

prof. dr hab. inż. WŁODZIMIERZ SOSNOWSKI<sup>1,2</sup>, dr TOMASZ BEDNAREK<sup>1,2</sup>,  
dr hab. PIOTR KOWALCZYK<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, 02-106 Warszawa, ul. Pawińskiego 5b

<sup>2</sup>Uniwersytet Kazimierza Wielkiego, Bydgoszcz, ul. Chodkiewicza 30, [bednarek@ippt.gov.pl](mailto:bednarek@ippt.gov.pl)

## **Badanie stabilności i jednoznaczności algorytmów teorii plastycznego płynięcia stosowanych w symulacji tłoczenia blach**

*Stability and uniqueness of flow approach algorithms in sheet metal forming simulations*

### **Streszczenie**

W niniejszej pracy rozważamy problem zbieżności i jednoznaczności rozwiązania nieliniowego problemu symulacji procesów tłoczenia blach modelowanych z wykorzystaniem sztywno-lepko plastycznego materiału. Do symulacji wykorzystujemy programy MFP2D i MFP3D sprawdzone w kilku zastosowaniach przemysłowych [5,6,10]. Zaletą obydwu kodów numerycznych jest względna prostota algorytmu, a co za tym idzie możliwość dokładnej analizy wrażliwości i optymalizacji procesu tłoczenia blach. Niestety obydwa programy mają poważną wadę związaną z przyjętym modelem materiału. W trakcie obliczeń obserwujemy niestabilność wywołaną stosunkowo wysokim wskaźnikiem uwarunkowania układu równań. Dodatkowo przyjęty model kontaktu zawierający funkcję kary pogarsza wskaźnik uwarunkowania macierzy sztywności. Celem badań jest między innymi poprawienie tego wskaźnika.

### **Abstract**

*The objective of this paper is to improve stability conditions, uniqueness and convergence of the flow approach algorithm with viscoplastic and plastic material models. Two numerical codes, MFP2D and MFP3D, were used previously for practical industrial solutions. Relative simplicity of both codes allowed to include "exact" sensitivity calculations by direct differentiation method. This make possible very effective optimization of the whole sheet metal forming process simulation. One of important drawbacks of viscous shell approach is lack of stability and convergence in situations when the condition number of resulting system of equations is relatively high. The reasons include the lack of elasticity part*

*in constitutive material law and asymptotic character of viscosity – effective plastic strain rate relationship. Approximate character of the contact modelling (penalty approach) also affects conditioning of the system. This drawback can be overcome by some measures proposed in this paper.*

**Słowa kluczowe:** tłoczenie blach, teoria plastycznego płynięcia, wskaźnik uwarunkowania macierzy

**Key words:** sheet drawing, flow approach, matrix condition number.

### **Wstęp**

Celem pracy jest poprawa działania stosowanych w tłoczeniach blach kodów numerycznych MFP2D i MFP3D opartych na teorii plastycznego płynięcia (tzw. flow approach). Warunkiem uzyskiwania stabilnych rozwiązań w obydwu programach jest dogłębne zbadanie własności algorytmu dla dwu praw konstytutywnych: dla materiału sztywno–lepko–plastycznego oraz sztywno–plastycznego.

W dotychczasowych badaniach oceniono wpływ ruchów sztywnych tych elementów blachy, które nie spełniają warunku plastyczności (co jest normalne dla części obszaru, szczególnie na początku procesu deformacji), na zbieżność uzyskiwanych rozwiązań. Szczególną uwagę zwrócono na asymptotyczny charakter obydwu praw. Asymptotyczność sprawia, że pojawiają się niestabilności zarówno dla bardzo dużych jak i dla bardzo małych lepkości.

Opracowano procedury liczenia odpowiednich norm wektorów prawych stron równań równowagi i oceniono zbieżność rozwiązań porównując wyniki dla różnych norm. Wprowadzono do programu algorytmy obliczania norm macierzy sztywności. Zbadano zmienność tych norm i obliczonego przy ich pomocy wskaźnika uwarunkowania dla prostych przykładów testowych tłoczenia blach.

Efektom końcowym powinna być poprawa zbieżności rozwiązań nieliniowych, ich dokładności i jednoznaczności.

### **Podstawowy układ równań teorii plastycznego płynięcia**

Równania metody elementów skończonych dla zdyskretyzowanej powłoki lepkoplastycznej, definiujące związki wektorów prędkości  $\dot{\mathbf{u}}$ , prędkości węzłowych  $\dot{\mathbf{a}}$ , prędkości odkształceń  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  oraz naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$ , można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \boldsymbol{\varphi} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}(\bar{G}, \bar{\nu}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E}(\bar{G}, \bar{\nu}) \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}}\end{aligned}\tag{1}$$

w równaniach (1)  $\boldsymbol{\phi}$  jest macierzą funkcji kształtu. Macierz  $\mathbf{B}$  określa zależność pomiędzy wektorami prędkości odkształceń i prędkości węzłowych. Jej wyrazy są pochodnymi funkcji kształtu po współrzędnych  $x, y, z$  stałego, prostokątnego układu kartezjańskiego. Natomiast  $\mathbf{E}(\bar{G}, \bar{\nu})$  zależy od przyjętego modelu powłoki lepkiej (membranowego czy zgięciowego). W prostszym przypadku modelu membranowego mamy [6]

$$\mathbf{E}(\bar{G}, \bar{\nu}) = \frac{2\bar{G}h}{1-\bar{\nu}} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\nu}}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\bar{G}$  i  $\bar{\nu}$  są zastępczymi parametrami materiałowymi odgrywającymi w teorii plastycznego płynięcia materiału sztywno-plastycznego tę samą rolę, którą w sprężystości spełniają moduł ścinania oraz współczynnik Poissona,  $h$  jest grubością powłoki. [1,2,3,4]

Równanie równowagi przybiera standardową postać

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{Q} \quad (3)$$

$\mathbf{K}$  i  $\mathbf{Q}$  oznaczają odpowiednio sieczną macierz sztywności oraz wektor sił zewnętrznych powłoki lepkiej.

Ze względu na charakter parametrów materiałowych  $\bar{G}$  i  $\bar{\nu}$  układ równań (3) jest nieliniowy. Może być rozwiązany za pomocą technik przyrostowo-iteracyjnych. Dokładna postać stycznej macierzy sztywności jest dla ogólnych przypadków uwzględniających np. porowatość bardzo skomplikowana i dlatego warto stosować sieczne lub quasi-sieczne operatory sztywności, [2]. Najprostszy algorytm rozwiązania tego układu równań może być oparty na schemacie iteracyjnym, w którym dla  $i$ -tej iteracji mamy następujące związki [5]

$$\Delta\dot{\mathbf{a}}^{i+1} = -[\mathbf{K}^i]^{-1} \mathbf{R}^i \quad (4a)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{i+1} = \dot{\mathbf{a}}^i + \Delta\dot{\mathbf{a}}^{i+1} \quad (4b)$$

— sprawdź zbieżność

W powyższym schemacie obliczeń  $\mathbf{R}^i$  oznacza wektor sił rezydualnych obliczany ze wzoru

$$\mathbf{R}^i = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^i d\Omega - \mathbf{Q}^i \quad (5)$$

Po wyznaczeniu z równania (4b) zbieżnego pola prędkości uaktualniamy geometrię deformującej się blachy, warunki brzegowe i przystępujemy do następnego kroku obliczeń.

Tego typu algorytm pozwala na łatwe uwzględnienie warunków kontaktu i tarcia.

## Zbieżność obliczeń algorytmu wykorzystującego teorię plastycznego płynięcia

Zbieżność rozwiązań nieliniowych jest zwykle kontrolowana za pomocą kryteriów opartych na normach sił rezydualnych. W pracy [6] podjęto próbę realizacji kontroli zbieżności opartej na normach prędkości. Na rys. 1 pokazano wyniki analizy zbieżności przeprowadzonej dla przykładu tłoczenia powłoki osiowosymetrycznej. Dla danego kroku czasowego widzimy, że po mniej więcej trzynastu iteracjach, gdzie numer iteracji odpowiada kolejnym punktom na krzywej, norma prędkości prawie się nie zmienia (można ją określić jako liczbę z przedziału (1.305, 1.31), podczas gdy zmiany normy sił rezydualnych są nadal duże. Należy zwrócić uwagę na to, że na osi poziomej trzeba było zastosować skalę logarytmiczną. Obydwie normy, prędkości i sił są liczone jako pierwiastek z sumy kwadratów odpowiednich składowych. Zbieżność kontrolowana normami prędkości jest szybsza niż w przypadku norm opartych na siłach rezydualnych, ponieważ fakt wchodzenia i wychodzenia tych samych węzłów w kontakt powoduje duże oscylacje naprężeń, a co za tym idzie brak stabilnych wartości sił rezydualnych.

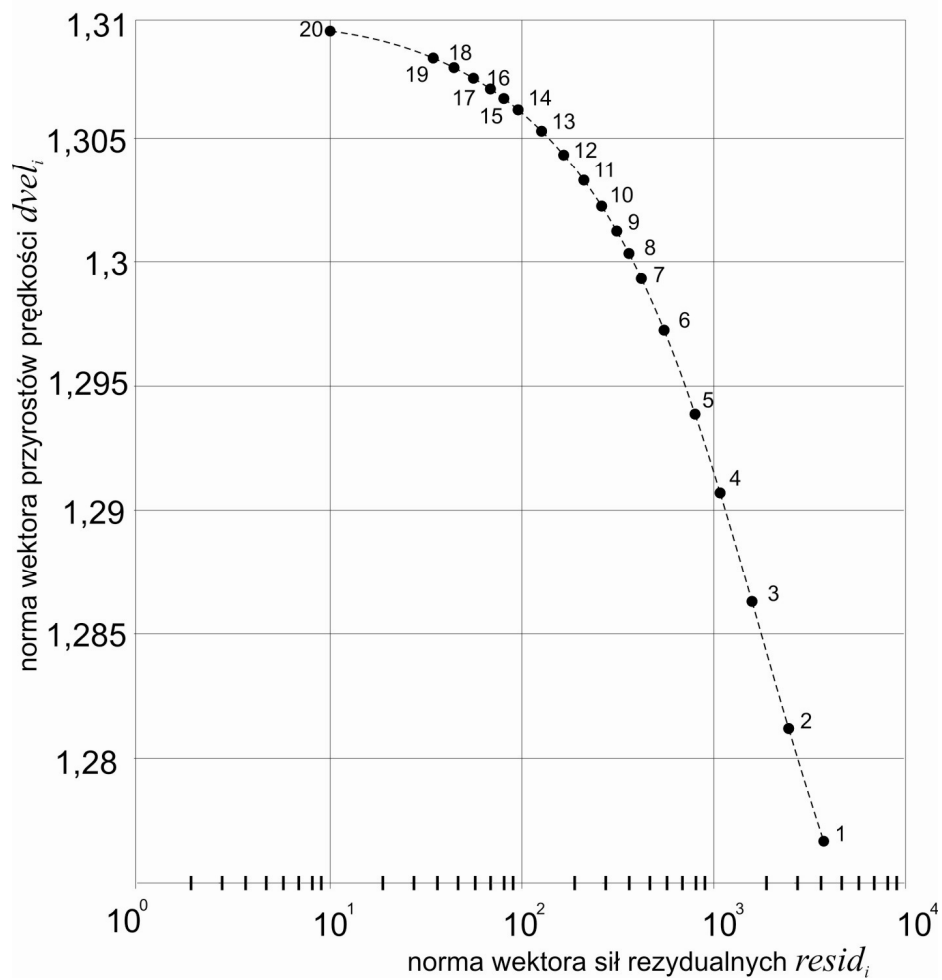
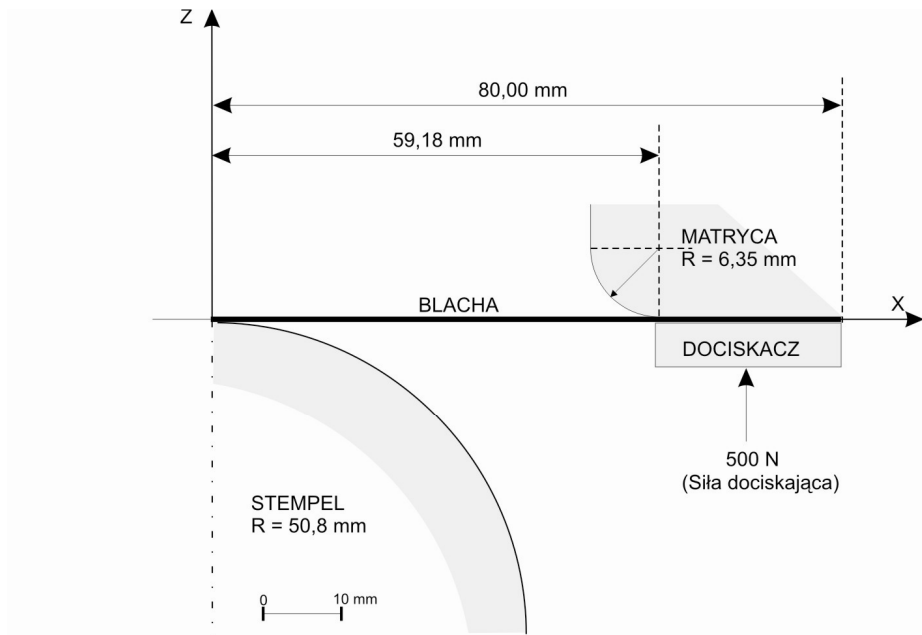
Omawiane efekty wynikają również z charakteru zależności modułu ścinania (lepkości) od prędkości odkształceń danej wzorem

$$\bar{G} = \frac{\sigma_0}{3\dot{\bar{\epsilon}}} \quad (6)$$

gdzie  $\sigma_0$  jest granicą plastyczności, a  $\dot{\bar{\epsilon}}$  jest skalarna miarą tensora prędkości odkształcenia. Zauważmy, że w przypadku deformacji związanych z obciążaniem ciała prawie sztywnego  $\dot{\bar{\epsilon}} \approx 0$  zaś wartość  $\bar{G}$  rośnie asymptotycznie aż do nieskończoności. Aby uniknąć osobliwości towarzyszącej deformacjom w granicznym przypadku ciała sztywnego trzeba stosować obciążenie  $\bar{G}$ . Oznacza to innymi słowami konieczność wprowadzenia do algorytmu pewnej określonej drogą eksperymentów numerycznych granicznej wielkości  $\bar{G}$ .

W sytuacjach gdy prędkości odkształceń są niewielkie,  $\bar{G}$  jest na ogół bardzo wrażliwe na nawet niewielkie zmiany pola prędkości. Wywołuje to zmiany pola naprężeń, które zaburzają zbieżność sił rezydualnych.

Celem doboru optymalnych parametrów zbieżności przeprowadzono w pracy [6] szereg testów zbieżności. Rozpoczęto od osiowo-symetrycznego testu wzorcowego tłoczenia blachy z brzegiem swobodnie podpartym, zaproponowanego przez Wagonera i opisanego w pracy [7]. Przykład policzono, wybierając trzy tolerancje zbieżności:

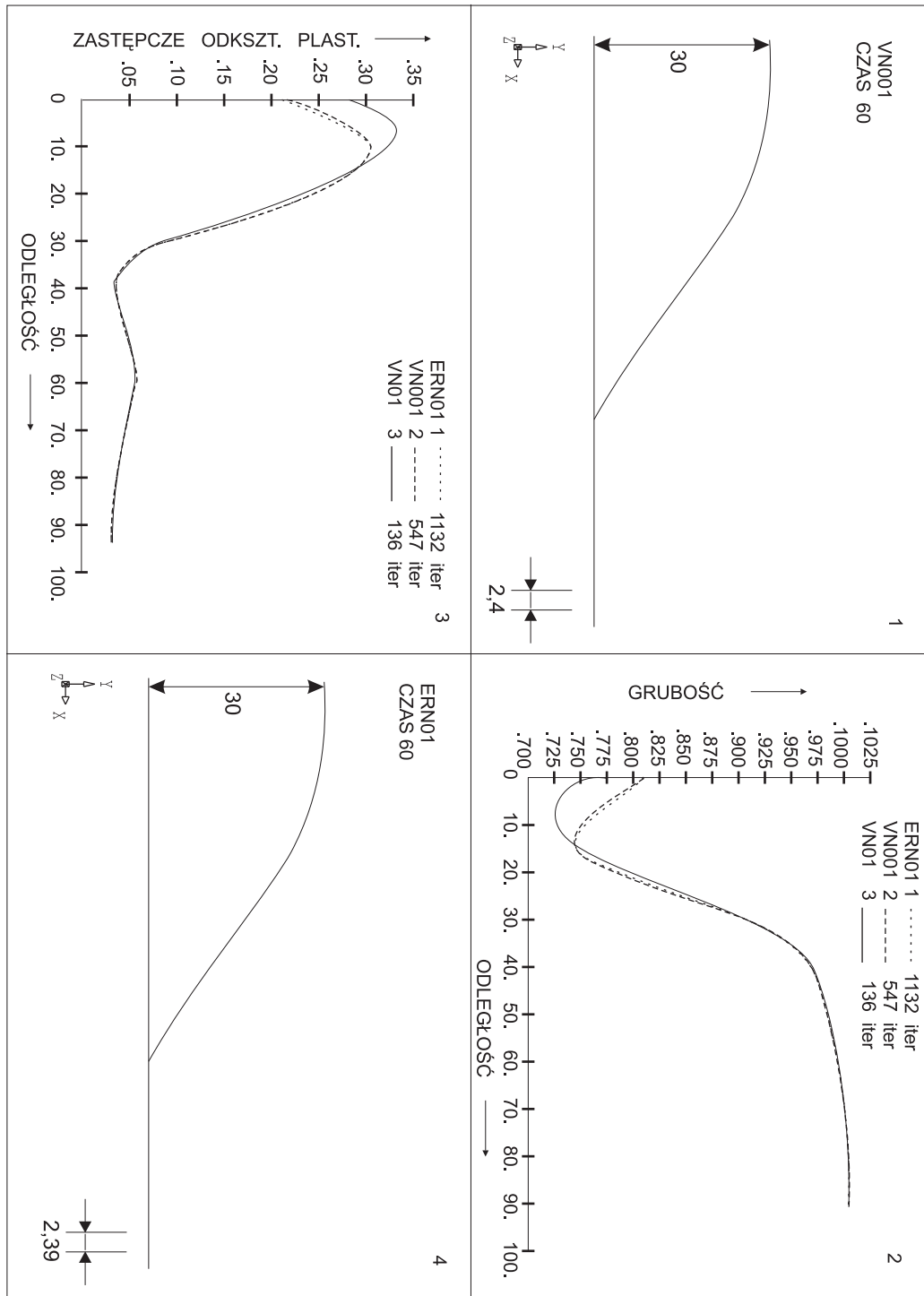


Rys. 1 Normy prędkości i sił rezydualnych. [6]  
 Fig. 1 Norms of velocities and residual forces.[6]

- tolerancja zbieżności oparta na normie prędkości,  $tolerv=0.01$  (VN01),
- tolerancja zbieżności oparta na normie prędkości,  $tolerv=0.001$  (VN001),
- tolerancja zbieżności oparta na normie sił rezydualnych,  $tolerf=0.01$  (ERN01),

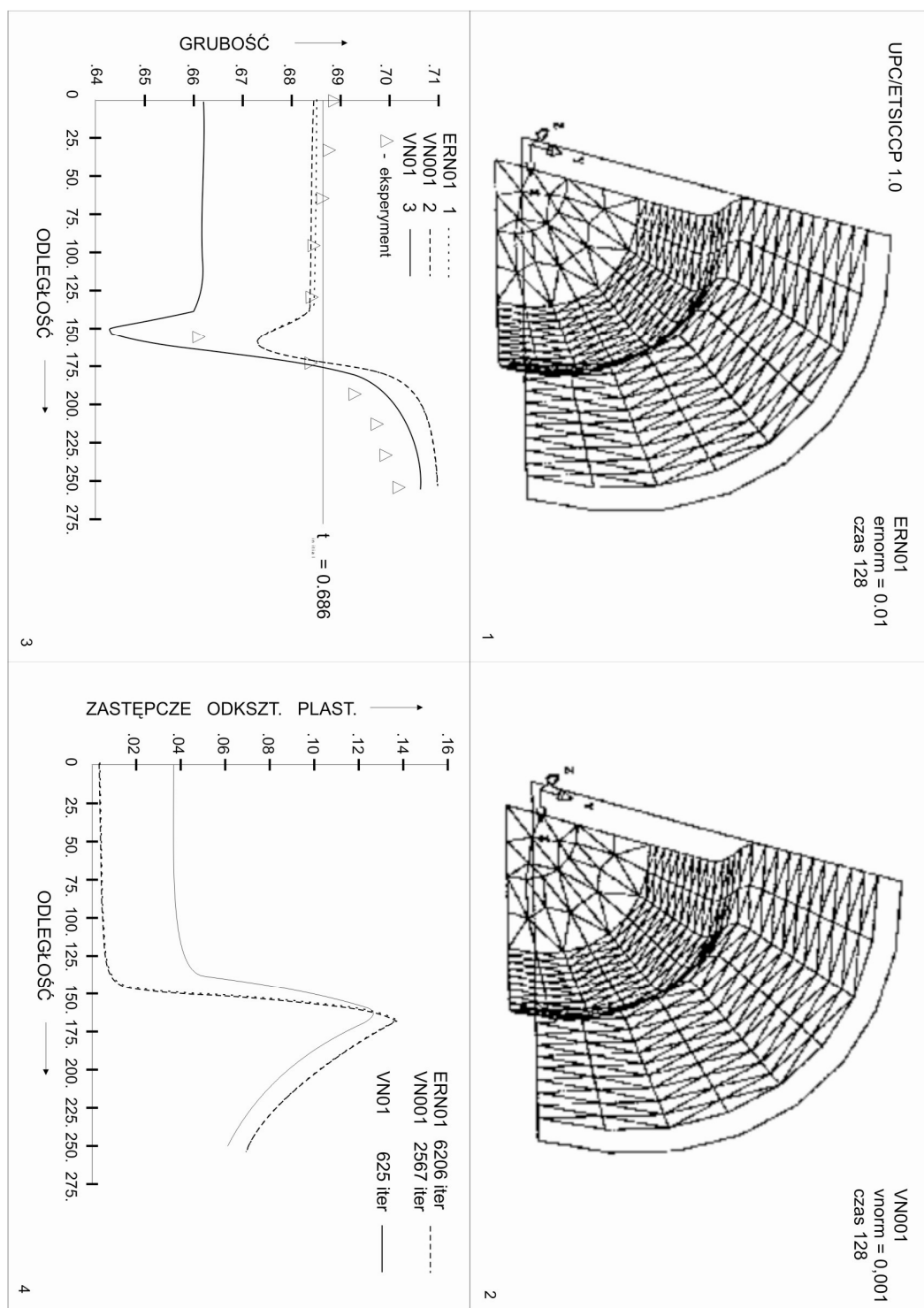
przy czym wartości tolerancji wynoszą:

$$tolerv = \frac{dvel}{vel}, \quad tolerf = \frac{resid}{fwew} \quad (7)$$



Rys. 2 Wyniki symulacji tłoczenia dla próbek osiowosymetrycznej przy różnych tolerancjach (normach) zbieżności. [6]

Fig. 2 Axisymmetrical deep drawing test results for different convergence tolerance norms. [6]



Rys. 3 Wyniki symulacji tłoczenia cylindrycznej próbki trójwymiarowej przy różnych tolerancjach (normach) zbieżności. [6]

Fig. 3 Simulation of sheet drawing, 3D specimen. [6]

*dvel*, *vel*, *resid* i *fwew* oznaczają odpowiednio normy wektorów przyrostu prędkości, prędkości, sił rezydualnych i sił wewnętrznych, liczone jako zwykłe średnie normy kwadratowe (normy euklidesowe), czyli pierwiastki z sum kwadratów wszystkich składowych danego wektora, na przykład wektora prędkości.

Posługujemy się przy tym kryterium zbieżności opartym na błędzie względnym. Wartości norm  $dvel$ ,  $vel$ ,  $resid$ ,  $fwew$  określają stan zakończenia danej iteracji zdefiniowany warunkami

$$\frac{dvel_i}{vel_i} \leq tolerv \quad \text{lub} \quad \frac{resid_i}{fwew_i} \leq tolerf \quad (8)$$

$i$  oznacza numer iteracji.

Blachę zamodelowano przy pomocy osiowosymetrycznych elementów membranowych. Na rys. 2 pokazano typowe rozkłady grubości i zastępczego odkształcenia plastycznego w konfiguracji zdeformowanej, uzyskane przy pomocy wspomnianych wyżej trzech rodzajów tolerancji zbieżności.

Jeśli rozpatrzmy dwie różne tolerancje:  $tolerv=0.001$  i  $tolerf=0.01$ , możemy zauważyć, że rozkłady grubości i zastępczego odkształcenia plastycznego różnią się tylko nieznacznie. Liczba iteracji jest jednak w przypadku tolerancji opartej na normach prędkości  $tolerv=0.001$ , znacznie mniejsza. Podobne obliczenia dla modelu membranowego blachy tłoczonyj jako 3-wymiarowe próbki cylindryczne pokazano na rys. 3. Możemy ponownie przekonać się o prawie zupełnym braku różnic rozkładów grubości, zastępczego odkształcenia plastycznego oraz wielkości przemieszczeń krawędzi blachy pod dociskaczem dla obydwu tolerancji zbieżności,  $tolerv=0.001$  i  $tolerf=0.01$ .

Fakt lepszej zbieżności jest udokumentowany empirycznie – metodą liczenia tych samych przykładów i porównywania wyników. Wyniki testów zamieszczono na rys. 2 oraz rys. 3.

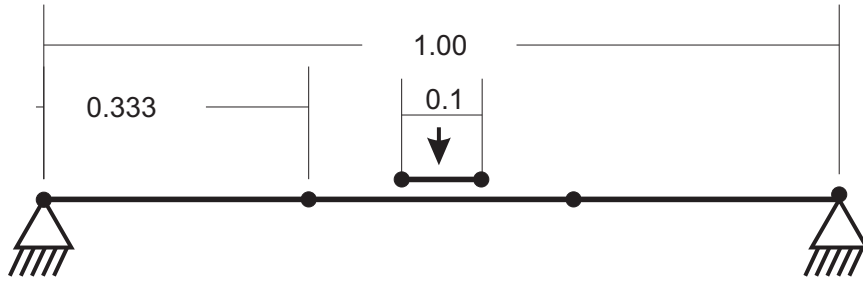
Liczbę niezbędnych iteracji można jeszcze bardziej zmniejszyć, zastępując normę zbieżności opartą na siłach rezydualnych normą opartą na prędkościach w przypadku symulacji bazującej na pełnym trójwymiarowym modelu procesu. W przypadku najprostszego modelu membranowego wytłaczanej powłoki oszczędności mogą się sięgać ~19%.

### Wskaźnik uwarunkowania macierzy

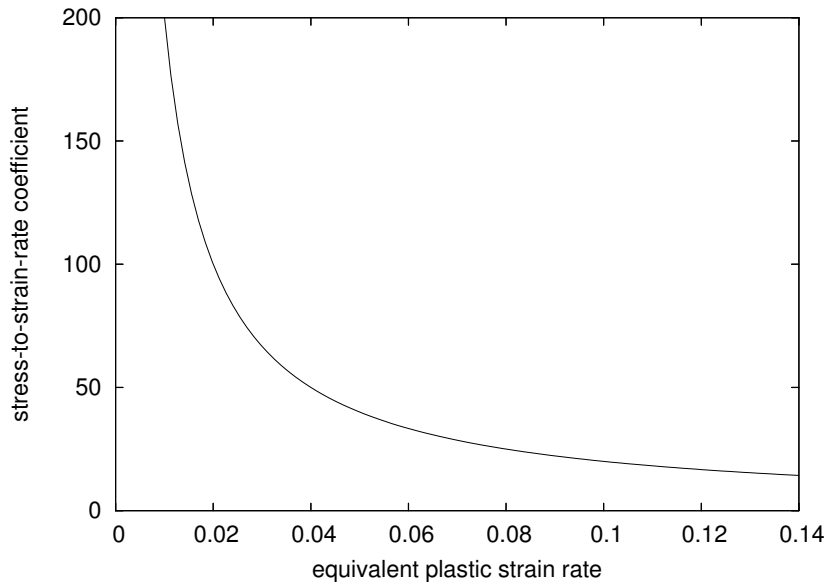
Na stabilność i zbieżność iteracyjnego algorytmu (4) poszukiwania rozwiązania  $\dot{\mathbf{a}}$  ma wpływ dokładność każdorazowego rozwiązania układu równań (4a), czyli poprawki  $\Delta \dot{\mathbf{a}}^{i+1}$ . Błąd tego rozwiązania jest uzależniony m.in. od wskaźnika uwarunkowania macierzy współczynników układu, czyli macierzy sztywności  $\mathbf{K}^i$  [8]. Wskaźnik ten wyraża się wzorem (pomijamy indeks  $i$ )

$$\kappa(\mathbf{K}) = \|\mathbf{K}\| \cdot \|\mathbf{K}^{-1}\| \quad (9)$$





Rys. 4 Model dwuwymiarowy tłoczenia blachy.  
Fig. 4 Numerical example, 2D sheet drawing.



Rys. 5 Zależność pomiędzy prędkością odkształcenia a lepkością materiału.  
Fig. 5 Dependency between plastic strain rate and material viscosity.

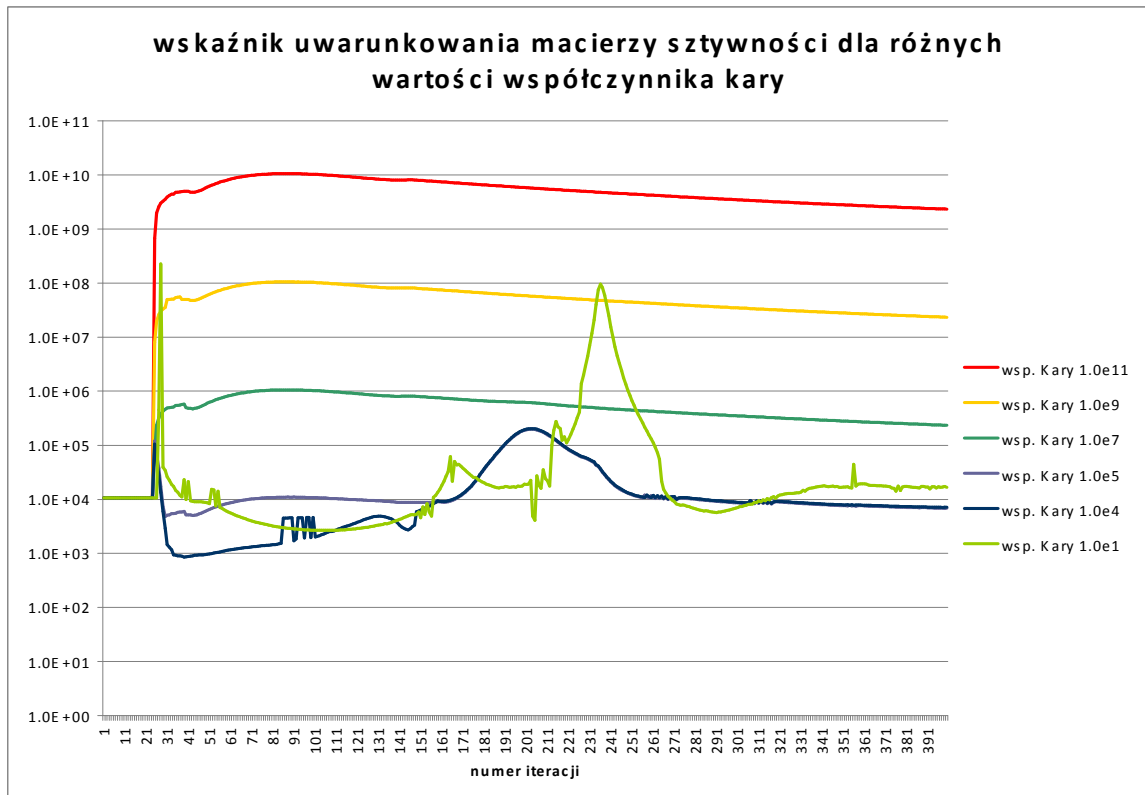
gdzie operator  $\|\bullet\|$  oznacza jedną ze standardowych norm macierzy, np.  $\|\mathbf{K}\|_1 = \max_{1 \leq i, j \leq n} |K_{ij}|$ ,  $\|\mathbf{K}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |K_{ij}|$ . W naszych rozważaniach wykorzystamy tzw. normę spektralną macierzy, która w przypadku macierzy symetrycznych równa jest maksymalnej wartości modułu wartości własnych macierzy, tzn.

$$\|\mathbf{K}\| = \|\mathbf{K}\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(\mathbf{K})|. \quad (10)$$

Wysoka wartość wskaźnika uwarunkowania oznacza większe błędy numeryczne rozwiązania, zatem powinno się dążyć do takiego formułowania modelu matematycznego aby wskaźnik  $\kappa$  był jak najmniejszy.

Dokonano analizy wyżej zdefiniowanego wskaźnika uwarunkowania (tzw. spektralnej liczby uwarunkowania) macierzy  $\mathbf{K}^i$  w kolejnych krokach iteracyjnych dla prostego dwuwymiarowego modelu tłoczenia blachy przedstawionego na rys. 4. Model blachy jest podzielony na 3 elementy skończone. W każdym węźle założone zostały trzy stopnie swobody: dwa translacyjne oraz jeden rotacyjny. Założono sztywno-lepkoplastyczny model

materiału bez wzmocnienia. Wartość  $\bar{G}$  obliczana jest ze wzoru (6) oraz przyjęto  $\bar{\nu} = 0.5$ . Zależność parametru  $\bar{G}$  od prędkości odkształcenia przedstawiono na rys. 5.



Rys. 6 Wpływ wartości współczynnika kary na uwarunkowanie macierzy sztywności.  
 Fig. 6 Influence of the penalty function value on stiffness matrix condition.

Zagadnienie kontaktu zostało rozwiązane w zadaniu poprzez wykorzystanie funkcji kary. Metoda ta nie wymaga zwiększenia liczby stopni swobody układu. Bez względu na liczbę ograniczeń rozmiar zadania pozostaje taki sam. Podstawowy układ równań (3) zostaje zmodyfikowany do postaci

$$(K_{ij} + \phi \delta_{ki}^T \delta_{ki}) a_j = Q_i + \phi \delta_{ki} \hat{a}_k \quad (11)$$

gdzie  $\phi$  jest współczynnikiem kary, natomiast  $\hat{a}_k$  jest założonym ograniczeniem na  $k$ -ty stopień swobody.

Poważne trudności wynikają jednak z konieczności określenia współczynnika kary  $\phi$ . Zbyt mała wartość stałej  $\phi$  zmniejsza dokładność spełniania ograniczeń. W skrajnych przypadkach warunki kontaktu mogą w ogóle nie być spełnione. Zbyt duża wartość  $\phi$  powoduje złe uwarunkowanie macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ .

Zbadano wpływ współczynnika kary  $\phi$  na wskaźnik uwarunkowania macierzy sztywności. Wykres wartości wskaźnika uwarunkowania macierzy  $\mathbf{K}$  w kolejnych krokach

iteracyjnych rozwiązania zadania tłoczenia blachy oraz dla różnych wartości współczynnika kary  $\phi$  przedstawiono na rys. 6.

Można zauważyć (rys 6), iż zwiększenie wartości współczynnika kary powoduje znaczny wzrost wskaźnika uwarunkowania macierzy sztywności. Optymalna wartość współczynnika kary  $\phi \approx 10^4$  nie pogarsza znacząco uwarunkowania macierzy sztywności zapewniając jednocześnie dobre uwzględnienie więzów. Zbyt mała wartość współczynnika kary powoduje błędy w uwzględnianiu warunków kontaktu skutkujące niestabilnością rozwiązania podstawowego układu równań i w konsekwencji znacznym pogorszeniem wskaźnika uwarunkowania macierzy sztywności.

Jednym ze sposobów poprawy uwarunkowania macierzy jest jej przeskalowanie [9]. Uzyskanie optymalnie uwarunkowanej macierzy sztywności w praktyce jest bardzo trudne. Wskaźnik uwarunkowania macierzy można polepszyć wykonując operacje elementarne na globalnym układzie równań. Wyniki takiej analizy przedstawione zostaną w czasie konferencji.

### Literatura

- [1] Onate E., Agelet de Saracibar C.; Analysis of sheet metal forming problems using a selective bending-membrane formulations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 30, 1990r, s. 1577-1593.
- [2] Onate E., Agelet de Saracibar C.; Numerical modelling of sheet metal forming problems in P. Hartley et al. (Eds.), *Numerical Modelling of Material Deformation Process*, Springer-Verlag, 1992r.
- [3] Onate E., Kleiber M., Agelet de Saracibar C.; Plastic and viscoplastic flow of void containing metals: Applications to axisymmetric sheet forming problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 25, 1988, s. 225-251.
- [4] Onate E., Zienkiewicz O.C.; A viscous shell formulation for the analysis of thin sheet metal forming, *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 25, 1983, s. 305-335
- [5] Sosnowski W.; *Symulacja numeryczna, analiza wrażliwości i optymalizacji nieliniowych procesów deformacji konstrukcji*, Wydawnictwo AB, Bydgoszcz, 2001.
- [6] Sosnowski W.; *Finite element simulation of industrial sheet metal forming processes*, Prace IPPT nr 17, Warszawa, 1995.
- [7] Hora P., Krapoth A.; *FE-Simulation of 3D Sheet Metal Forming processes in the Automotive Industry*, VDI Benchmark, Institut fur Umformtechnik ETH-2, Zurich, 1991.
- [8] Kincaid D., Cheney W. *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006.
- [9] Kleiber M.; *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*, PWN, 1989.

[10] Sosnowski W., Onate E., Agelet de Saracibar C.; Comparative study on sheet metal forming processes by numerical modelling and experiment, J. Materials Processing Technology, vol. 34, 1992, s. 109-116.

**Uwaga końcowa: Praca naukowa współfinansowana ze środków Europejskiego Funduszu  
Rozwoju Regionalnego w ramach Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka,  
nr projektu POIG.01.03.01-14-209/09**