022



Organizator:

Wojskowa Akademia Techniczna

**Wydział Mechatroniki, Uzbrojenia
i Lotnictwa**

Adres Biura Szkoły:

Wojskowa Akademia Techniczna

Wydział Mechatroniki, Uzbrojenia i Lotnictwa

Centrum Szkolenia CAD

ul. Gen. Sylwestra Kaliskiego 2

bud. 100, pok. 331

00-908 Warszawa 49

tel./fax: 261 839 777

tel.: 261 837 845

e-mail: atc@wat.edu.pl

MEKTOWANIA,

376 Warszawa

Ocena stateczności nanostruktur jednowymiarowych

The assessment of the stability of one-dimensional nanostructures

Aleksandra MANECKA-PADAŻ¹, Ryszard PĘCHERSKI²

W pracy przedstawiono ocenę stateczności sprężystej pryzmatycznego pręta. Omówiono zastosowanie tego nieliniowego zagadnienia w odniesieniu do nanostruktur jednowymiarowych. Wykonano symulację numeryczną postbucklingowych stanów ściskanych struktur opierając się na teorii Eulera-Bernoulli'ego. Wizualizację elastyk uzyskano za pomocą programu Wolfram Mathematica.

SŁOWA KLUCZOWE: wyboczenie, nieliniowa teoria sprężystości, nanostruktury jednowymiarowe

In this paper, the postbuckling behavior of one-dimensional nanostructures is conducted in the framework of the nonlinear theory. A numerical simulation of the considered problem based on Euler-Bernoulli beam theory were performed using Wolfram Mathematica software.

KEYWORDS: buckling, nonlinear elasticity theory, one-dimensional nanostructures

1. WPROWADZENIE

Zagadnienie stateczności stanowi ważny element obliczeń wytrzymałościowych smukłych ściskanych elementów konstrukcyjnych. Zjawisko utraty stateczności spowodowane jest zmianą stanu równowagi danego elementu, która powstaje w wyniku przekroczenia tzw. siły krytycznej. Problemem tym zajmował się L. Euler w swojej publikacji „Sur la force des colonnes” [1], wyprowadzając wzór na siłę krytyczną powodującą utratę stateczności. Wyboczenie jest zjawiskiem nagłym i niebezpiecznym, dlatego w praktyce inżynierskiej kluczowe jest określenie wartości siły krytycznej w punkcie bifurkacji (punkt utraty stateczności). Prawidłowa praca konstrukcji możliwa jest poniżej wartości siły krytycznej. Badanie zjawiska utraty stateczności w przypadku materiałów o wysokiej sprężystości stwarza możliwość obserwacji stanów po przekroczeniu wartości siły krytycznej, czyli analizy krzywych utworzonych przez zdeformowany element (tzw. elastyki). Ze względu na kinematykę procesu problemy stateczności dzielą się na dwie grupy: płaską oraz przestrzenną. W tej pracy przedstawiony przypadek dotyczy płaskiej utraty stateczności, czyli krzywiznę zdeformowanego elementu opisuje krzywa płaska.

Ocena stateczności znajduje zastosowanie w ujęciu wieloskalowym, szczególnie w obszarze badań nad sprężystymi nanostrukturami jednowymiarowymi. Obecnie nietrudno jest uzyskać komercyjnie dostępne próbki nanomateriałów wytwarzane różnymi technologiami. Nanomateriały stanowią podstawę konstrukcyjną w procesie miniaturyzacji urządzeń elektronicznych (NEMS), ze względu na bardzo dobre właściwości elektryczne, optyczne oraz magnetyczne. Rosnące zapotrzebowanie na obiekty w nanoskali stwarza konieczność badań nad tymi strukturami, szczególnie dzięki eksperymentalnemu potwierdzeniu możliwości stosowania znanych teorii wytrzymałości do opisu zachowania nanostruktur. Ważnym etapem planowania eksperymentu jest jego wcześniejsza symulacja numeryczna, mająca na celu optymalizację przebiegu badań.

¹ Mgr inż. Aleksandra Manecka-Padaż (amanecka@ippt.pan.pl), Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

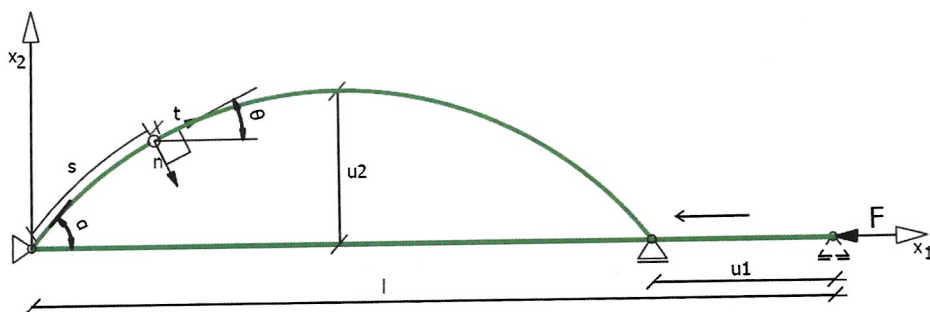
² Prof. dr hab. inż. Ryszard Pęcherski (rpecher@ippt.pan.pl), Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

W pracy przedstawiono wykorzystanie oprogramowania Wolfram Mathematica do wizualizacji zjawiska utraty stateczności sprężystej smukłego elementu, posługując się nieliniową teorią sprężystości.

2. CZĘŚĆ TEORETYCZNA

2.1. Nieliniowa teoria sprężystości

Rozważany przypadek dotyczy smukłego, pryzmatycznego pręta o długości l oraz o stałym przekroju kołowym o średnicy d . Rysunek 1 ilustruje zmianę krzywizny pręta pod wpływem siły ścisnącej F . Wraz z przemieszczeniem końca pręta u_1 wzrasta strzałka ugięcia u_2 .



Rys. 1 Schemat ściskanego pręta w płaszczyźnie x_1 - x_2 .

Model podstawowy opisujący utratę stateczności smukłego, pryzmatycznego pręta oparty jest na nieliniowym równaniu różniczkowym Eulera-Bernoulli'ego [2]:

$$\theta''(s) + \lambda^2 \sin\theta(s) = 0. \quad (1)$$

gdzie:

s - współrzędna krzywoliniowa rozważanego punktu leżącego na osi pręta,

$\theta(s)$ -kąt nachylenia stycznej do krzywizny w rozważanym punkcie leżącym na osi pręta,

$$\lambda^2 = \frac{F}{B}.$$

W rozważanym przypadku dąży się do rozwiązywania problemów ugięcia prętów przy dużych deformacjach, dlatego nie stosuje się założenia małych kątów $\theta(s)$ tak, jak w przypadku teorii liniowej używanej do określenia wartości siły krytycznej. Przyjęto następujące warunki brzegowe:

$$\theta'(0) = \theta'(l) = 0 \quad (2)$$

$$\theta(0) = \alpha, \quad (3)$$

gdzie $\alpha \in (0, \pi)$.

Aby rozwiązać równanie (1) należy dokonać zamiany zmiennych oraz następnie skorzystać z własności eliptycznych funkcji Jacobiego. Rozwiązaniem jest układ współrzędnych określających kształt elastyki w dowolnym punkcie x leżącym na osi pręta, zgodnie z [2].

$$x_1 = -s + \frac{2}{\lambda} \{E[am(s\lambda + K(k), k), k] - E[am(K(k), k), k]\}, \quad (4)$$

$$x_2 = -\frac{2k}{\lambda} cn(s\lambda + K(k), k), \quad (5)$$

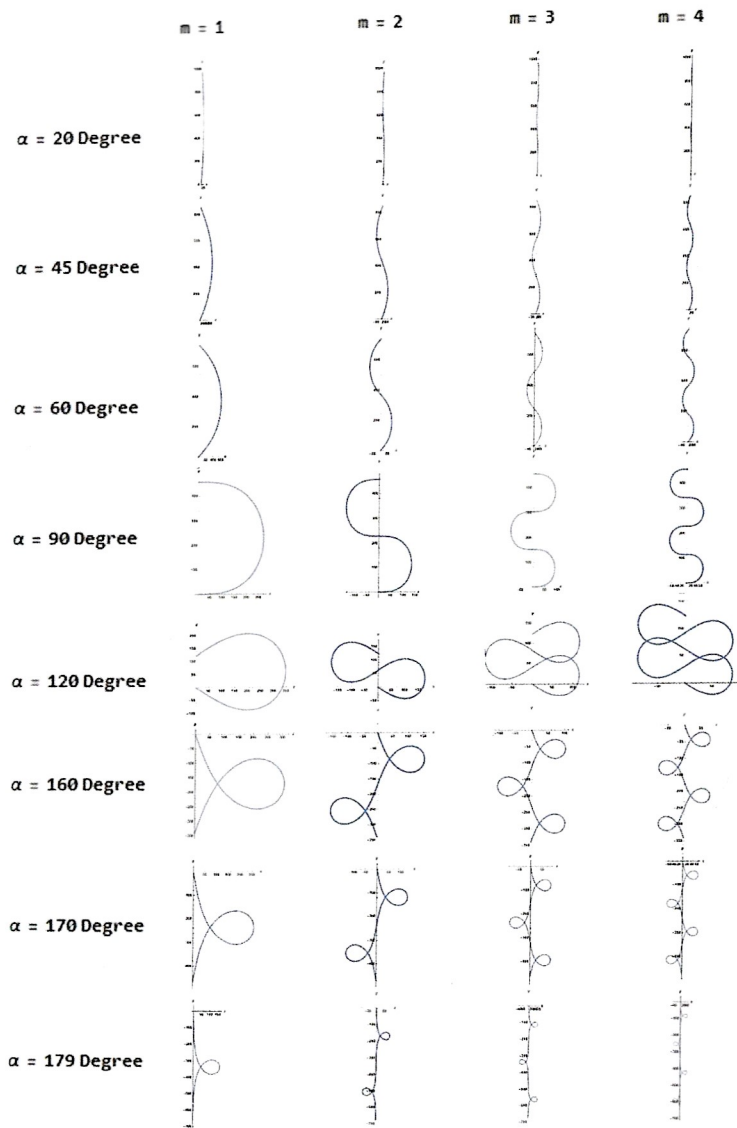
gdzie m jest liczbą całkowitą, zwaną modem bifurkacji oraz $m = 0, \mp 1, \mp 2 \dots$

2.2. Symulacja postaci elastyk

Korzystając z równań 4 oraz 5 otrzymuje się elastykę dla założonych wartości modu bifurkacji m , kąta początkowego α oraz dla konkretnych wartości geometrycznych pręta. Do symulacji przyjęto $l=1000$ nm, $d=70$ nm. Wartość modułu Younga założono zgodnie z [3], $E=76$ GPa. Rysunek 2 przedstawia postać elastyk dla wybranych wartości kąta początkowego α oraz dla różnych wartości modów bifurkacji. Krzywizna pręta zmienia się wraz ze wzrostem siły, a co za tym idzie kąta początkowego α , zwiększając przesunięcie końca pręta w ruchomej podporze u_1 (Rys. 1). Przy wartości kąta $\alpha=90^\circ$ koniec pręta dochodzi do miejsca zamocowania drugiego końca, osiągając największą wartość strzałki ugięcia. Po przekroczeniu tej wartości koniec pręta przesuwa się w stronę przeciwną do kierunku osi x_1 aż do przesunięcia o wartości $2l$. Idealnie sprężysta, niezminiająca swojej długości struktura po osiągnięciu stanu krytycznego przybiera formę „pętli”, zmieniając pozycję w układzie referencyjnym. Po przekroczeniu 180° koniec pręta zaczyna przesuwać się zgodnie z kierunkiem osi x_1 . Na Rys. 2 można zaobserwować cztery przykładowe wartości modu bifurkacji. Ilość punktów przegięcia w pręcie (zwanymi punktami bifurkacji, punktami przejścia) jest równoznaczna z liczbą modu bifurkacji. Im większa wartość modu bifurkacji, tym mniejsza wartość strzałki ugięcia.

3. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono zastosowanie teorii Eulera-Bernoulli'ego do oceny stateczności pryzmatycznych prętów oraz wizualizacji stanów po przekroczeniu siły krytycznej. Nieliniowa teoria sprężystości znajduje zastosowanie głównie w materiałach bardzo sprężystych, dlatego jednowymiarowe nanostruktury stanowią jej dobrą ilustrację. Planując badania eksperymentalne, można posłużyć się przewidywanymi postaciami elastyk oraz wartościami siły krytycznej, a następnie porównywać odpowiedź materiału w nanoskali oraz w makroskali. Następnym krokiem w ocenie stateczności nanostruktur byłoby uzupełnienie teorii Eulera o wpływy efektów nielokalnych występujących w nanoskali.



Rys. 2. Postać elastyk w zależności od wartości kąta początkowego oraz modu bifurkacji.

LITERATURA

1. Timoshenko S.P.: *Historia wytrzymałości materiałów*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1966.
2. Bigoni D.: *Nonlinear Solid Mechanics. Bifurcation Theory and Material Instability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
3. Thongyothee C., Chucheeepsakul S.: Postbuckling behaviors of nanorods including the effects of nonlocal elasticity theory and surface stress, *Journal of Applied Physics*, vol. 114 2013, 243507-01 - 243507-7.