

## ZASTOSOWANIE WEWNĘTRZNEGO ODBICIA POD KĄTEM BREWSTERA DO ROZDZIELENIA NAPRĘŻEŃ W ELASTOOPTYCE

RYSZARD WOJNAR

IPPT PAN  
Zakład Teorii Konstrukcji

### 1. Wstęp

Obserwacja zjawiska elastoptycznego wymaga poddania światła dwukrotnemu działaniu filtra polaryzującego: przed i po przejściu przez dany ośrodek elastoptyczny [1]. Działanie pierwsze nazywamy działaniem polaryzatora, działanie drugie — działaniem analizatora. W pracy niniejszej chcielibyśmy zwrócić uwagę na to, że w pewnych warunkach rolę jednego z filtrów, polaryzatora lub analizatora może spełnić zjawisko wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera. Jak wiadomo, przy odbiciu pod tym kątem następuje całkowita polaryzacja światła [2].

Po przedstawieniu podstaw teoretycznych zjawiska podamy przykład, w którym działanie analizatora zastąpione jest przez odbicie wewnętrzne. Otrzymany w ten sposób obraz elastoptyczny w połączeniu z obrazem otrzymanym przy prześwietleniu normalnym może służyć do rozdzielania naprężeń.

### 2. Efekty polaryzacyjne przy odbiciu promienia świetlnego od płaskorównoległej płytki dwójłomnej

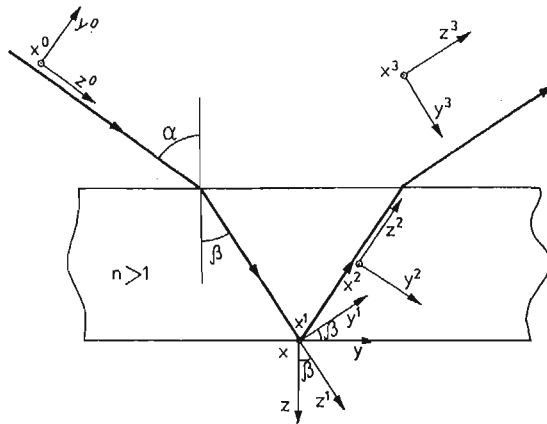
Niech wiązka świetlna pada pod kątem  $\alpha$  na płaskorównoległą płytkę dwójłomną — ośrodek elastoptyczny. Powierzchnię płytki, przez którą światło wchodzi do ośrodka, nazwiemy powierzchnią przednią płytki; drugą powierzchnię płytki nazwiemy tylną. Zajmiemy się tylko tą częścią wiązki, która po załamaniu na powierzchni przedniej, przejściu przez ośrodek, odbiciu od powierzchni tylnej, powtórny przejściu przez ośrodek i załamaniu na powierzchni przedniej opuszcza płytkę po stronie wejściowej. Wybierzmy z tej części wiązki promień świetlny i zbadajmy zmiany stanu jego polaryzacji po przejściu w określony powyżej sposób przez ośrodek elastoptyczny.

Wprowadźmy układ współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ , którego oś  $z$  jest prostopadła do powierzchni płytki elastoptycznej, oś  $x$  zaś jest prostopadła do płaszczyzny padania, tzn. płaszczyzny zawierającej oś  $z$  i rozważany promień świetlny wiązki padającej. Ponadto wprowadźmy układy  $x^i, y^i, z^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , związane z kolejnymi kierunkami biegu rozważanego promienia. Oś  $z^0$  pokrywa się z kierunkiem promienia padającego na płytkę, oś  $z^1$  — promienia załamane, oś  $z^2$  — promienia odbitego wewnątrz

i  $z^3$  — promienia, który opuścił płytkę. Osie  $x^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , są równoległe do osi  $x$  układu  $x, y, z$  (por. rys. 1).

Do przedstawienia składowych wektora elektrycznego na poszczególnych odcinkach drogi promienia będziemy stosowali ten układ współrzędnych, którego oś  $z^i$  pokrywa się z kierunkiem biegu promienia na tym odcinku. Przyjmiemy, że wektor

$$\mathbf{E}^i = \begin{vmatrix} E_x^i \\ E_y^i \end{vmatrix}$$



Rys. 1. Płaszczyzna padania światła na płytkę płaskorównoległą. Kierunki osi  $x$  w poszczególnych układach współrzędnych, a więc  $x^i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  są do siebie równoległe i zarazem prostopadłe do płaszczyzny rysunku, stanowiącej płaszczyznę padania

opisuje składowe wektora elektrycznego w układzie  $x^i, y^i, z^i$  na początku odcinka biegu promienia równoległego do  $z^i$ ; a więc wskaźnik „ $i$ ” jest taki, że wektor  $\mathbf{E}_z^i$  jest prostopadły do osi  $z^i$ . Na przykład wektor

$$\mathbf{E}^1 = \begin{vmatrix} E_x^1 \\ E_y^1 \end{vmatrix}$$

opisuje składowe wektora elektrycznego zaraz po pierwszym załamaniu promienia, w układzie współrzędnych  $x^1, y^1, z^1$ .

Zmiany stanu polaryzacji promienia wskutek załamania i odbicia znajdziemy stosując wzory Fresnela. Celem zwiększenia przejrzystości obliczeń wprowadzimy następujące macierze polaryzacji:

$$P^i = \begin{vmatrix} p_x^i & 0 \\ 0 & p_y^i \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Tutaj

$$\begin{aligned} p_x^1 &= \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, & p_y^1 &= \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \\ p_x^2 &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, & p_x^3 &= -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \\ p_x^3 &= \frac{2 \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, & p_y^3 &= \frac{2 \cos \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (2.3)$$

gdzie  $\beta$  jest kątem załamania, a  $n$  średnim współczynnikiem załamania ośrodka elastooptycznego względem powietrza. Współczynnikiem tym możemy się posługiwać przy opisie zjawiska załamania, ponieważ na ogół wartość dwójłomności wymuszonej jest niewielka. Macierz  $\mathbf{P}^1$  działając na wektor  $\mathbf{E}^0$  przekształca go na wektor  $\mathbf{E}^1$  pola fali świetlnej po pierwszym załamaniu. Tak więc

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^1 \mathbf{E}^0,$$

podobnie

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^2 \mathbf{E}^1, \quad \mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^3 \mathbf{E}^2.$$

- \* Znikanie składowych niediagonalnych macierzy (2.1) zgodnie ze wzorami Fresnela oznacza, że wskutek samego tylko procesu załamania (odbicia) składowa pola elektrycznego prostopadła do płaszczyzny padania nie może zostać przekształcona na składową równoległą do tej płaszczyzny; nie może też zajść zjawisko odwrotne. Macierze  $\mathbf{P}^i$  są szczególnym przypadkiem uogólnionych macierzy Jonesa [3]. Ich granicznym przypadkiem są macierze

$$\mathbf{P}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{P}(\pi/2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

opisujące działanie idealnych filtrów polaryzujących, które przepuszczają odpowiednio składową  $E_x$  lub  $E_y$  pola elektrycznego [4]. W razie odbicia wewnętrznego pod kątem  $\beta$  spełniającym warunek Brewstera zachodzi

$$\operatorname{tg} \beta = 1/n, \quad (2.5)$$

a więc

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}; \quad (2.6)$$

to z kolei zachodzi przy kącie padania promienia na płytkę spełniającym warunek

$$\sin \alpha = n \cdot \sin \beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad (2.7)$$

a więc

$$\operatorname{tg} \alpha = n. \quad (2.8)$$

Korzystając z (2.5) i (2.8) dostajemy

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1-n\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 0, \quad (2.9)$$

co oznacza, zgodnie z (2.2)<sub>4</sub>, że element macierzowy  $p_y^2$  znika:

$$p_y^2 = 0. \quad (2.10)$$

Biorąc pod uwagę, że zgodnie z (2.6 - 2.7)

$$\cos \beta = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}. \quad (2.11)$$

mamy

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad \sin(\alpha + \beta) = 1, \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{2n}{n^2 + 1},$$

a zatem zgodnie z (2.2) macierze  $P^i$  przy założeniu (2.5) są

$$P^{1B} = \begin{vmatrix} p_x^{1B} & 0 \\ 0 & p_y^{1B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{n^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

$$P^{2B} = \begin{vmatrix} p_x^{2B} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n^2-1}{n^2+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P^{3B} = \begin{vmatrix} p_x^{3B} & 0 \\ 0 & p_y^{3B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2n^2}{n^2+1} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}.$$

Zgodnie z własnością odbicia pod kątem Brewstera, macierz (2.12)<sub>2</sub> działając na wektor  $E^1$  pozostawia co najwyżej składową w kierunku osi  $x^2$  różną od zera.

Wpływ dwójłomności płytki płaskorównoległej na stan polaryzacji promienia świetlnego opiszemy, stosując za Jonesem, macierz względnego przesunięcia fazowego o kąt  $\varphi$ :

$$T_0^i(\varphi) = \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

oraz macierz obrotu o kąt  $\Psi$  wokół osi  $z^i$

$$R^i(\psi) = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Iloczyn macierzowy

$$T_\psi^i(\varphi) = R^i(-\psi) T_0^i(\varphi) R^i(\psi), \quad i = 1, 2 \quad (2.15)$$

opisuje działanie płytki dwójłomnej, w której poruszają się w tym samym kierunku  $z^i$ , z różnymi prędkościami, dwa promienie, zwyczajny i nadzwyczajny, o wzajemnie prostopadłych płaszczyznach polaryzacji; przy tym płaszczyzna polaryzacji promienia szybszego tworzy z płaszczyzną  $x^i z^i$  kąt  $\psi$ , między zaś promieniem szybszym a wolniejszym wytwarza się różnica faz  $\varphi$ ;

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l(n_2 - n_1), \quad (2.16)$$

gdzie  $l$  jest długością odcinka przebytego przez promienie w płytce o grubości  $d$

$$l = d/\cos \beta, \quad (2.17)$$

$\lambda$  jest długością fali światła w powietrzu, zaś  $n_1$  i  $n_2$  są współczynnikami załamania, odpowiednio promienia szybszego i wolniejszego.

Szczególnym przypadkiem płytki dwójtomnej jest ćwierćfalówka. Działanie ćwierćfalówki na promień poruszający się w kierunku  $z^0$ , jeśli jej pierwszy azymut tworzy z płaszczyzną  $x^0z^0$  kąt  $\chi$ , opisuje w analogii do (2.15) iloczyn

$$Q(\chi) = R^0(-\chi) T_o^0 \left( \frac{\pi}{2} \right) R^0(\chi). \quad (2.18)$$

Znajdziemy teraz związki między składowymi wektora elektrycznego promienia świetlnego przed i po przejściu przez płytkę dwójtomną przy założeniu (2.5). Rozważmy trzy przypadki, różniące się stanem polaryzacji początkowej promienia.

a) Promień padający na płytkę spolaryzowany jest w płaszczyźnie padania.

Płaszczyzna padania pokrywa się z płaszczyzną  $y^0z^0$ , a więc promień pierwotny o składowych

$$\mathbf{E}^0 = \begin{vmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

poddany zostaje kolejno działaniu polaryzatora (2.4)<sub>2</sub>, załamania (2.12)<sub>1</sub>, przesunięcia fazowego (2.15)<sub>1=1</sub>, odbicia pod kątem Brewstera (2.12)<sub>2</sub>, przesunięcia fazowego (2.15)<sub>1=2</sub> oraz załamania (2.12)<sub>3</sub>.

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(\pi/2) \mathbf{E}^0. \quad (2.20)$$

Wykonując kolejno działania znajdujemy

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(\pi/2) \mathbf{E}^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ p_y^{1B} \cdot E_y^0 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{2B} \mathbf{R}^1(-\varphi) \mathbf{T}_o^1(\varphi) \mathbf{R}^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{2B} \mathbf{R}^1(-\varphi) \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} \sin \varphi \\ e^{-i\varphi/2} \cos \varphi \end{vmatrix} p_y^{1B} E_y^0 = \\ &= \begin{vmatrix} p_x^{2B} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2} \sin \varphi \cos \varphi \\ e^{i\varphi/2} \sin^2 \varphi + e^{-i\varphi/2} \cos^2 \varphi \end{vmatrix} p_y^{1B} E_y^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} i p_x^{2B} p_y^{1B} E_y^0 \sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi = \begin{vmatrix} E_x^2 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^3 &= \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{R}^2(-\varphi) \mathbf{T}_o^2(\varphi) \mathbf{R}^2(\varphi) \mathbf{E}^2 = \\ &= \begin{vmatrix} p_x^{3B} (e^{i\varphi/2} \cos^2 \varphi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \varphi) \\ p_y^{3B} i \sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\varphi \end{vmatrix} E_x^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Natężenie światła zaraz po odbiciu brewsterowskim dane jest wyrażeniem

$$I_a^{(2)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{2*} = [p_x^{2B} p_y^{1B} E_y^0]^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\varphi, \quad (2.24)$$

gdzie (\*) oznacza operację sprzężenia.

Wyrażenie (2.24), z dokładnością do stałych współczynników, pokrywa się z wyrażeniem znanym z teorii polaryskopu liniowego ze skrzyżowanymi polaroidami.

Natężenie światła po wyjściu z płytki dane jest wyrażeniem

$$\begin{aligned} I_a^{(3)} &= \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{E}^{3*} = E_x^2 E_x^{2*} \left[ (p_x^{3B})^2 (\cos^4 \varphi + 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + \right. \\ &\left. + (p_y^{3B})^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\varphi \right] = I_a^{(2)} \left\{ (p_x^{3B})^2 + [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\varphi \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Porównując (2.25) z (2.24) widzimy, że przebieg ekstremów funkcji  $I_a^{(3)}$  jest taki sam jak funkcji  $I_a^{(2)}$ . A więc jakościowo obraz elastoptyczny wywołany odbiciem wewnętrznym pod kątem Brewstera jest taki jak w polaryskopie liniowym. Jeśli pominąć stały współczynnik, to również ilościowo te obrazy różnią się od siebie niewiele, gdyż składnik

$$(p_y^{3B})^2 = \left( \frac{2n^2}{n^2+1} \right)^2$$

jest na ogół kilkakrotnie większy od

$$(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2 = \left( n \frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^2.$$

Na przykład dla  $n = 1,5$  odpowiednie wartości wynoszą 1,92 i 0,33.

b) Promień padający na płytkę spolaryzowany jest prostopadle do płaszczyzny padania

Z płytki wychodzi promień o składowych

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0. \quad (2.26)$$

Kolejno znajdujemy

$$\mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{1B} \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_x^{1B} E_x^0 \\ E_x^0 \end{vmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\varphi^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_x^{2B} p_x^{1B} E_x^0 (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) \\ E_x^0 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

zaś

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\varphi^2(\varphi) \mathbf{E}^2 \quad (2.29)$$

dane jest tym samym wyrażeniem co w przypadku a), wzór (2.23), z tą różnicą, że  $E_x^2$  dane jest przez (2.28), a nie przez (2.22). Stąd

$$I_b^{(2)} = \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{E}^{2*} = [p_x^{2B} p_x^{1B} E_x^0]^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right), \quad (2.30)$$

co ma analogię w zależnościach teorii polaryskopu liniowego z polaroidami ustawionymi równolegle oraz

$$\begin{aligned} I_b^{(3)} &= \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{E}^{3*} = I_b^{(2)} \left\{ (p_x^{3B})^2 + [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right\} = \\ &= I_b^{(2)} \left\{ (p_y^{3B})^2 - [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \left( -\sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ponieważ

$$(p_y^{3B})^2 = n^2 > (p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2 = \left( n \frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^2,$$

więc podobnie jak w przypadku a) przebieg ekstremów funkcji  $I_b^{(3)}$  jest taki, jak  $I_b^{(2)}$ ; ilościowe różnice między wartościami obu funkcji są, z przyczyn podobnych jak w a), też niewielkie.

c) Promień padający na płytkę spolaryzowany jest kołowo. Tym razem

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\psi^2(\varphi) \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\psi^1(\varphi) \mathbf{P}^{1B} \mathbf{Q} \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^1 &= \mathbf{P}^{1B} \mathbf{Q} \left( \frac{\pi}{4} \right) \mathbf{P}(0) \mathbf{E}^0 = \mathbf{P}^{1B} \mathbf{R} \left( -\frac{\pi}{4} \right) \mathbf{T}_0 \left( \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{R} \left( \frac{\pi}{4} \right) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mathbf{E}_x^0 = \\ &= \mathbf{P}^{1B} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \mathbf{E}_x^0 = \\ &= \mathbf{P}^{1B} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ i \end{vmatrix} \mathbf{E}_x^0 = \begin{vmatrix} p_x^{1B} \\ ip_y^{1B} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{E}_x^0 = \begin{vmatrix} E_x^1 \\ E_y^1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 &= \mathbf{P}^{2B} \mathbf{T}_\psi^1(\varphi) \mathbf{E}^1 = \mathbf{P}^{2B} \begin{vmatrix} E_x^1 (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) + iE_y^1 \sin 2\psi \sin \frac{\varphi}{2} \\ iE_x^1 \sin 2\psi \sin \frac{\varphi}{2} + E_y^1 (e^{i\varphi/2} \sin^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \cos^2 \psi) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} p_x^{2B} \left[ E_x^1 (e^{i\varphi/2} \cos^2 \psi + e^{-i\varphi/2} \sin^2 \psi) + iE_y^1 \sin 2\psi \sin \frac{\varphi}{2} \right] = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} E_x^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{E}^3 = \mathbf{P}^{3B} \mathbf{T}_\psi^2(\varphi) \mathbf{E}^2, \quad (2.35)$$

jak w przypadku a), wzór (2.23), z tym że teraz  $\mathbf{E}^2$  dane jest przez (2.34). Stąd

$$\begin{aligned} I_c^{(2)} &= \mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{E}^{2*} = \left[ p_x^{2B} \frac{\sqrt{2}}{2} E_x^C \right]^2 \left\{ (p_x^{1B})^2 + [(p_y^{1B})^2 - (p_x^{1B})^2] \sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \right. \\ &\quad \left. - p_x^{1B} p_y^{1B} \sin \varphi \sin 2\psi \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$I_c^{(3)} = \mathbf{E}^3 \cdot \mathbf{E}^{3*} = I_c^{(2)} \left\{ (p_x^{3B})^2 + [(p_y^{3B})^2 - (p_x^{3B})^2] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 2\psi \right\}. \quad (2.37)$$

Zależność  $I_c^{(2)}$  od  $\varphi$  i  $\psi$  jest więc bardziej skomplikowana niż odpowiednie zależności  $I_a^{(2)}$  i  $I_b^{(2)}$ . Celem zbadania charakteru tej zależności zauważmy, że dla  $n = 1,5$ :

$$p_x^{1B} = \frac{2}{n^2 + 1} = 0,615, \quad p_y^{1B} = \frac{1}{n} = 0,667, \quad (p_x^{1B})^2 = 0,378, \quad (p_y^{1B})^2 = 0,446, \\ p_x^{1B} p_y^{1B} = 0,410,$$

zatem wkład składnika z współczynnikiem

$$(p_y^{1B})^2 - (p_x^{1B})^2 = 0,068$$

do sumy (2.36) nie przewyższa 20% wkładu pozostałych składników. Jeśli więc położyc w przybliżeniu

$$p_x^{1B} \cong p_y^{1B} \gg (p_y^{1B})^2 - (p_x^{1B})^2,$$

to otrzymamy

$$I_c^{(2)} \cong [p_x^{2B} E_x^0]^2 \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi \sin 2\psi). \quad (2.38)$$

Jeśli idzie o wpływ kąta  $\psi$  — parametru izokliny, to  $I_c^{(2)}$  jest proporcjonalne do  $\sin 2\psi$ , a nie do  $\sin^2 2\psi$ , jak było w poprzednich przypadkach. Zatem przy polaryzacji kołowej izoklina ujawnia się w sposób mniej kontrastowy, dzięki czemu wyraźniejszy jest obraz izochrom. Fakt ten znajduje potwierdzenie doświadczalne.

Przypuśćmy teraz, że jesteśmy w obszarze płytki, gdzie

$$\sin 2\psi = 1.$$

Wtedy (2.38) przyjmuje postać

$$I_c^{(2)} = [p_x^{2B} E_x^0]^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Zależność od  $\varphi$  w tym wyrażeniu przypomina odpowiednie wzory w przypadkach a) i b); wstępne przesunięcie fazowe wynosi tu  $\pi/4$ .

### 3. Efekt elastoptyczny przy skośnym prześwietleniu

Niech dwójmnośność płytki będzie wymuszona przez pole naprężeń  $\sigma$  opisane w układzie  $x, y, z$ , macierzą o składowych

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

W płytce panuje zatem płaski stan naprężenia.

W układzie  $x^1, y^1, z^1$  powstałym przez obrót osi współrzędnych o kąt  $\beta$  wokół osi  $x$ , a więc przy transformacji

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad (3.2)$$

składowe tensora naprężenia są opisane macierzą

$$\sigma' = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \sigma'_{xy} & \sigma'_{xz} \\ \sigma'_{xy} & \sigma'_y & \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{xz} & \sigma'_{yz} & \sigma'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \cos \beta & -\sigma_{xy} \sin \beta \\ \sigma_{xy} \cos \beta & \sigma_y \cos^2 \beta & -\sigma_y \sin \beta \cos \beta \\ -\sigma_{xy} \sin \beta & -\sigma_y \sin \beta \cos \beta & \sigma_y \sin^2 \beta \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

Jeśli płytka elastoptyczna, wykonana z materiału o elastoptycznej stałej modelowej  $K$ , prześwietlana jest równoległe do kierunku  $z'$ , to rząd izochromy dany jest zależnością [5]:

$$m' = \frac{1}{K \cos \beta} \sqrt{(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + 4\sigma_{xy}'^2}. \quad (3.4)$$

Przypuśćmy, że oś  $x$  jest osią symetrii pola naprężenia (3.1). Na osi symetrii

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (3.5)$$

oraz

$$\sigma'_{xy} = 0, \quad (3.6)$$



więc jeśli  $\sigma'_x > \sigma'_y$ , co zachodzi zawsze, gdy  $\sigma_x > \sigma_y$ , to

$$Km' = (\sigma_x - \sigma_y \cos^2 \beta) \frac{1}{\cos \beta}. \quad (3.7)$$

Ponadto, przy prześwietlaniu normalnym, jeśli  $\sigma_x > \sigma_y$ , na osi symetrii rząd izochromy wynosi

$$m = \frac{1}{K} (\sigma_x - \sigma_y). \quad (3.8)$$

Rozwiązując układ (3.7, 3.8) względem  $\sigma_x, \sigma_y$  dostajemy znane związki Druckera [6]:

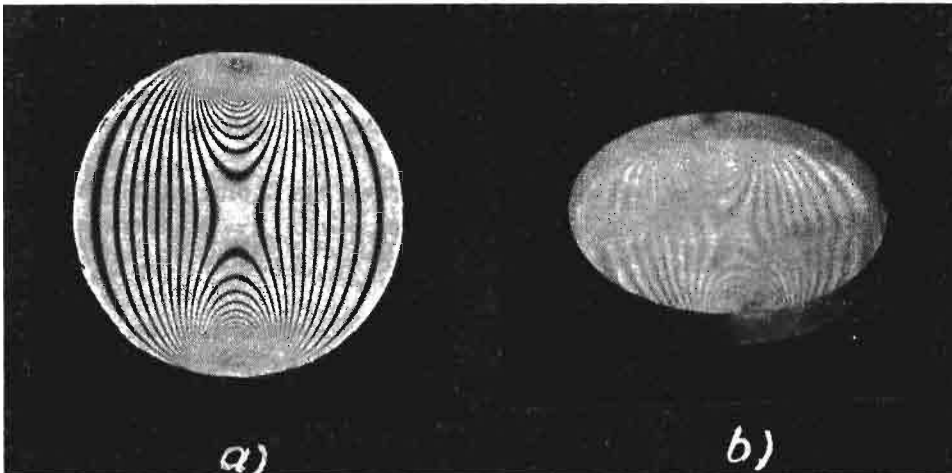
$$\sigma_x = K \frac{m' - m \cos \beta}{\sin^2 \beta} \cos \beta, \quad (3.9)$$

$$\sigma_y = K \frac{m' \cos \beta - m}{\sin^2 \beta}. \quad (3.10)$$

#### 4. Przykład

Celem przykładu zbadaliśmy model tarczy kołowej ściskanej osiowo. Model wykonany był z żywicy epoksydowej, o współczynniku załamania  $n = 1,47_{\pm 0,01}$ . Efekt elastoptyczny został utrwalony w tarczy metodą „zamrażania”. Na rys. 2a widzimy obraz izochrom  $m$  otrzymany przy prześwietlaniu normalnym, a na rys. 2b obraz izochrom w świetle odbitym pod kątem Brewstera,

$$\beta = \arctg \frac{1}{n} = \arctg 0,680_{\pm 0,005} = 34^{\circ} 13'_{\pm 12}. \quad (4.1)$$



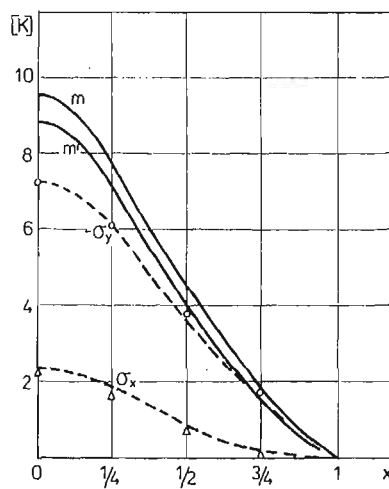
Rys. 2. Obrazy izochrom wykorzystane w rozważanym przykładzie: a) Obraz izochrom przy prześwietlaniu normalnym, b) Obraz izochrom w świetle odbitym pod kątem Brewstera. Skrócenie obrazu w kierunku pionowym wynosi  $\cos \alpha = 0,56$

Kąt padania światła

$$\alpha = \operatorname{arctgn} n = \operatorname{arctg} 1,47_{\pm 0,01} = 55^{\circ}46'_{\pm 11'} \quad (4.2)$$

realizowany był z dokładnością do  $3^{\circ}$ . Nie stosowano cieczy immersyjnej. Wstępna polaryzacja światła była kołowa, przypadek c).

Przyjmujemy początek układu współrzędnych  $x, y, z$  w środku tarczy kołowej, oś  $y$  pokrywamy z kierunkiem ściskania. W oparciu o obrazy izochrom z rys. 2 i wzory (3.9 - 10) rozdzieliliśmy naprężenia wzdłuż osi  $x$ , tzn. wzdłuż średnicy modelu prostopadłej do kierunku ściskania. Na rys. 3 przedstawiony jest przebieg funkcji:  $m = m(x, y = 0)$ ,



Rys. 3. Wynik rozdzielania naprężeń w tarczy kołowej wzdłuż promienia prostopadłego do kierunku sił zewnętrznych. Oś odciętych na rysunku odpowiada właśnie temu wybranemu przekrojowi. Przy tym przyjęto promień tarczy za równy jedności. Oś rzędnych przedstawia różne funkcje zbudowane ze składowych naprężenia w jednostkach stałej modelowej  $K$ . I tak: — krzywa  $m$  oznacza doświadczalny przebieg izochrom otrzymanych przy prześwietlaniu normalnym; — krzywa  $m'$  oznacza przebieg izochrom otrzymanych przez odbicie pod kątem Brewstera; — krzywa przerywana  $(-\sigma_y)$  oznacza przebieg składowej  $(-\sigma_y)$  otrzymanej z rozwiązania teoretycznego; — krzywa przerywana  $\sigma_x$  oznacza przebieg składowej  $\sigma_x$  otrzymanej z rozwiązania teoretycznego; — kołeczka oznaczają wartości  $(-\sigma_y)$  wyznaczone na podstawie  $m$  i  $m'$  wg wzoru (3.10); — trójkątki oznaczają wartości  $\sigma_x$  wyznaczone na podstawie  $m$  i  $m'$  wg wzoru (3.9)

$m' = m'(x', y' = 0)$ ,  $x' = x$ , wykreślonych na podstawie rys. 2 oraz przebieg wyznaczonych na ich podstawie funkcji:  $\sigma_x = \sigma_x(x, y = 0)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y = 0)$ , stanowiących szukane rozwiązanie. Naniesiony dla porównania przebieg teoretyczny  $\sigma_x, \sigma_y$  zgadza się bardzo dobrze z tym rozwiązaniem.

## 5. Zakończenie

Powyższe wyniki wykazują, iż korzystając z wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera można otrzymać obraz elastoptyczny, użyteczny do doświadczalnej analizy naprężeń. Spostrzeżenie to, interesujące samo w sobie, może znaleźć zastosowanie przy obserwacji zjawisk elastoptycznych wtedy, gdy względy konstrukcyjne lub ekonomiczne wymagają

ograniczenia liczby polaroidów w układzie optycznym, np. przy jednoczesnej obserwacji dużej liczby czujników elastoptycznych lub obserwacji pod dwoma kątami czasowej zależności zjawiska elastoptycznego. Zrozumiałe jest, że sposób uzyskania obrazu elastoptycznego przez odbicie Brewstera ma wszystkie wady metody skośnego prześwietlania. Przede wszystkim sposób ten zawodzi w obszarach dużej koncentracji naprężeń.

Ubocznym niejako wnioskiem z powyższych rozważań jest wskazanie na znaczenie zjawisk polaryzacyjnych zachodzących na powierzchniach granicznych ośrodka, a zatem i na konieczność ich uwzględniania przy interpretacji obrazu elastoptycznego.

#### Literatura

1. E. COKER, L. FILON, *A treatise on photo-elasticity*, Cambridge 1957.  
J. PINDERA, *Zarys elastoptyki*, Warszawa 1953
2. S. PIĘKOWSKI, *Fizyka doświadczalna*, t. III Optyka, Warszawa 1955.  
M. SUFFCZYŃSKI, *Elektrodynamika*, Warszawa 1965
3. R. JONES, *A new calculus for the treatment of optical systems*, J. Opt. Soc. Am. 31, 488 - 93, 1941.
4. J. VOS, *Birefringence of hexagonal single crystal of helium-4 at various pressures*, Dr. dissert. Delft 1968  
R. WOJNAR, *Uogólnione macierze Jonesa i ich zastosowanie w elastoptyce*, VII Sympozjum Badań Doświadczalnych w Mechanice, Warszawa 1976.
5. M. FROCHT, *Photoelasticity*, vol. II, p. 333, N. York 1948.
6. P. DRUCKER, *Photoelastic separation of principal stresses by oblique-incidence*, J. Appl. Mech. Trans. ASME 10, A156 - 60 (1943).

#### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ ПОД УГЛОМ БРЮСТЕРА ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ФОТОУПРУГОСТИ

Использовано явление внутреннего отражения под углом Брюстера до получения фотоупругой картины. Самое отражение исполняет роль анализатора, так что только один поляризатор — поляризатор нужен в эксперименте. Дается теория восстановления картины, использующая обобщенные матрицы Джонса.

Обращено внимание на возможность использования эффекта до разделения напряжений, на принципе метода косого просвечивания.

#### Summary

#### APPLICATION OF INNER REFLECTION AT BREWSTER'S ANGLE TO THE STRESS SEPARATION IN PHOTOELASTICITY

The effect of the internal reflection at Brewster's angle is applied to obtain a photoelastic pattern for stresses in a two-dimensional layer. The reflection itself acts as an analyzer, therefore only one polaroid — the polarizer is needed in an experiment. The explanation of the pattern formation is presented, using the generalised Jones matrices.

The possibility of the application of the method to stress separation, on basis of the oblique incidence method is pointed out.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1981 roku*