

GRZEGORZ KNOR¹⁾
MICHAŁ A. GLINICKI²⁾
JAN HOLNICKI-SZULC³⁾

DETERMINATION OF THERMAL PARAMETERS OF HARDENING CONCRETE BY MEANS OF INVERSE PROBLEM SOLUTION

WYZNACZANIE PARAMETRÓW TERMICZNYCH TWARDNIEJĄCYCH BETONÓW ZA POMOCĄ ROZWIĄZANIA PROBLEMU ODWROTNEGO

STRESZCZENIE. W pracy przedstawiono procedurę wyznaczania właściwości termofizycznych betonów: ciepła twardnienia, współczynnika przewodnictwa cieplnego oraz ciepła właściwego, opartą na punktowych pomiarach temperatury w formie walcowej i numerycznym rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego przepływu ciepła. Procedurę testowano na przykładach betonu z dodatkiem popiołów lotnych wapiennych. Uzyskane rezultaty wykazują dużą zgodność z rzeczywistymi wartościami poszczególnych parametrów i mogą być wykorzystane do wyznaczenia pola temperatury w obiektach o dowolnym kształcie.

SŁOWA KLUCZOWE: beton masywny, popiół lotny wapienny, problem odwrotny, rozkład temperatury, równanie przewodnictwa cieplnego.

ABSTRACT. The paper presents the procedure of determining the thermophysical properties of concrete: heat of hardening, thermal conductivity and specific heat, which is based on point temperature measurements in a cylindrical mold and the numerical solution of the inverse heat transfer problem. The procedure was tested on concrete materials made with high-calcium fly ashes. The obtained results show good agreement with the real values of individual parameters and can be used to determine the temperature field in the object of any complex shape.

KEYWORDS: calcerous fly ash, heat equation, inverse problem, massive concrete, thermal gradient.

DOI: 10.7409/rabdim.012.002

¹⁾ Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN; gknor@ippt.pan.pl (✉)

²⁾ Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN oraz Instytut Badawczy Dróg i Mostów w Warszawie; mglinic@ippt.pan.pl

³⁾ Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN; holnicki@ippt.pan.pl

1. WPROWADZENIE

Zmiany objętościowe betonu wywołane zmianami temperatury wywołują ryzyko powstawania spękań w konstrukcjach masywnych, zwłaszcza w początkowym okresie dojrzewania betonu, kiedy jego wytrzymałość jest niska. Zmiany temperatury w masywach betonowych są związane z egzotermiczną reakcją hydratacji cementu. Ciepło wydzielane podczas hydratacji, zwłaszcza w okresie pierwszych trzech dob, powoduje wzrost temperatury betonu, natomiast wymiana ciepła z otoczeniem oraz stosunkowo niski współczynnik przewodnictwa cieplnego powodują zróżnicowanie temperatury między wnętrzem elementu masywnego a warstwami powierzchniowymi. Problematykę zmian temperaturowych twardniejącego betonu oraz ich skutki, tj. naprężenia termiczne i odkształcenia, uwarunkowane również ograniczeniem swobody przemieszczeń konstrukcji, omówiono wyczerpująco w monografiach Kiernożyckiego [1] i Klemczak [2].

Do wyznaczania powstającego w konstrukcji nieliniowego i niestacjonarnego pola temperatury niezbędna jest znajomość równania opisującego przepływ ciepła, wydajności źródła ciepła oraz warunków brzegowych i warunków początkowych. W równaniu przepływu ciepła występują współczynniki termofizyczne opisujące rozważany materiał. W przypadku dojrzewającego betonu są to: gęstość, ciepło właściwe oraz współczynnik przewodnictwa cieplnego. Wymienione współczynniki zależą od składu mieszanki betonowej, temperatury, w jakiej przebiega proces twardnienia oraz czasu, jaki upłynął od chwili połączenia składników [3], [4]. Mimo zmienności tych parametrów, w modelach proponowanych w literaturze zależność ta jest często pomijana i stosuje się stałe wartości współczynników termofizycznych oszacowane na podstawie składu mieszanki (np.: [2], [5], [6]).

Przedmiotem badań autorów są nieznane dotąd, innowacyjne spoiwa cementowe z dodatkiem popiołów lotnych wapiennych pochodzących ze spalania węgla brunatnego. W przypadku stosowania nowych dodatków do cementu powstają trudności z oszacowaniem współczynników termofizycznych. Ponadto na podstawie przeprowadzonych analiz numerycznych stwierdzono, że pomijanie zmienności tych współczynników wraz z wiekiem betonów jest źródłem znaczących błędów. W pracy zaproponowano metodę, która umożliwi uniknięcie błędów wynikających z niewłaściwego oszacowania współczynników termofizycznych. Metoda polega na punktowych pomiarach temperatury w formie jednowymiarowej, a następnie

1. INTRODUCTION

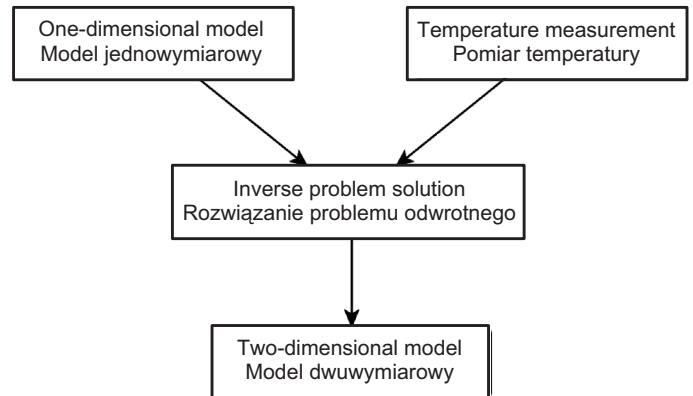
Volume changes of concrete, induced by temperature variations, increase the risk of cracks in massive structures, particularly at the initial stage of concrete hardening, when its strength is low. Temperature variations in massive concrete are associated with an exothermic reaction of cement hydration. The heat released during the hydration, especially during the period of the first three days, causes the increase in concrete temperature whereas the heat exchange with the environment and a relatively low coefficient of thermal conductivity causes the temperature differences between the interior of the massive element and its surface layers. Problem of temperature variations of the hardening concrete and their effects, i.e. thermal stresses and strains that are conditioned by restrained movements of the structure have been discussed in details in the monographs of Kiernożycki [1] and Klemczak [2].

To determine the non-linear and non-stationary temperature field that emerges in the structure, it is necessary to know the equation describing the flow of heat, heat capacity and both the boundary conditions and initial conditions. The heat transfer equation includes the thermophysical coefficients that describe the considered material. In the case of maturing concrete, these are: the density, the specific heat and the thermal conductivity coefficient. The above mentioned coefficients depend on the composition of concrete mixture, the temperature at which the hardening process takes place and the time that has elapsed since the mixing of materials [3], [4]. Despite the variability of these parameters, the models proposed in the literature often overlook this relation and the constant thermophysical coefficients estimated on the basis of the mixture composition (e.g. [2], [5], [6]) are applied.

The investigation conducted by the authors includes tests of the, so far, unknown and innovative cementitious binders produced with high-calcium fly ashes obtained from brown coal combustion. Application of new additives to cement may cause difficulties with estimation of thermophysical coefficients. Furthermore, on the basis of numerical analyses, it was found that omitting variations of these factors with age of concrete results in significant errors. The paper proposes a method which enables avoiding errors resulting from incorrect estimation of thermophysical coefficients. The method is based on the point temperature measurements in the one-dimensional mold as well as on the inverse problem solution. Obtained

na rozwiązaniu problemu odwrotnego. Uzyskane rezultaty stanowią dane wejściowe do dwuwymiarowego modelu rozkładu temperatury w konstrukcjach betonowych. Schemat blokowy metody przedstawiono na Rys. 1. W literaturze można znaleźć tylko jedną publikację [7], która porusza omawiany temat. Autorzy cytowanego artykułu zastosowali algorytm genetyczny do rozwiązania problemu odwrotnego tylko w odniesieniu do samodzielnie wygenerowanych danych bez przeprowadzenia eksperymentu.

Fig. 1. Flow chart of the test procedure
Rys. 1. Schemat blokowy procedury badawczej



2. MODELOWANIE ROZKŁADU TEMPERATURY W BETONIE

2.1. RÓWNANIE PRZEWODNICTWA CIEPLNEGO

Równanie przewodnictwa cieplnego w twardniejącym betonie, w przypadku pominięcia wpływu odkształceń obiektu i dyfuzji wilgoci na pole temperatury, zapisuje się jako [8]:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S, \quad (1)$$

gdzie:

ρ – gęstość betonu $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,

c_p – ciepło właściwe betonu $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$,

T – temperatura betonu [$^{\circ}\text{C}$],

t – czas od zabetonowania [s],

x, y, z – współrzędne położenia,

k_x, k_y, k_z – współczynniki przewodnictwa cieplnego w kierunku x, y, z $\left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$,

S – wydajność źródła ciepła $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$.

results provide an input to the two-dimensional temperature distribution model in concretes structures. The flow chart of the method is shown in Fig. 1. The literature includes only one publication [7] that addresses the topic. The authors of the cited paper applied the genetic algorithm to solve the inverse problem only in relation to self-generated data without any experiment being conducted.

2. MODELING OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN CONCRETE

2.1. HEAT FLOW EQUATION

The equation of thermal conductivity in hardening concrete can be written according to [8] ignoring the influence of both the object deformation and the diffusion of moisture on the temperature field:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S, \quad (1)$$

where:

ρ – density of concrete $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$,

c_p – specific heat of concrete $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right]$,

T – temperature of concrete [$^{\circ}\text{C}$],

t – time since concrete placement [s],

x, y, z – spatial coordinates,

k_x, k_y, k_z – coefficients of thermal conductivity in direction x, y, z $\left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$,

Wyznaczenie pola temperatury za pomocą równania (1) jest możliwe, jeśli znane są warunki określające początkowy rozkład temperatury w rozpatrywanym obiekcie oraz warunki brzegowe zawierające informacje o przepływie ciepła na powierzchni ciała. Warunek początkowy zapisujemy jako:

$$T(t=0, x, y, z) = T_0(x, y, z), \quad (2)$$

gdzie T_0 oznacza rozkład temperatury dla czasu $t=0$.

Warunek brzegowy w ogólnej postaci można zapisać jako pewną funkcję φ , zależną od czasu, położenia, temperatury oraz gradientu temperatury:

$$\varphi(x, y, z, t, T, \nabla T) = 0. \quad (3)$$

W przyjętym modelu ewolucji temperatury w betonie, właściwości cieplne ośrodka nie są stałymi współczynnikami, lecz zależą od jego składu oraz szybkości przebiegu procesu hydratacji. Współczynniki określono następująco:

- ciepło właściwe jest funkcją efektywnego wieku betonu $c_p = c_p(t_e)$,
- współczynnik przewodnictwa cieplnego nie zależy od kierunku, ale zmienia się wraz z efektywnym wiekiem betonu $k_x = k_y = k_z = k(t_e)$,
- gęstość mieszanki betonowej jest stała podczas procesu twardnienia, co oznacza, że nie ma ubytku masy (np. na skutek parowania wody) $\rho = \text{const}$.

Efektywny wiek betonu t_e , występujący w powyższych wzorach, oblicza się z zależności:

$$t_e = \int_0^t \beta(T) dt', \quad (4)$$

gdzie:

$\beta(T)$ – funkcja temperatury, która najczęściej jest wyrażana jako [9]:

$$\beta(T) = \exp\left(\frac{E}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T+273} \right)\right). \quad (5)$$

Występujące w zależności (5) wielkości to: E – energia aktywacji wyrażona w J/mol, R – uniwersalna stała gazowa 8,314 J/(mol · K). Temperatura T wyrażana jest w °C. W przypadku betonu zgodnie z zaleceniami raportu [10], iloraz energii aktywacji i stałej gazowej przyjmuje się jako:

$$\frac{E}{R} = \begin{cases} 4000 \left[\frac{1}{K} \right] & \text{dla } T > 20^\circ \text{C}, \\ 4000 + 175(20 - T) \left[\frac{1}{K} \right] & \text{dla } T \leq 20^\circ \text{C}. \end{cases} \quad (6)$$

$$S \text{ – heat source capacity } \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right].$$

Determination of the temperature field using Eq. (1) is possible, provided that both conditions describing the initial temperature distribution in the considered object and the boundary conditions containing information about the heat flow on the body surface are known. The initial condition is written as:

$$T(t=0, x, y, z) = T_0(x, y, z), \quad (2)$$

where T_0 denotes the temperature distribution at time $t=0$.

The boundary condition in the general form can be written as a function φ depending on time, location, temperature and temperature gradient:

$$\varphi(x, y, z, t, T, \nabla T) = 0. \quad (3)$$

In the adapted model of the temperature evolution in concrete, the thermal properties of material are not constant, but they are dependent on the composition and the rate of the hydration process. The coefficients were determined as follows:

- the specific heat is a function of the effective age of concrete $c_p = c_p(t_e)$,
- the thermal conductivity coefficient is direction-independent, but varies with the effective age of concrete $k_x = k_y = k_z = k(t_e)$,
- the density of concrete mixture is kept constant during the hardening process, which means that there is no loss in mass (e.g. due to evaporation of water) $\rho = \text{const}$.

The effective age of concrete t_e , presented in the above formulae, is calculated by the following relation:

$$t_e = \int_0^t \beta(T) dt', \quad (4)$$

where:

$\beta(T)$ – a temperature function, which is usually expressed as [9]:

$$\beta(T) = \exp\left(\frac{E}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{T+273} \right)\right). \quad (5)$$

The parameters shown in Eq. (5) are: E – the activation energy [J/mol], R – the universal gas constant 8.314 J/(mol · K). The temperature T is expressed in °C. In the case of concrete, according to the report [10], the ratio of activation energy and the gas constant shall be assumed as:

Występujące we wzorze (1) źródło ciepła S , dla konkretnego składu mieszanki również zależy od czasu i historii temperatury procesu $S = S(t_e)$.

2.2. METODA ROZWIĄZYWANIA PROBLEMU 1D

W przypadku zagadnienia jednowymiarowego równanie (1) redukuje się do postaci:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S. \quad (7)$$

Warunek brzegowy w proponowanym modelu dla problemu jednowymiarowego określony jest w postaci Dirichleta:

$$\begin{aligned} T(t, x=0) &= T_{x=0}(t), \\ T(t, x=l) &= T_{x=l}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie l jest długością obiektu, zaś $T_{x=0}$ i $T_{x=l}$ to zadane wartości temperatury na krańcach obiektu.

Równanie przewodnictwa jest rozwiązywane za pomocą metody linii [11]. Przy wykorzystaniu tej metody równanie różniczkowe cząstkowe jest zamieniane na układ równań różniczkowych zwyczajnych poprzez przybliżenie pochodnej przestrzennej jej postacią algebraiczną (metoda różnic skończonych). Otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych jest zależny tylko od czasu i jest rozwiązywany za pomocą metody Geara [12]. Jest to metoda rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych z adaptacyjnym krokiem czasowym.

2.3. PROBLEM ODWROTNY

Określenie parametrów termofizycznych betonu jest zadaniem technicznie trudnym i czasochłonnym. Standardowo ciepło hydratacji wyznacza się za pomocą pomiarów kalorymetrycznych metodą semiadiabatyczną (PN-EN 196-9) bądź metodą rozpuszczania (PN-EN 196-8). Pozostałe parametry wyznaczane są np. metodą hot wire [13] lub za pomocą komercyjnej aparatury badawczej [14]. W proponowanym modelu funkcje k , c_p i S występujące w równaniu (1) wyznaczane są za pomocą rozwiązania problemu odwrotnego, który jest zdefiniowany jako problem optymalizacyjny [15]. Oznacza to, że szukane jest minimum następującej funkcji celu E :

$$E = (T^e - T^n)^T (T^e - T^n) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I (T_{im}^e - T_{im}^n)^2, \quad (9)$$

gdzie T^e oznacza wartości zmierzone, T^n oznacza wartości obliczone, zaś indeks górny T oznacza transpozycję. Sumowanie odbywa się po liczbie czujników M oraz liczbie wykonanych pomiarów I .

$$\frac{E}{R} = \begin{cases} 4000 \left[\frac{1}{K} \right] & \text{for } T > 20^\circ \text{C}, \\ 4000 + 175(20 - T) \left[\frac{1}{K} \right] & \text{for } T \leq 20^\circ \text{C}. \end{cases} \quad (6)$$

The heat source S shown in Eq. (1) for a given composition of the mixture depends on time and temperature history of the process $S = S(t_e)$.

2.2. METHOD OF SOLVING THE 1D PROBLEM

In the case of the one-dimensional problem, the Eq. (1) shall be reduced to the following form:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S. \quad (7)$$

The boundary condition in the proposed model for the one-dimensional problem is defined in the Dirichlet form:

$$\begin{aligned} T(t, x=0) &= T_{x=0}(t), \\ T(t, x=l) &= T_{x=l}(t), \end{aligned} \quad (8)$$

where l is the length of the object and both $T_{x=0}$ and $T_{x=l}$ are the given temperature values at the edges of the object.

The conduction equation is solved by the method of lines [11]. In this method, the partial differential equation is converted into the system of ordinary differential equations through the spatial derivative approximation by its algebraic form (a finite difference method). The obtained system of ordinary differential equations is only dependent on time and is solved by the Gear method [12]. This is a method of solving the system of ordinary differential equations with an adaptive time step.

2.3. THE INVERSE PROBLEM

Determination of thermophysical parameters of concrete is a technically difficult and time-consuming task. Usually, the hydration heat is determined by means of calorimetric measurements using the semi-adiabatic method (PN-EN 196-9) or the dissolution method (PN-EN 196-8). Other parameters are determined, for example, by a hot wire method [13] or by means of the commercial test equipment [14]. In the proposed model, functions k , c_p and S , appearing in Eq. (1), are determined by means of the inverse problem solution, which is defined as a nonlinear optimization problem [15]. That indicates a search for a minimum of the following objective function E is performed:

W przypadku omawianego zagadnienia za pomocą problemu odwrotnego wyznaczone są wartości parametrów określających zmienne w czasie ciepło właściwe, współczynnik przewodnictwa cieplnego i ciepło hydratacji. Duża liczba wyznaczanych parametrów może prowadzić do sytuacji, w której norma kwadratowa określona równaniem (9) jest niestabilna. Poprawę stabilności może przynieść zastosowanie jednej z procedur regularyzacyjnych. W przypadku omawianego modelu stosowana jest regularyzacja Tichonowa zerowego rzędu, która modyfikuje funkcję celu zadaną wzorem (9) do postaci [16]:

$$E(\mathbf{a}) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I (T_{im}^e - T_{im}^n)^2 + \gamma \sum_{p=1}^P a_p^2, \quad (10)$$

gdzie γ jest parametrem regularyzacyjnym, \mathbf{a} wektorem szukanych parametrów, P liczbą parametrów.

Poszukiwane funkcje są parametryzowane w następujący sposób:

- funkcja opisująca współczynnik przewodnictwa cieplnego:

$$k = \begin{cases} a_k t_e + b_k & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ k_\infty & t_e \geq 72\text{h}, \end{cases} \quad (11)$$

- funkcja opisująca ciepło właściwe:

$$c_p = \begin{cases} a_{c_p} t_e + b_{c_p} & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ c_{p\infty} & t_e \geq 72\text{h}, \end{cases} \quad (12)$$

- funkcja opisująca wydajność źródła ciepła:

$$S = \frac{t_e}{t} \sum_{i=1}^n a_{si} N_i(t_e), \quad (13)$$

gdzie funkcje N_i w analogii do jednowymiarowych, liniowych funkcji kształtu są definiowane jako:

$$N_i(t) = \begin{cases} \frac{t - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} & \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, \\ 1 - \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} & \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad (14)$$

τ jest wektorem zawierającym czasy, dla których wyznaczone są parametry a_{si} . Występujące we wzorach (11)-(14) parametry a_k, b_k, a_{cp}, b_{cp} oraz a_{si} są składowymi wektora \mathbf{a} występującego we wzorze (10), zaś parametry z indeksem ∞ mogą być obliczone na podstawie znajomości odpowiadających im parametrów a i b , np. $k_\infty = 72a_k + b_k$.

Zadanie optymalizacyjne rozwiązywane jest za pomocą algorytmu poszukiwania bezpośredniego (ang. *direct search*), które jest metodą niewymagającą informacji na temat

$$E = (T^e - T^n)^T (T^e - T^n) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I (T_{im}^e - T_{im}^n)^2, \quad (9)$$

where T^e denotes the measured values, T^n denotes the calculated values and the superscript T denotes the transposition. An aggregation considers the number of sensors M and the number of the conducted measurements I .

In the discussed issue, the inverse problem is used to estimate the values of parameters which determine the time-variable specific heat, the coefficient of thermal conductivity and the heat of hydration. A large number of determined parameters may lead to a situation where the square norm estimated by the Eq. (9) is unstable. An improvement of stability can be achieved by application of one of regularization procedures. The discussed model involves the zero-order Tikhonov regularization which modifies the objective function given by (9) to the following form [16]:

$$E(\mathbf{a}) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I (T_{im}^e - T_{im}^n)^2 + \gamma \sum_{p=1}^P a_p^2, \quad (10)$$

where γ is a regularization parameter, \mathbf{a} is a vector of sought parameters, P is the number of parameters.

The requested functions are parameterized as follows:

- the function describing the thermal conductivity coefficient:

$$k = \begin{cases} a_k t_e + b_k & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ k_\infty & t_e \geq 72\text{h}, \end{cases} \quad (11)$$

- the function describing the specific heat:

$$c_p = \begin{cases} a_{c_p} t_e + b_{c_p} & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ c_{p\infty} & t_e \geq 72\text{h}, \end{cases} \quad (12)$$

- the function describing the heat source capacity:

$$S = \frac{t_e}{t} \sum_{i=1}^n a_{si} N_i(t_e), \quad (13)$$

where functions N_i , by analogy with the one-dimensional linear shape functions, are defined as:

$$N_i(t) = \begin{cases} \frac{t - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} & \tau_{i-1} \leq t < \tau_i, \\ 1 - \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} & \tau_i \leq t < \tau_{i+1}, \\ 0 & \text{in other cases,} \end{cases} \quad (14)$$

τ is the vector containing the times for which the parameters a_{si} are determined. The parameters a_k, b_k, a_{cp}, b_{cp} and a_{si} appearing in Eq. (11)-(14) are components of the vector \mathbf{a}

gradientu funkcji celu [17]. Pozwala to (w przeciwieństwie do tradycyjnych metod optymalizacji) wyznaczyć minimum funkcji celu, która nie jest różniczkowalna lub posiada nieciągłości. Algorytm poszukiwania wzorca jest zbieżny [18] oraz bardziej wydajny w stosunku do metod gradientowych w przypadku funkcji celu posiadającej wiele lokalnych minimów. Podstawowym pojęciem jest wzorzec. Jest to zbiór wektorów używanych do określania punktów poszukiwania w każdej iteracji. Zbiór ten zawiera $2P$ wektorów w przestrzeni P wymiarowej, zdefiniowanych jako $\{v_i\} = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (-1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, -1)\}$. Szukanie wartości optymalnych p^{opt} odbywa się przez przeszukiwanie wartości funkcji na zbiorze punktów nazywanych siatką. W każdym kroku tworzona jest nowa siatka, której generowanie przebiega dwuetapowo: w pierwszym etapie tworzony jest zbiór wektorów d_i poprzez pomnożenie każdego wzorca v_i przez aktualny rozmiar siatki Δ^s , następnie zbiór wektorów d_i jest dodawany do aktualnego, optymalnego punktu wyznaczonego w poprzedniej iteracji p^{opt} . W zależności od powodzenia konkretnej iteracji, rozmiar siatki jest zwiększany bądź zmniejszany. Wyszukiwanie punktów optymalnych jest kontynuowane, aż zostanie spełnione jedno z kryteriów zatrzymania: rozmiar siatki osiągnie mniejszą wartość niż zakładana tolerancja oraz odległość pomiędzy punktem optymalnym w dwóch kolejnych iteracjach będzie mniejsza od zakładanej dokładności lub wartość funkcji celu będzie mniejsza od założonej przez użytkownika wartości minimalnej. Schemat działania algorytmu został przedstawiony na Rys. 2. Warto odnotować, że dla przyspieszenia optymalizacji może być stosowany pomocniczy algorytm Levenberga-Marquardta.

W celu poprawienia wydajności optymalizacji na parametry w równaniach (11)-(13) nakładane są ograniczenia. Mogą to być ograniczenia oparte na ogólnym doświadczeniu, np. Neville [19] podaje, że w przypadku typowych betonów współczynnik przewodnictwa cieplnego zmienia się w zakresie 1,4-3,6 W/(m·K), z kolei Bentz [4] proponuje liniową zależność od gęstości. W przypadku ciepła właściwego betonu zwykle przyjmowana jest wartość około 1000 J/(kg·K) [2]. Dodatkowo do modelu wprowadzana jest informacja dotycząca właściwości izolacyjnych używanej formy.

2.4. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW MODELU

Rozwiązanie problemu odwrotnego wymaga przeprowadzenia punktowych pomiarów temperatury mieszanki betonowej w formie jednowymiarowej. Na Rys. 3 został

appearing in Eq. (10), meanwhile the parameters with the index ∞ can be calculated based on knowledge of the corresponding parameters a and b , for example $k_\infty = 72a_k + b_k$.

The optimization problem is solved by means of a direct search algorithm, which is a method that does not require information about the gradient of the objective function [17]. This allows (as opposed to traditional optimization methods) to determine the minimum of the objective function, which is not differentiable or has discontinuities. The pattern search algorithm is convergent [18] and more efficient in relation to the gradient methods in the case of the objective function, which has multiple local minima. The basic concept is a pattern. It is a set of vectors used to determine the points of the search in each iteration. This collection contains $2P$ vectors in P -dimensional space, defined as: $\{v_i\} = \{(1, 0, 0, \dots, 0), (-1, 0, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, -1)\}$. Searching for the optimal value p^{opt} is a search in the function values on the set of points called a mesh. Each step creates a new mesh generated in two stages: the first stage results in a set of vectors d_i created by multiplying each pattern v_i by the current size of mesh Δ^s , then the set of vectors d_i is added to the current and the optimal point determined in the previous iteration p^{opt} . Depending on the success of a particular iteration, the mesh size is increased or decreased. Searching for the optimal points is continued until one of the criteria to stop is fulfilled: the mesh size reaches a lower value than the expected tolerance and the distance between the optimal point in two successive iterations is smaller than the expected accuracy or the objective function value is lower than the minimum value assumed by the user. The flow chart of the algorithm is shown in Fig. 2. It should be noted that to accelerate the optimization, the auxiliary Levenberg-Marquardt algorithm can be applied.

In order to increase the efficiency of optimization some limitations shall be imposed on parameters in Eq. (11)-(13). These may be the limitations based on the general experience, e.g. Neville [19] states that in the case of conventional concretes, the thermal conductivity coefficient varies in the range from 1.4 to 3.6 W/(m·K), whereas Bentz [4] proposes a linear dependence on the density. In the case of the specific heat of concrete, the usual value is about 1000 J/(kg·K) [2]. Information regarding the thermal insulation properties of the applied mould can be additionally used in the model.

2.4. IDENTIFICATION OF MODEL PARAMETERS

Solving the inverse problem requires point temperature measurements of concrete mixture in the one-dimensional

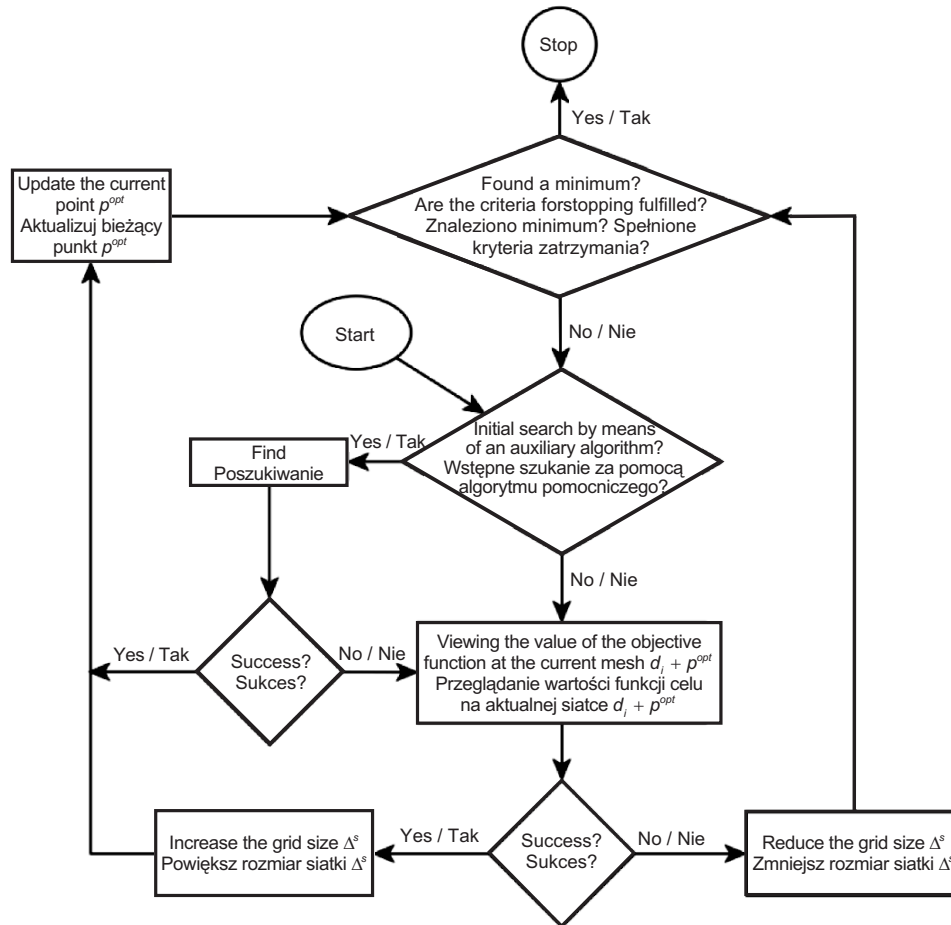


Fig. 2. Flow chart of the pattern search algorithm
Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu poszukiwania wzorca

przedstawiony schemat formy badawczej oraz rozmieszczenie czujników pomiarowych. Izolacja formy jest wykonana z pianki polietylenowej oraz styropianu, aby zminimalizować ubytek ciepła przez ścianki. Układ pomiarowy jest w pełni zautomatyzowany i rejestracja danych odbywa się w sposób ciągły. Szczegółowe informacje techniczne dotyczące używanej aparatury zostały opisane w raporcie [20].

Rozwiązanie problemu odwrotnego opiera się na jednowymiarowym równaniu przewodnictwa ciepła. Oczywiście proponowana forma do pomiaru temperatury jest obiektem trójwymiarowym. Biorąc jednak pod uwagę osiową symetrię zagadnienia możliwy jest jej opis za pomocą dwuwymiarowego równania przewodnictwa ciepła. Ponadto ze względu na stosunkowo dobrą izolację termiczną na ściankach formy oraz swobodną wymianę ciepła z otoczeniem przez górną powierzchnię można przypuszczać, że temperatura wzdłuż promienia ma stałą

wartość. Fig. 3 presents the schema of the mold and the distribution of measurement sensors. The thermal isolation of the mold is made of polyethylene foam and polystyrene foam, in order to minimize the heat loss through the walls. The measurement system is fully automated and the data logging process takes place in a continuous manner. The detailed technical information about the applied equipment has been described in report [20].

The solution of inverse problem is based on the one-dimensional heat conduction equation. Obviously, the temperature measurement mold is a three-dimensional object. However, taking into account the axial symmetry of the problem, it is possible to describe it by means of the two-dimensional heat conduction equation. Moreover, due to the relatively good thermal insulation on the sides of the mold and the free heat exchange with the surroundings through the upper surface, it can be assumed that the temperature along the radius is a constant value. With the

wartość. W tym celu wykonano serię pomiarów, w których mierzona była temperatura w osi formy oraz przy jej ścianie. Maksymalna różnica nie przekraczała $0,5^{\circ}\text{C}$, zaś średnia różnica dla wszystkich pomiarów wynosiła $0,23^{\circ}\text{C}$. Pozwala to twierdzić, że przybliżenie jednowymiarowe jest zasadne w przypadku używanej formy. Niemniej informacja o ubytku ciepła przez ścianki formy pomiarowej jest wykorzystywana w omawianym modelu przewodnictwa ciepła, ponieważ pozwala na lepsze uwarunkowanie problemu odwrotnego poprzez dodanie ograniczeń na funkcję określającą źródło ciepła. W celu oceny izolacyjności formy wykonano pomiary temperatury stygnącego piasku. Oszacowano, że strata ciepła $S_- \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$

jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy temperaturą medium T , a temperaturą otoczenia T_{ot} zgodnie ze wzorem:

$$S_- = -(51,5898 + 0,2394\Theta) \Theta, \quad (15)$$

gdzie $\Theta = T - T_{ot} \text{ [}^{\circ}\text{C]}$.

Fig. 3. Photo of one-dimensional mold and its cross section and schema with the location of the sensors. Hatched area indicates the insulation

Rys. 3. Zdjęcie jednowymiarowej formy pomiarowej wraz z przekrojem oraz schematem z zaznaczonymi czujnikami. Zakreskowany obszar oznacza izolację

3. WYNIKI BADAŃ

3.1. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ

W celu sprawdzenia dokładności rozwiązania problemu odwrotnego przeprowadzono analizę numeryczną dla symulowanego rozkładu temperatury w formie jednowymiarowej. Jako danych wejściowych do modelu użyto następujących funkcji:

$$S = 2640000 \frac{e^{-12 \log(t_e) - 2,2}}{t_e \log(t_e)^{3,2}} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right], \quad (16)$$

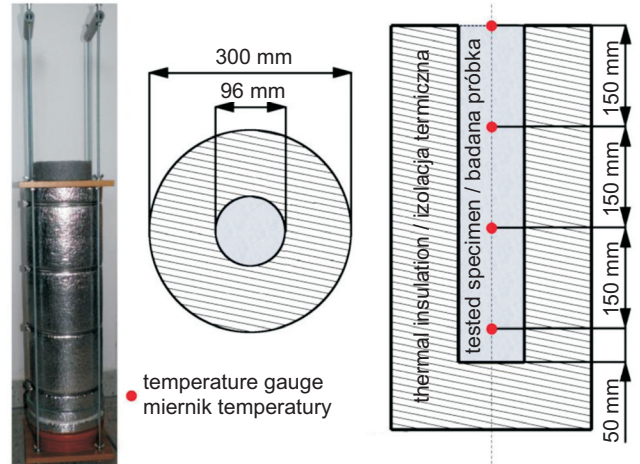
$$c_p = \begin{cases} \frac{45}{72} t_e + 950 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ 995 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] & t_e \geq 72\text{h}, \end{cases} \quad (17)$$

$$k = \begin{cases} 1,7 - 0,4t_e \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ 1,3 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] & t_e \geq 72\text{h}. \end{cases} \quad (18)$$

aim of confirming that, a series of measurements, in which the temperature was measured at the axis of the mold and by its wall, was conducted. The maximum variation did not exceed 0.5°C , while the average difference for all measurements was 0.23°C . Based on that, the one-dimensional approximation is justified in the case of the applied mold. However, information about the heat loss through the walls of the mold is applied for this model of heat conduction because it enables a better conditioning of the inverse problem by adding restrictions on the function determining the heat source. In order to evaluate the insulation properties of the mold, the temperature measurements of cooling of sand were conducted. It was estimated that the loss of heat $S_- \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$ was proportional to the difference between the medium temperature T and the ambient temperature T_{ot} in accordance with the formula:

$$S_- = -(51.5898 + 0.2394\Theta) \Theta, \quad (15)$$

where $\Theta = T - T_{ot} \text{ [}^{\circ}\text{C]}$.



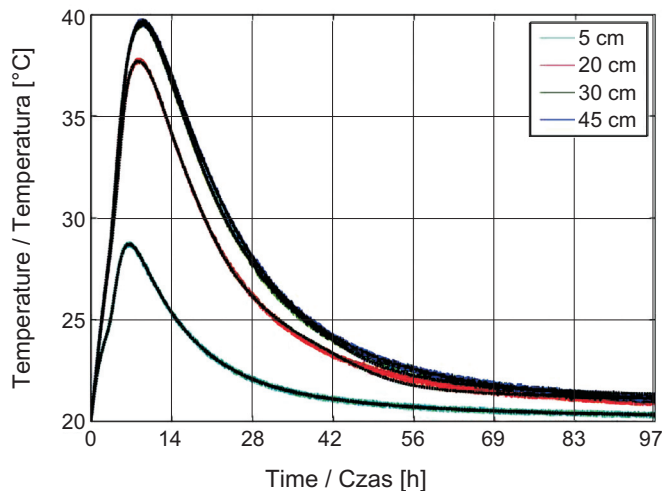
3. RESULTS

3.1. RESULTS OF NUMERICAL ANALYSIS

In order to check the accuracy of the inverse problem solution, the numerical analysis of the simulated temperature distribution in the one-dimensional mold was conducted. As input data for the model, the following functions were applied:

$$S = 2640000 \frac{e^{-12 \log(t_e) - 2,2}}{t_e \log(t_e)^{3,2}} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right], \quad (16)$$

Współczynniki we wzorach (16) - (18) zostały dobrane w ten sposób, aby ich wartości były zbliżone do rzeczywistych wartości występujących w betonie. Dodatkowo do wynikowej temperatury dodano biały szum gaussowski o średniej wartości 0°C i odchyleniu standardowym $0,09^{\circ}\text{C}$. Na Rys. 4 przedstawiono porównanie rozkładu temperatury obliczonej z użyciem funkcji zadanych wzorami (16) - (18) oraz na podstawie wyznaczonych parametrów. Uzyskane wyniki pokrywają się w znacznym stopniu. W Tabelicy 1 zestawiono założone współczynniki określające ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa ciepła z wartościami wyznaczonymi na podstawie rozwiązania problemu odwrotnego. W przypadku współczynnika przewodnictwa zgodność jest niemal idealna, zaś dla ciepła właściwego otrzymane rezultaty są mniej dokładne. Na Rys. 5 przedstawiono porównanie zadanej funkcji opisującej źródło ciepła (równanie 16) z wyznaczonymi parametrami z problemu odwrotnego. Osiągnięta zgodność pomiędzy zagadnieniem wprost i problemem odwrotnym jest zadowalająca.



$$c_p = \begin{cases} \frac{45}{72}t_e + 950 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ 995 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] & t_e \geq 72\text{h}, \end{cases} \quad (17)$$

$$k = \begin{cases} 1.7 - 0.4t_e \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] & 0 \leq t_e < 72\text{h}, \\ 1.3 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] & t_e \geq 72\text{h}. \end{cases} \quad (18)$$

The coefficients in Eq. (16) - (18) are chosen in the manner which makes them approximate to the actual value occurring in the concrete. The resultant temperature was enriched by the white Gaussian noise with an average value of 0°C and a standard deviation of 0.09°C . Fig. 4 shows a comparison of distribution of the temperature calculated using the functions selected by the formulas (16) - (18) and on the basis of the determined parameters. The obtained results correspond to each other to a large extent. Table 1 summarizes the selected coefficients determining the specific heat and the thermal conductivity coefficient with the values calculated on the basis of the inverse problem solution. In the case of the conductivity coefficient, the compatibility is almost perfect, whereas the results regarding the specific heat are less accurate. Fig. 6 shows a comparison of the given function describing the heat source (Eq. 16) with the determined parameters based on the inverse problem. The achieved compatibility between the direct and the inverse problem is satisfactory.

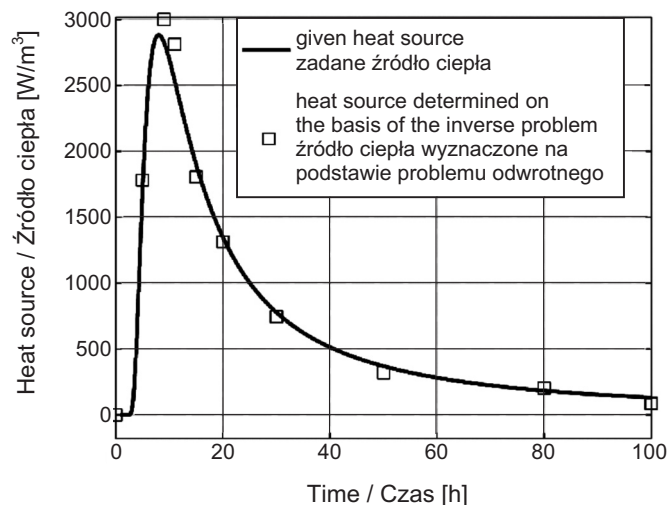
Fig. 4. Comparison of temperature distributions: preset temperature (colored lines) and temperature calculated on the basis of the inverse model solution (black lines)
Rys. 4. Porównanie rozkładu temperatury założonej (kolorowe linie) oraz obliczonej na podstawie wyznaczonych parametrów z modelu odwrotnego (czarne linie)

Table 1. Comparison of selected coefficients describing the specific heat and the thermal conductivity coefficient with the values determined by the inverse problem solution

Tablica 1. Porównanie zadanych współczynników określających ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa ciepła z wartościami wyznaczonymi za pomocą rozwiązania problemu odwrotnego

	Conductivity coefficient k Współczynnik przewodnictwa		Specific heat c_p Ciepło właściwe	
	b_k [W/(m·K)]	k_{∞} [W/(m·K)]	b_{c_p} [J/(kg·K)]	$c_{p_{\infty}}$ [J/(kg·K)]
Assumed parameters / Parametry zadane	1.7	1.3	950	995
Calculated parameters / Parametry wyznaczone	1.701	1.323	934.59	1051.18

Fig. 5. Comparison of the heat source given by formula (16) with the set values based on the inverse problem
 Rys. 5. Porównanie źródła ciepła zadanego wzorem (16) z wyznaczonymi wartościami na podstawie problemu odwrotnego



3.2. WYNIKI WERYFIKACJI DOŚWIADCZALNEJ

Analiza numeryczna wykazała, że rozwiązanie problemu odwrotnego daje rezultaty zgodne z założeniami modelu. W celu weryfikacji modelu przeprowadzono badania doświadczalne w przypadku trzech mieszanek betonowych. Skład mieszanek podano w Tablicy 2. Zastosowany popiół lotny wapienny był ubocznym produktem spalania węgla brunatnego w Elektrowni Bełchatów – skład chemiczny popiołu i właściwości fizyczne podano w [21]. Przebieg zmian temperatury w czasie twardnienia betonów w jednowymiarowej formie został przedstawiony na Rys. 6, 7 i 8. Na Rys. 9 zestawiono wyznaczone wartości ciepła twardnienia dla trzech mieszanek, zaś parametry określające ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa cieplnego dla trzech rozważanych mieszanek betonowych zamieszczono w Tablicach 3 i 4. Z Rys. 9 widać, że ilość wydzielonego ciepła podczas twardnienia betonu jest zależna od ilości zawartości cementu w mieszance. Wartości ciepła właściwego są porównywalne w przypadku trzech rozważanych mieszanek, zaś w przypadku współczynnika przewodnictwa ciepła jego wartość maleje wraz z zawartością cementu.

3.2. RESULTS OF EXPERIMENTAL VERIFICATION

The numerical analysis revealed that the solution to the inverse problem gave results in accordance with the assumptions of the model. In order to verify the model, the experimental tests were performed on three concrete mixtures of compositions given in Table 2. The applied high-calcium fly ash was a by-product generated during the brown coal combustion in Belchatow Power Plant. Its chemical composition and physical properties were given in [21]. The temperature evolution during the hardening of concrete in the one-dimensional mold is shown in Fig. 6, 7 and 8. Fig. 9 summarizes the determined values of the heat of hardening for the three mixtures, whereas the parameters defining the specific heat and the thermal conductivity coefficient for the three tested concrete mixes are provided in Tables 3 and 4. As Fig. 9 shows, the amount of the heat generated during the hardening of concrete is dependent on the amount of the cement content in the mixture. The specific heat values are comparable in the case of the three considered mixtures, meanwhile in the case of the heat conduction coefficient, the value decreases with the content of cement.

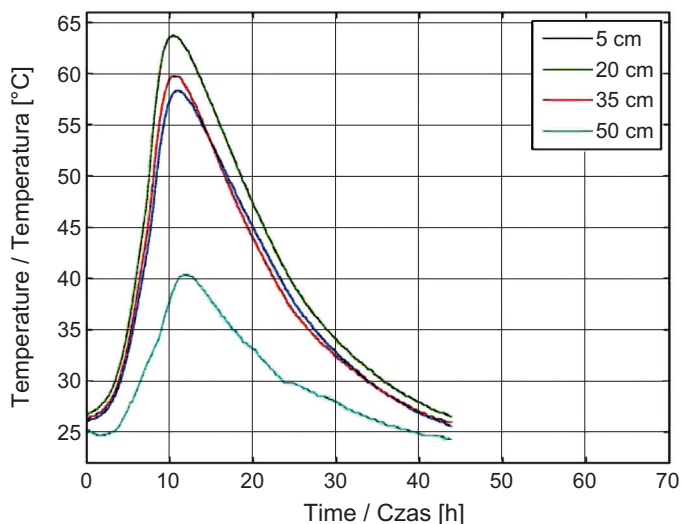


Fig. 6. Temperature evolution in time during hardening of concrete in 1D mold – the mixture PP50 0
 Rys. 6. Przebieg zmian temperatury w czasie w betonie twardniejącym w formie 1D – mieszanka PP50 0

Table 2. Composition of concrete mixtures to study self-heating of concrete with high-calcium fly ash and with granodiorite aggregates

Tablica 2. Skład mieszanek betonowych do badania samonagrzewania betonu z dodatkiem popiołu lotnego wapiennego oraz z kruszywem granodiorytowym

Components of concrete mixture Składniki mieszanki betonowej	Content of components in the mixture / Zawartość składników w mieszance [kg/m ³]		
	PP50 0	P50 0	P50 60 Ws
Cement CEM I 42.5 R Górażdże Cement CEM I 42,5R Górażdże	800	400	160
Sand 0-2 mm Piasek 0-2 mm	290	580	547
Coarse aggregate 2-8 mm – crushed granodiorite Kruszywo grube 2-8 mm – grys granodiorytowy	305	625	625
Coarse aggregate 8-16 mm – crushed granodiorite Kruszywo grube 8-16 mm – grys granodiorytowy	295	615	615
High-calcium fly ash – Bełchatów Power Plant Popiół lotny wapienny – Elektrownia Bełchatów	0	0	240
Water Woda	400	200	200

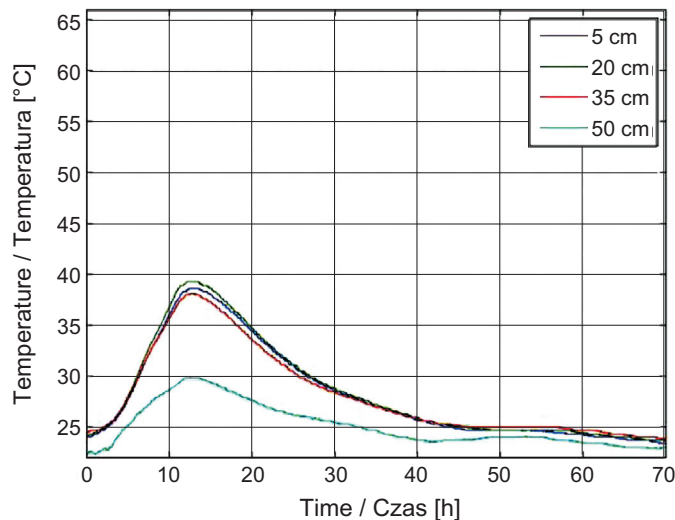


Fig. 7. Temperature evolution in time during hardening of concrete in 1D mold – the mixture P50 0

Rys. 7. Przebieg zmian temperatury w czasie w betonie twardniejącym w formie 1D – mieszanka P50 0

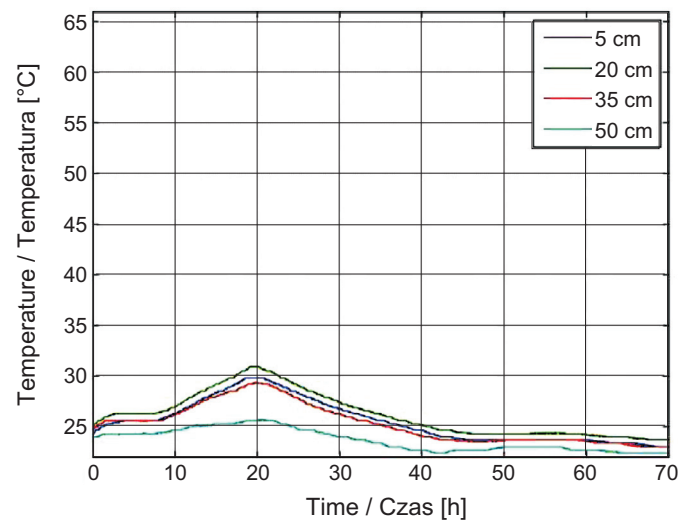


Fig. 8. Temperature evolution in time during hardening of concrete in 1D mold – the mixture P50 60 Ws

Rys. 8. Przebieg zmian temperatury w czasie w betonie twardniejącym w formie 1D – mieszanka P50 60 Ws

Table 3. The values of heat capacity for the three concrete mixtures

Tablica 3. Wyznaczone wartości ciepła właściwego dla trzech mieszanek betonowych

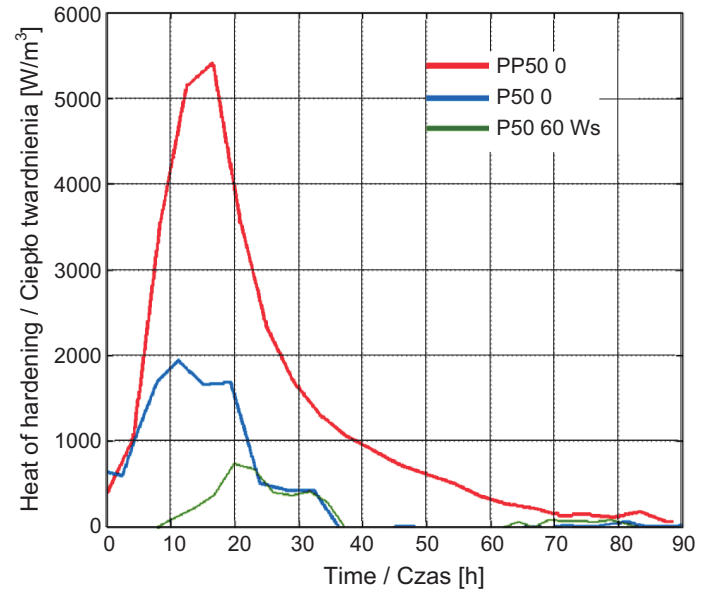
Mixture designation / Nazwa mieszanki	b_{cp} [J/(kg·K)]	$c_{p\infty}$ [J/(kg·K)]
PP50 0	915.77	919.93
P50 0	910.11	923.99
P50 60 Ws	912.15	917.40

Table 4. The values of thermal conductivity for the three concrete mixtures

Tablica 4. Wyznaczone wartości współczynnika przewodnictwa dla trzech mieszanek betonowych

Mixture designation / Nazwa mieszanki	b_k [W/(m·K)]	k_∞ [W/(m·K)]
PP50 0	1.628	1.476
P50 0	1.592	1.327
P50 60 Ws	1.398	1.269

Fig. 9. Heat of hardening for the three concrete mixtures
Rys. 9. Ciepło twardnienia dla trzech badanych mieszanek



4. WNIOSKI

Opracowana metoda wyznaczania parametrów termofizycznych betonów w młodym wieku, została oparta na autorskim algorytmie rozwiązującym zadanie przewodnictwa ciepła metodą różnic skończonych oraz na algorytmie rozwiązywania zadania odwrotnego. Uzyskane na tej podstawie rezultaty symulacji numerycznych potwierdziły prawidłowość proponowanego modelu. Stwierdzono, że wartości parametrów termofizycznych otrzymane na podstawie analizy danych pomiarowych są poprawne jakościowo. Ich weryfikacja jest możliwa poprzez porównanie obliczonej oraz zmierzonej temperatury w obiektach o bardziej skomplikowanej geometrii. Zaletą opracowanej metody jest możliwość wyznaczenia ciepła twardnienia w przypadku dowolnej mieszanki betonowej bez potrzeby znajomości jej dokładnego składu.

INFORMACJE DODATKOWE

Praca była współfinansowana ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego w ramach Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka, nr projektu POIG.01.01.02-24-005/09.

BIBLIOGRAFIA / REFERENCES

- [1] *Kiernożycki W.*: Betonowe Konstrukcje Masywne: Teoria, Wymiarowanie, Realizacja. Stowarzyszenie Producentów Cementu, Kraków, 2003
- [2] *Klemczak B.*: Modelowanie efektów termiczno-wilgotnościowych i mechanicznych w betonowych konstrukcjach masywnych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2008
- [3] *Bentz D.P.*: A review of early-age properties of cement-based materials. *Cement and Concrete Research*, **38**, 2008, 196 - 204
- [4] *Bentz D.P., Peltz M.A., Duran-Herrera A., Valdez P., Juarez C.*: Thermal properties of high-volume fly ash mortars and concretes. *Journal of Building Physics*, **34**, 2011, 263 - 275
- [5] *Witkowski P.*: Termodynamiczna teoria dojrzewania. Zastosowanie do konstrukcji masywnych z betonu. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 1998

4. CONCLUSIONS

The developed method for determining the thermophysical parameters of concrete at an early age was based on the authors' algorithm solving the heat conduction equation by means of the finite difference method and on the algorithm for solving the inverse problem. Obtained, on the basis of the above mentioned method, results of numerical simulations confirmed the correctness of the proposed model. It was found that the thermophysical parameters obtained on the basis of the analysis of the measured data are qualitatively correct. Their verification is possible by comparing the calculated and the measured temperature in the objects of more complex geometry. The advantage of this method is the ability to determine the heat of hardening for any concrete mixture without knowing its exact composition.

ACKNOWLEDGEMENT

The research is a part of the research project "Innovative cement based materials and concrete with high calcium fly ashes" co-financed by the European Union from the European Regional Development Fund.

- [6] *Ballim Y.*: A numerical model and associated calorimeter for predicting temperature profiles in mass concrete. *Cement & Concrete Composites*, **26**, 2004, 695 - 703
- [7] *Phillips S.W., Aquino W., Chirdon W.M.*: Simultaneous Inverse Identification of Transient Thermal Properties and Heat Sources Using Sparse Sensor Information. *Journal of Engineering Mechanics*, **133**, 2007, 1341 - 1351

- [8] *Carslaw H.S., Jaeger J.C.*: Conduction of Heat in Solids (2nd edition). Oxford University Press, New York, 1959
- [9] *Jonasson J.E., Retelius A.*: Zastosowanie metody wskaźnika dojrzałości do oceny rozwoju wytrzymałości betonu na ściskanie. *DROGI I MOSTY*, **10**, 3, 2011, 23 - 37
- [10] RILEM TC 119-TCE: Avoidance of Thermal Cracking in Concrete at Early Ages. *Materials and Structures*, **30**, 1997, 451 - 464
- [11] *Schiesser W.E., Griffiths G.W.*: A Compendium of Partial Differential Equation Models: Method of Lines Analysis with Matlab. Cambridge University Press, New York, 2009
- [12] *Wang Y.X., Wen J.M.*: Gear Method for Solving Differential Equations of Gear Systems. *Journal of Physics: Conference Series*, **48**, 2006, 143 - 148
- [13] *Vozár L.*: A computer-controlled apparatus for thermal conductivity measurement by the transient hot wire method. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, **46**, 2, 1996, 495 - 505
- [14] *Mikulic D., Milovanovic B., Gabrijel I.*: Analysis of thermal properties of cement paste during setting and hardening. *Proceedings of International Symposium on Nondestructive Testing of Materials and Structures, Istanbul*, 2011, 465 - 471
- [15] *Özisik M.N., Orlande H.R.B.*: Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications. Taylor & Francis, New York, 2000
- [16] *Golub G.H., Hansen P.C., O'Leary D.P.*: Tikhonov regularization and total least squares. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **21**, 2000, 185 - 194
- [17] *Audet Ch., Dennis Jr J. E.*: Analysis of Generalized Pattern Searches. *SIAM Journal on Optimization*, **13**, 3, 2003, 889 - 903
- [18] *Kolda T.G., Lewis R.M., Torczon V.*: A generating set direct search augmented Lagrangian algorithm for optimization with a combination of general and linear constraints. Technical Report SAND2006-5315, Sandia National Laboratories, 2006
- [19] *Neville A.M.*: Właściwości betonu. Wydawnictwo Polski Cement, Kraków, 2000
- [20] *Brandt A.M., Dąbrowski M., Dębowski T., Glinicki M.A., Holnicki-Szulc J., Knor G., Ossowski A., Ranachowski Z., Sobczak M.*: Technika identyfikacji procesu transportu ciepła w twardniejących elementach betonowych. Raport z projektu POIG „Innowacyjne spoiwa cementowe i betony z wykorzystaniem popiołu lotnego wapiennego”, Warszawa, 2011
- [21] *Józwiak-Niedźwiedzka D., Gibas K., Glinicki M.A., Nowowiejski G.*: Wpływ dodatku popiołu lotnego wapiennego na szczelność betonów w odniesieniu do mediów agresywnych. *DROGI I MOSTY*, **10**, 3, 2011, 39 - 61

STANDARDS / NORMY

PN-EN 196-9:2010 Metody badania cementu. Część 9: Ciepło hydratacji. Metoda semiadiabatywna

PN-EN 196-8:2010 Metody badania cementu. Część 8: Ciepło hydratacji. Metoda rozpuszczania