Ryszard Wojnar
Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk
Warszawa 2020

Autoreferat

Spis treści

1 Imię i nazwisko

Ryszard Wojnar

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

mgr fizyki, dr fizyki statystycznej

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu oraz dłuższych pobytach naukowych

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, adiunkt w latach 1974-2005, kierownik grantu w latach 2005-2008. w latach 1979-1980 pobyt w Institut National Polytechnique de Grenoble. W latach dziewięćdzisiątych spędziłem łącznie około dwu miesięcy w Instytucie Wymiany Ciepła i Masy (Akademičeskij Naučnyj Kompleks Institut Teplo- i Massoobmena Imeni A.V. Lykova) w Mińsku Białoruskim. Obecnie: prace zlecone w IPPT PAN.

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003r. będącego podstawą ubiegania się o stopień doktora habilitowanego

4.1 Tytuł monotematycznego cyklu oraz wykaz publikacji wchodzących w jego skład

Osiągnięciem naukowym będącym podstawą ubiegania się o stopień naukowy doktora habilitowanego jest cykl dziesięciu prac opublikowanych w czasopismach o zasięgu międzynarodowym, zwany dalej *Cyklem* i zatytułowany: **Fizyka matematyczna zjawisk przenoszenia w ośrodkach jednorodnych i niejednorodnych: wymiana ciepła, masy i pędu**

W skład cyklu wchodzą publikacje:

[H1] Kinetic equation for the dilute Boltzmann gas in an external field, *Acta Physica Polonica* B **49** (5) 905–920 (2018). IF 0.998.

[H2] Random walk, Rayleigh-Kac' scheme and diffusion equation, *Reports on Mathematical Physics* **72** (3), 321–332 (2013). IF 1.042.

[H3] R. Wojnar, Thermodiffusion and nonlinear heat equation, in: *Thermal nonequilibrium phenomena in fluid mixtures*, Lecture notes in physics ; Vol. 584, W. Kóhler and S. Wiegand (Eds.), pp. 93120, Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo 2002.

[H4] On nonlinear heat equations and diffusion in porous media, *Reports on Mathematical Physics* **44** (1), 291–300 (1999). IF 1.042.

[H5] Nonlinear heat equation and two-level diffusion, *Reports on Mathematical Physics* **49** (2) 415–425 (2002). IF 1.042.

[H6] Boussinesq equation for flow in an aquifer with time dependent porosity, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, *Technical Sciences* **58** (1) 165–170 (2010). IF 1.005.

- [H7] Flow of Stokesian fluid through a cellular medium and thermal effects, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, *Technical Sciences* **62** (2) 321–329 (2014). IF 1.005.
- [H8] współautor **J. J. Telega**, Flow of electrolyte through porous piezoelectric medium: macroscopic equations, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics* **328** (2) 225–230 (2002). IF 1.09.
- [H9] Thermodynamics of solids with a state equation, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **37** (4) 809–827 (1999). IF 0.831.
- [H10] Homogenization of piezoelectric solid and thermodynamics, *Reports on Mathematical Physics* **40** (3), 585–598 (1997). IF 1.042.

Łączny IF (*impact factor*) czasopism tego cyklu wynosi 9.097.

Podaję też dodatkowy wykaz publikacji własnych, na które powołuję się również w rozdziale 4.3 *Wprowadzenie - tło naukowe badań*.

- [HD1] On elastic moduli of a two dimensional two phase system, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **77** (2) S469–S472 (1997).
- [HD2] współautor **J. Wojnar**, On the Smoluchowski flow in zeta-potential, *Journal of Technical Physics* **47** (1) 39–46 (2006). IF 0.470.
- [HD3] Homogenization in viscoelasticity and thermal effects, *Reports on Mathematical Physics* **33** (1–2) 283–294 (1993).
- [HD4] Subdiffusion with external time modulation, *Acta Physica Polonica* A **114** (3) 607–611 (2008).
- [HD5] Random walk, diffusion and wave equation, *Acta Physica Polonica* B **44** (5) 1067–1084 (2013).
- [HD6] The Brownian motion in a thermal field, *Acta Physica Polonica* B **32** (2) 333–349 (2001).
- [HD7] Nonlinear heat equation and thermodiffusion, *Reports on Mathematical Physics* **46** (1) 295–301 (2000).
- [HD8] On a Prigogine conjecture (Sur la théorème de Prigogine), *Entropie*(Paris) **38** (239–240) 158–161 (2002).
- [HD9] Two-level diffusion, random walk and uniqueness, *Reports on Mathematical Physics* **68** (1) 85–96 (2011).
- [HD10] Heuristic derivation of Brinkman's seepage equation, *Technical Sciences* **20** (4) 359–374 (2017).
- [HD11] współautor **J. J. Telega** Flow of conductive fluids through poroelastic media with piezoelectric properties, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **36** (3) 775–794 (1998).
- [HD12] Distortion equation of motion in linear incompatible elastodynamics, *Archives of Mechanics* **51** (1) 3–13 (1999).
- [HD13] Homogenization of stress equations of motion in linear elastodynamics, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **30** (3) 545–565 (1992).
- [HD14] współautor **J. J. Telega**, Piezoelectric effects in biological tissues, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **40** (3) 723–759 (2002).

[HD15] Piezoelectric phenomena in biological tissues, in: Gianni Ciofani and Arianna Menciassi (Eds.) *Piezoelectric nanomaterials for biomedical applications*, Springer, Heidelberg - New York - Dordrecht - London 2012, pp. 173–185.

4.2 Dane bibliometryczne

Na mój dorobek naukowy po doktoracie składa się: 60 publikacji w czasopismach posiadających *impact factor* i 20 rozdziałów w wydawnictwach monograficznych. Wg bazy bibliometrycznej *Web of Science* całkowita liczba cytowań wynosi 98, bez autocytowań 83, indeks h6, wg *Google Scholar* liczba cytowań wynosi 419, *h-index* wynosi 10, a *i10-index* - 12.

4.3 Wprowadzenie - tło naukowe badań

4.3.1 Ogólny rzut oka na dziedzinę badań

Już pierwszy rzut oka na otaczającą nas rzeczywistość wskazuje na jej różnorodność. Nawet pojedyncze przedmioty mają skomplikowaną budowę, nie mówiąc już o nawet najprostszych organizmach żywych. Dzięki różnorodności mogą powstawać nowe substancje. Przykładem może być szereg napięciowy metali, zgodnie z którym metal o niższym potencjale normalnym wypiera z roztworu soli metal o wyższym potencjale. Dzięki temu zachodzą reakcje redukcji i utleniania.

W przyrodzie i w zastosowaniach praktycznych zachodzą procesy *analizy* substancyj, wyłaniania ich składników, i wykorzystywania tych składników dla *syntezy* nowych materiałów. Świat w całej swej różnorodności zbudowany jest z 81 pierwiastków trwałych i 9 naturalnych pierwiastków promieniotwórczych, wśród których najważniejsze są tor i uran.

W skład białek organizmów żywych wchodzi głównie 20 aminokwasów. Aminokwasy są grupą organicznych związków chemicznych zawierających zasadową grupę aminową oraz grupę karboksylową. Dla istnienia organizmów żywych prócz wodoru istotnych jest 6 pierwiastków, sąsiadów w tablicy Mendelejewa: C, N, O i Si, P, S. Azot N różni się od węgla C i tlenu O tylko jednym protonem w jądrze i jednym elektronem na powłoce, a tak różne są własności tych pierwiastków. Krzem Si, fosfór P, siarka S też są różne mimo bliskości w układzie okresowym. Węgiel i krzem są obok siebie w tej samej kolumnie węglowców. Atomy węgla mogą jednak tworzyć pierścienie, a nawet płaty grafenowe, natomiast atomy krzemu łączą się z sobą poprzez atomy tlenu. Z 20 aminokwasów 19 jest lewoskrętnych. Znane są dwie odmiany kwarcu: lewo- i prawoskrętna.

Różne miejsca tej samej substancji mogą się różnić od siebie swoim stanem, np. temperaturą, skutkiem czego jest możliwy przepływ ciepła, albo ciśnieniem. We wzorze barometrycznym, [1],

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{gmh}{k_{\mathrm{B}}\mathcal{T}}\right) \tag{1}$$

występuje zastępcza masa cząsteczki powietrza m obliczona jako *średnia arytmetyczna* z zawartości w powietrzu azotu (78%), tlenu (21%) i argonu (1%): $(28 \cdot 78 + 32 \cdot 21 + 40 \cdot 1)\%$ g/mol=28,96 g/mol, co po podzieleniu przez stałą Avogadra $\mathrm{N}_{\mathrm{Av}} = 6,022 \cdot 10^{23}$/mol daje $m = 4,81 \cdot 10^{-23}$g. Symbol g oznacza przyspieszenie ziemskie, h to wysokość względem poziomu odniesienia, $k_{\mathrm{B}} = 1.380 \cdot 10^{-23}$J/K jest stałą Boltzmanna, $\mathcal{T}$ - temperaturą bezwzględną w kelwinach.

Cząstki zawiesiny zachowują się jak cząsteczki gazu i w stałej temperaturze podlegają wzorowi (1). W innej skali wykorzystał to Jean Perrin do wyznaczenia liczby k_{B}, a przez to i liczby Avogadra, [2]. Wysokości h występujące w doświadczeniu Perrina zawierały się między 5 μm a 100μm, a zawiesina składała się z ziarenek gumiguty o masie $1,25 \cdot 10^{-12}$g. Dla porównania masa atomu wodoru wynosi $1,68 \cdot 10^{-24}$g, a masa koronawirusa $7 \cdot 10^{-18}$g.

Jeśli mamy płytę kwadratową podzieloną na dwie równe części prostokątne, z których jedna ma oporność ρ_1, a druga oporność ρ_2, to dla prądu elektrycznego płynącego prostopadle do linii podziału oporność zastępcza wynosi $\rho_\perp = (\rho_1 + \rho_2)$, a płynącego wzdłuż linii podziału oporność zastępcza wynosi $\rho_\parallel = 2\rho_1\,\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$. W pierwszym wypadku mamy *średnią arytmetyczną*, w drugim - *harmoniczną*. Ośrodek jest więc anizotropowy ze względu na przepływ prądu.

Jeśli jednak w płycie rozmieścić składniki o opornościach ρ_1 i ρ_2 na przemian, jak na szachownicy, to oporność zastępcza wynosi jak to pokazali niezależnie od siebie Joseph B. Keller i Aleksandr M. Dykhne $\rho_{\text{szach}} = \sqrt{\rho_1\,\rho_2}$, czyli jest *średnią geometryczną*, [4, 5]. Wynik otrzymuje się dzięki spostrzeżeniu o możliwości dwoistego opisu prądów w takim układzie. Podobny wzór zachodzi dla szachownicy zbudowanej z dwu rodzajów kwadratów sprężystych, [HD1], [6].

James Clerk Maxwell rozpatrzył inne zagadnienie homogenizacyjne, [3]. Kulki w liczbie n o promieniu a_1 i oporności ρ_1 są rozrzucone losowo w kuli o promieniu a_2 i oporności ρ_2. Oporność zastępcza takiego układu dana jest wzorem

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{2\rho_1+\rho_2+p(\rho_1-\rho_2)}{2\rho_1+\rho_2-2p(\rho_1-\rho_2)}\,\rho_2 \qquad \text{przy tym} \qquad p = n\,\frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Promienie kulek powinny być małe w porównaniu z odległością między nimi tak, żeby stężenie wtrąceń było małe. Ze względu na małość p można wzór Maxwella zlinearyzować otrzymując

$$\rho_{\text{eff}} = \left(1 + 3p\frac{\rho_1-\rho_2}{2\rho_1+\rho_2}\right)\rho_2$$

Poprawki wyższego rzędu można znajdują się w pracach szkoły Vladimira Mityusheva, np. [7].

Izaak Newton opisał w Księdze I *Principiów* stworzoną przez siebie mechanikę ruchu ciał bez tarcia. Księgę II swego *opus magnum* poświęcił dynamice ciał z uwzględnieniem tarcia. W rozdziale VII tej Księgi podany jest model płynu jako układu zderzających się cząstek, których ruch spełnia równania mechaniki. Gdy czyta się tę Księgę wydaje się, że Autor napisze zaraz, że średnia energia kinetyczna takiej cząstki jest proporcjonalna do temperatury. Na to jednak trzeba było czekać niemal dwa wieki, do prac Maxwella i Boltzmanna. W czasach Newtona pojęcia ciepła i temperatury nie były jeszcze dobrze rozróżniane. Tym niemniej, Newton w roku 1701 podał prawo stygnięcia ciał, dyskretny analog prawa Fouriera: szybkość utraty ciepła jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą ciała a temperaturą otoczenia, przy założeniu, że różnica ta nie jest zbyt duża, [8, 9].

Newton przeprowadził liczne doświadczenia nad zjawiskami cieplnymi, ustalił prawo przepływu ciepła, ale nie podał związku ciepła z mechaniką. Budowa pomostu między mechaniką a nauką o cieple zajęła następne stulecia, [10]-[13].

W tym przejściowym okresie uważano ciepło za rodzaj nieważkiego płynu, zwanego *cieplikiem* (fr. *calorique*, ang. *caloric*). Jedną z wersji teorii cieplika podał Antoni Lavoisier, [14]. Cieplik miał przepływać od ciał cieplejszych do bardziej chłodnych, a jego ilość na świecie miała być zachowana. Nawet dzisiaj, gdy z zasady odrzuca się teorię cieplika, w celach poglądowych mówi się o *strumieniu ciepła*, choćby przy wywodzie równania Laplace'a dla opisu przestrzennego rozkładu temperatury.

Nawet jeśli przyjąć pogląd Immanuela Kanta, że rzeczy same w sobie są niepoznawalne, to znaczy, że rzeczywistość sama w sobie jest zakryta przed ludzkim rozumem, to jednak jak zwraca uwagę Józef Fourier zjawiska fizyczne podlegają prostym i stałym prawom, które można odkryć przez obserwację, i których badanie jest przedmiotem filozofii przyrody. Idąc dalej za Fourierem widzimy, że ciepło, podobnie jak grawitacja przenika całą materię wszechświata, i zbadanie wniosków stąd płynących jest jednym z najważniejszych zadań fizyki, [15]. Podobną opinię o nauce o cieple wyraził w swej autobiografii Albert Einstein, gdy pisał, że "teoria jest tym bardziej przekonywująca, im prostsze są jej przesłanki i im obejmuje szerszy zakres zjawisk. Termodynamika jest jedyną teorią o powszechnej stosowalności i o niepodważalnej podstawie.", [16], również [17].

W nauce o cieple i pracy występują dwie istotne zmienne stanu: energia i entropia. Są jak księgowy i dyrektor, napisał Robert Emden w analogii do działania przedsiębiorstwa, [18]. Termodynamika nie tylko tłumaczy zjawiska przyrody, ale jest narzędziem pracy inżynierii cieplnej, [19]. Zwrócił na to uwagę już Sadi Carnot, [20]. W mechanice klasycznej zachowanie się układu punktów materialnych opisywane jest przez układ różniczkowych równań ruchu. Równania ruchu opisują zachowanie się układu fizycznego jako układu funkcji matematycznych wyrażonych przez zmienne dynamiczne. Podejście oparte o mechanikę, znane jako fizyka statystyczna, konkurencyjne do termodynamicznego jest to dzieło takich uczonych jak James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann, Josiah Willard Gibbs, [21]-[25]. W tym ujęciu obok mechaniki klasycznej podstawową rolę pełni rachunek prawdopodobieństwa.

Niektóre energetyczne poziomy atomowe są metastabilne. Przejścia między stanami metastabilnymi nie są niemożliwe, lecz tylko mało prawdopodobne, i ostatecznie mogą zajść przejścia elektronów do stanu o niższej energii. Roman S. Ingarden w r. 1963 wprowadził pojęcie temperatur wyższego rzędu, [26, 27]. Wytworzenie inwersji obsadzeń poziomów atomowych jest konieczne do działania laserów, [28]-[30]. Dwutemperaturowe układy znajdują szerokie zastosowania, porównaj rozdział 4.5.3.

Zdarzenia przyrodnicze, takie jak trzęsienia ziemi, wybuchy wulkanów, zjawiska meteorologiczne mają za swoją przyczynę źródła ciepła, pochodzące z wnętrza Ziemi lub od promieniowania słonecznego. A więc ruch mas związany jest z pojawieniem się źródeł ciepła.

Z powiązania pól cieplnych i grawitacyjnych wynika ewolucja gwiazd, w tym i Słońca. Gorąca korona słoneczna stale rozprasza się w przestrzeni, tworząc wiatr słoneczny, strumień naładowanych cząstek, który rozciąga się do heliopauzy odległej około 100 jednostek astronomicznych.

Jądro Słońca, które rozciąga się od środka do około 20–25% promienia słonecznego wytwarza energię cieplną poprzez syntezę jądrową. Promieniowanie gamma powstałe w reakcji syntezy jest pochłaniane po przebyciu zaledwie kilku milimetrów plazmy słonecznej, a następnie ponownie emitowane w kierunku losowym i z nieco mniejszą energią. Mamy więc do czynienia z *dyfuzją fotonów*. Skutkiem tego dotarcie promieniowania do powierzchni Słońca jest długotrwałe. Oszacowania mieszczą się w zakresie od 10 000 do 170 000 lat, [31]-[35].

Naturalne reaktory jądrowe mogą być źródłem energii cieplnej wewnątrz Ziemi. Znane są dwa złoża uranu, w których potwierdzono wystąpienie spontanicznych procesów rozszczepienia uranu, czyli istnienie naturalnych reaktorów jądrowych: w Oklo i Bangombé w Gabonie. Można uważać, że podobne georeaktory występują we wnętrzu Ziemi. Siły grawitacji wspomagają dyfuzję i prowadzą do gromadzenia się ciężkich pierwiastków radioaktywnych, które po osiągnięciu masy krytycznej zmieniają się w naturalne reaktory jądrowe, [36].

W skali zjawisk biologicznych procesy życiowe, na poziomie komórki i organizmu zależą istotnie od temperatury, [37]. Harry H. Pennes sformułował zasadę zachowania energii cieplnej w tkance przez którą przepływa krew

$$\rho\, C \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + h_m + h_b$$

Tutaj ρ i C odnoszą się do tkanki, κ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego tkanki, h_m jest szybkocią wytwarzania ciepła przez procesy metaboliczne w jednostce objętości tkanki, zaś h_b oznacza szybkość wymiany ciepła między krwią i tkanką

$$h_b = v \rho_b C_b (1 - \alpha_{\mathrm{eq}})(T_a - T)$$

przy czym v jest szybkością przepływu przez jednostkę objętości tkanki, ρ_b jest gęstością krwi, C_b jest ciepłem właściwym krwi, α_{eq} jest czynnikiem, który opisuje niezupełną równowagę cieplną między krwią i tkanką, $0 \leq \alpha_{\mathrm{eq}} \leq 1$, wielkość T_a jest temperaturą krwi tętniczej, a T jest miejscową temperaturą tkanki. Równanie Pennesa było wykorzystywane przez licznych autorów, [38]-[40].

W ramach wprowadzenia do tematu moich badań naukowych w dalszym ciągu niniejszego rozdziału 4.3 zostaną przedstawione podstawowe pojęcia fizyczne i metody matematyczne stosowane w cyklu monotematycznym zawierającym prace [H1]–[H10].

W rozdziale 4.4 zajmujemy się zjawiskiem dyfuzji w stałej temperaturze, a w rozdziale 4.5 zjawiskiem dyfuzji powiązanej z przepływem ciepła czyli termodyfuzji oraz zjawiskiem dyfuzji dwupoziomowej. Rozdział 4.6 omawia zjawiska sączenia płynu, w tym również i elektrolitu przez ośrodki porowate, a rozdział 4.7 poświęcony jest termosprężystości i piezotermosprężystości,

4.3.2 Fizyczne podstawy badań

1) Równanie ciągłości

Równanie ciągłości wyraża zasadę zachowania pewnej wielkości. W hydrodynamice jest to zasada zachowania masy. Jeśli gęstość cieczy jest $\rho = \rho(\boldsymbol{x}, t)$, i jeśli wprowadzimy *gęstość strumienia cieczy* $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$, to równanie ciągłości ma postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{j} = 0$$

Powyżej $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ oznacza prędkość cieczy w punkcie $\boldsymbol{x}$ w chwili t, [41]. Podobne prawa zachowania wprowadza się dla innych wielkości, ciepła, ładunku, [42, 43].

W przypadku dyfuzji Ficka, porównaj rozdziały 4.4 i 4.5,

$$\boldsymbol{j} = -D \, \nabla \rho$$

co po wstawieniu do równania ciągłości daje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \boldsymbol{\rho}$$

Tutaj D - to współczynnik dyfuzji. Rozwiązaniem ostatniego równania przy warunku początkowym

$$\rho(\boldsymbol{x}, t = 0) = \delta(\boldsymbol{x})$$

jest

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{8(\pi D t)^{3/2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Zgodnie z tym rozwiązaniem stężenie substancji rozchodzi się natychmiastowo po całej przestrzeni dla każdego czasu $t > 0$, co wskazuje na to, że związek $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ jest słuszny dla dostatecznie dużych czasów, ale nie dla czasów bardzo krótkich - porównywalnych z czasem zderzenia cząstek.

2) Zasady termodynamiki

Pierwsza zasada podaje bilans energetyczny układu przed i po jakimkolwiek procesie

$$\mathrm{d}U = \bar{\mathrm{d}}Q + \bar{\mathrm{d}}L$$

przy czym $\mathrm{d}U$ jest zmianą energii wewnętrznej układu, $\bar{\mathrm{d}}Q$ jest ciepłem pobranym, zaś $\bar{\mathrm{d}}L$ - pracą wykonaną na układzie. Druga zasada zajmuje się kierunkiem procesu i twierdzi, że procesy naturalne biegną tylko w jednym kierunku i są nieodwracalne.

Wyrażenie różniczkowe dla ciepła $\bar{\mathrm{d}}Q$ pobranego w sposób odwracalny przez termicznie jednorodny układ jest całkowalne. Wśród możliwych mianowników całkujących jeden oznaczany przez T jest uniwersalną funkcją temperatury empirycznej, nie zależną ani od reszty parametrów stanu, ani od indywidualnych własności ciał. Równanie

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}Q}{T} = \mathrm{d}S$$

określa funkcję stanu S zwaną *entropią*, [23].

W procesach zachodzących w układzie adiabatycznie osłoniętym entropia jest funkcją niemalejącą

$$S_{\mathrm{konc}} \geq S_{\mathrm{pocz}}$$

Znak równości odnosi się tylko do procesów odwracalnych, [23]. W procesie naturalnym układ nie jest w stanie równowagi. Dlatego w ogólności nie potrafimy opisać takiego układu. Można jednak ocenić skutki procesu, jeśli stan początkowy i końcowy są stanami równowagi, [44].

Jeśli Γ jest liczbą mikrostanów, to przy podstawowym dla fizyki statystycznej założeniu, że prawdopodobieństwo każdego mikrostanu jest takie samo i wynosi $p_i = 1/\Gamma$, entropię układu określamy jako

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i$$

Tak określona entropia spełnia związki matematyczne znane z termodynamiki fenomenologicznej, [25]. To samo założenie prowadzi do rozkładu Gibbsa

$$p(i) = \frac{1}{Z}\,\mathrm{e}^{-\beta E_i} \quad \text{przy tym} \quad Z = \sum_i \mathrm{e}^{-\beta E_i} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{1}{T}$$

dla układu należącego do zespołu kanonicznego Gibbsa [25].

4.3.3 Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa z przyjmie jakąś wartość w przedziale między x_1 a x_2 jest

$$P(x_1 < z < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x$$

Jeśli podstawimy $x_1 = x_0 - \frac{1}{2}\Delta x$ i $x_2 = x_0 + \frac{1}{2}\Delta x$, przy czym Δx jest wielkością małą i skorzystamy z rozwinięcia w szereg Taylora znajdziemy

$$P\left(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x < z < x_0 + \frac{1}{2}\Delta x\right) = p(x_0) + O[(\Delta x)^2]$$

Zgodnie z tym wzorem należy interpretować zwrot "prawdopodobieństwo, że wartość z leży między x a $x + \mathrm{d}x$ wynosi $p(x)\mathrm{d}x$ ", [25].

W przybliżeniu mechaniki klasycznej, dla płynu prostego za określenie mikrostanu uważamy podanie wszystkich $3N$ składowych położeń $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ i $3N$ składowych prędkości $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N$. Konfigurację przestrzenną układu podaje układ N położeń, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$, i gęstość prawdopodobieństwa znalezienia określonej konfiguracji jest $p_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \cdots \mathrm{d}\boldsymbol{r}_N$. W szczególności $p_1(\boldsymbol{r}_1)\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 = p_1(x_1, y_1, z_1)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1\mathrm{d}z_1$ oznacza prawdopodobieństwo, że cząstka nr 1 znajduje się w sześcianie o bokach $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}z_1$ zbudowanym wokół punktu $\boldsymbol{r}_1$

Równanie Liouville'a

spełniane przez N-cząstkową funkcję rozkładu $f_N = f_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N)$ jest postaci

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = -K_N f_N \tag{2}$$

przy czym

$$K_N = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} - \sum_{i<j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial \boldsymbol{r}_i}\left(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i} - \frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_j}\right) \tag{3}$$

zaś m_i to masa cząstki nr i, zaś u_{ij} oznacza potencjał oddziaływania cząstki nr i z cząstką nr j.

Entropia układu opisywanego równaniem Liouville'a nie ulega zmianie. Rzeczywiście, jeśli wprowadzić entropię Shannona, [45, 46],

$$s = -f_N \ln f_N \tag{4}$$

widać, że

$$\frac{\partial}{\partial t} S = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^N s = 0$$

Wystarczy skorzystać z równania Liouville'a, całkowania przez części i z założenia znikania funkcji f_N dla nieskończonych $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, \cdots, N$.

Teoria liniowej odpowiedzi została podana przez Ryogo Kubo, [10]. Zamiast równania Liouville'a (2) napiszmy

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = -K_N f_N + g(t) \tag{5}$$

gdzie $g(t)$ jest pewną funkcją czasu - *źródłem*. Wtedy rozwiązanie r-nia (5) może być zapisane w postaci

$$f_N(t) = \mathrm{e}^{-K_N t} f(0) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-K_N \tau} g(t-\tau) = \mathrm{e}^{-K_N t} f_N(0) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-K_N (t-\tau)} g(\tau) \tag{6}$$

Przypuśćmy teraz, że zamiast r-nia (5) mamy równanie

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = -(K_N + K_N') f_N \qquad \text{przy czym} \quad K_N' = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U(\boldsymbol{r}_i)}{\partial \boldsymbol{r}_i} \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_i} \tag{7}$$

Tu $U(\boldsymbol{r}_i)$ jest potencjałem zewnętrznym (elektrycznym, grawitacyjnym) działającym na cząstkę nr i. Przyjmujemy, że operator K_N' stanowi niewielkie zaburzenie operatora K_N.

W analogii do (6) zapisujemy pierwsze przybliżenie rozwiązania r-nia (7) w postaci

$$f_N^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{-K_N t} f(0) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-K_N \tau} K_N' \mathrm{e}^{-K_N (t-\tau)} f(0) \tag{8}$$

przy tym

$$f_N(0) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)\cdots\varphi(v_N) \, \frac{\mathrm{e}^{-\beta U}}{Q} \qquad \text{oraz} \qquad Q = \int \mathrm{e}^{-\beta U} \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \tag{9}$$

jest rozkładem równowagowym. W warunkach ustalonych $\mathrm{e}^{-K_N t} f(0) = f(0)$ i wyrażenie (8) przyjmuje postać

$$f_N^{(1)}(t) = f_N(0) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \, \mathrm{e}^{-K_N \tau} K_N' f_N(0) \tag{10}$$

Przypuśćmy, że prąd $\boldsymbol{j}$ jest nośnikiem jakiejś wielkości, ładunku elektrycznego, masy,

$$\boldsymbol{j} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \tag{11}$$

i że gradient potencjału zewnętrznego jest

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{r}_i)}{\partial \boldsymbol{r}_i} = -\,\alpha_i \boldsymbol{E} \tag{12}$$

Tutaj α_i oznacza wielkość fizyczną, np. ładunek elektryczny ($\alpha_i = z_i e$), masę ($\alpha_i = m_i$) przenoszoną przez cząstkę o numerze i, zaś $\boldsymbol{E}$ to natężenie odpowiedniego pola zewnętrznego. Prąd całkowity

$$\boldsymbol{J}(t) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^N \boldsymbol{j} \, f_N^{(1)}(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^N \boldsymbol{j} \, \mathrm{e}^{-K_N \tau} K_N' f_N(0)$$

Uwzględniono tu fakt, że ze względu na nieparzystość $\boldsymbol{j}$ w $\boldsymbol{v}_i$, całka $\int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^N \, \boldsymbol{j} \, f_N(0) = 0$. Zbierając r-nia (7), (11) i (12) dostajemy

$$\boldsymbol{J} = \beta \boldsymbol{E} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^N \boldsymbol{j}(0)\boldsymbol{j}(\tau)$$

Stąd, w przypadku prądu elektrycznego przewodnictwo wynosi

$$\sigma = \beta \int_0^\infty \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^N \boldsymbol{j}(0)\boldsymbol{j}(\tau)$$

Ponieważ interesuje nas sytuacja równowagowa, z całkowaniem po czasie przeszliśmy do nieskończoności. Wynik nie zależy od rodzaju własności fizycznej α_i przenoszonej przez cząstkę nr i.

4.3.4 Termodynamika procesów nierównowagowych

Lars Onsager położył podwaliny pod termodynamikę procesów nieodwracalnych, [48, 49]. Istotę teorii Onsagera można znaleźć w podręczniku Landaua i Lifszica [41].

Rozpatrzmy jakiś układ zamknięty. Niech $x_1, x_2, ...$ będą pewnymi wielkościami opisującymi stan układu. W równowadze statystycznej entropia S całego układu powinna osiągać maksimum, to znaczy powinno być

$$X_i = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, ...$$

przy czym

$$X_i = -\frac{\partial S}{\partial x_i}$$

W stanie bliskim równowagi wszystkie wielkości x_i różnią się mało od ich wartości w stanie równowagi. Przy tym wielkości X_i są małe. W układzie zachodzą procesy prowadzące do równowagi, a wielkości x_i są funkcjami czasu. Prędkość zmian z dokładnością do wyrazów rzędu pierwszego dana jest wzorem

$$\dot{x}_i = \sum_k \gamma_{ik} \, X_k$$

Wielkości γ_{ik} zwane *współczynnikami kinetycznymi* są symetryczne względem indeksów

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$$

Prędkość zmian entropii wynosi

$$\dot{S} = -\sum_i X_i \, \dot{x}_i$$

W charakterze wielkości $\dot{x}_i$ mogą występować np. strumienie ciepła $\boldsymbol{q}$ albo masy $\boldsymbol{j}$.

Oliver Penrose i Paul C. Fife rozwinęli fenomenologiczną teorię kinetyczną, w której temperatura zmienia się w przestrzeni i w czasie. W takim wypadku powinno się specjalnie zadbać o to, by pierwsze i drugie prawo termodynamiki było zachowane. Penrose i Fife nazwali to żądanie zachowaniem *konzystencji termodynamicznej*, [50].

4.3.5 Metody matematyczne

1) Metoda operatorów rzutowych

Metoda operatorów rzutowych jest stosowana przede wszystkim w mechanice statystycznej.

Metoda działa w przestrzeni liniowej funkcji w przestrzeni fazowej i rzutuje na liniową podprzestrzeń wybranej funkcji z przestrzeni fazowej. Odkrył metodę Sadao Nakajima, do chemii fizycznej wprowadził Robert Zwanzig, [51, 52].

Zapisujemy równanie Liouville'a (2) skrótowo w postaci

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{K} f$$

Wprowadzamy operator rzutowy P i operator $Q = 1 - P$ tak, że

$$P + Q = 1$$

Piszemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Pf &= P\mathcal{K}Pf + P\mathcal{K}Qf \\ \frac{\partial}{\partial t} Qf &= Q\mathcal{K}Qf + Q\mathcal{K}Pf \end{aligned} \tag{13}$$

Z ostatniego równania

$$Qf = \mathrm{e}^{Q\mathcal{K}t}\, Q\, f(t=0) + \int_0^t \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{Q\,\mathcal{K}t'}\, Q\,\mathcal{K}Pf(t-t')$$

co po wstawieniu do pierwszego daje

$$\frac{\partial}{\partial t} Pf = P\mathcal{K}Pf + P\mathcal{K}\mathrm{e}^{Q\mathcal{K}t}\, Q\, f(t=0) + P\mathcal{K} \int_0^t \mathrm{d}t' \mathrm{e}^{Q\,\mathcal{K}t'}\, Q\,\mathcal{K}Pf(t-t')$$

Jeśli w chwili początkowej

$$Pf(t=0) = f(t=0) \qquad \text{wtedy} \qquad Qf(t=0) = 0$$

i drugi człon po prawej stronie znika. Oznaczmy przez f_{P} funkcję powstałą ze zrzutowania $f_{\mathrm{P}} \equiv Pf$. Wtedy otrzymujemy równanie kinetyczne

$$\frac{\partial f_{\mathrm{P}}}{\partial t} = P\mathcal{K} f_{\mathrm{P}} + \int_0^t \mathrm{d}t'\, \mathcal{G}(t') f_{\mathrm{P}}(t-t')$$

przy czym wyraz

$$\mathcal{G}(t) \equiv PL\, \mathrm{e}^{Q\,\mathcal{K}t}\, Q\mathcal{K}P$$

jest operatorem zderzeń. Metoda operatorów rzutowych ma liczne zastosowania w fizyce, [53]-[57].

2) Homogenizacja

Homogenizacja wykorzystuje ideę rozszerzenia obszaru homogenizowanego ciała w taki sposób, aby rozwiązanie byo przedstawione przez rozwinięcie wokół małego parametru. W kontekście ogólnych równań fizyki matematycznej ideę tę zaproponował Guido Sandri w latach sześćdziesiątych XX wieku, [58]. Jednak wcześniej inne procedury homogenizacyjne oparte o uśrednianie stosował Hendrik Antoon Lorentz do dielektryków i ośrodków magnetycznych, [59, 60] oraz Paul Karl Ludwig Drude do przewodników, [61, 62], porównaj [63]-[65].

Jedną ze stosowanych szeroko metod matematycznych do opisu zastępczych własności ciał niejednorodnych jest metoda dwuskalowej homogenizacji asymptotycznej opisana w monografiach, których autorami są A. Bensoussans, J. Lions and G. Papanicolaou, [66], E. Sanchez-Palencia [67], N. Bakhvalov and G. Panasenko [68] i V. Jikov *et al.*, [69].

Metody homogenizacji ośrodków termosprężystych zostały omówione w rozdziale tomu "Thermal Stresses", [70].

Niech $\Omega \subset I\!R^n, n = 2\,\mathrm{or}\,3$, będzie pewnym obszarem regularnym, a $\Gamma = \partial\Omega$ będzie granicą tego obszaru. Wprowadzamy parametr

$$\varepsilon = l/L,$$

przy czym l jest typową długością mikrostruktury, zaś L jest typową długością obszaru Ω.

Zgodnie z asymptotyczną metodą dwuskalową zamiast jednej zmiennej przestrzennej x, wprowadzamy dwie zmienne, makroskopową x and mikroskopową y, przy czym $y = x/\varepsilon$, a zamiast funkcji $f(x)$ rozważamy funkcję $f(x, y)$.

W konsekwencji, zamiast przestrzeni Ω rozważamy przestrzeń $\Omega \times Y$, przy czym Y jest komórką elementarną mikrookresowości. Zgodnie ze wzorem na pochodną zupełną

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{przy czym} \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

Stosując metodę dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych piszemy

$$f^\varepsilon = f^\varepsilon(x) = f^{(0)}(x,y) + \varepsilon^1 f^{(1)}(x,y) + \varepsilon^2 f^{(2)}(x,y) + \cdots$$

przy czym zakładamy, że funkcje $f^{(i)}(x, y),\ i = 0, 1, 2, \cdots$ są Y - okresowe. Wskaźnik górny ε oznacza mikrookresowość odpowiednich wielkości. Zakłada się milcząco, że wszystkie pochodne występujące w homogenizacji asymptotycznej są określone. Efekt niejednorodności mikrostrukturalnej opisany jest przez funkcje okresowe, tzw. funkcje *lokalne* na komórce.

Przykład: Przepływ elektrolitu wg Smoluchowskiego w potencjale dzeta

W pracy [HD2] metodę rozwinięć dwuskalowych zastosowano do analizy ustalonego nieściśliwego przepływu elektrolitu w polu elektrycznym. Odzyskano w ten sposób formułę Smoluchowskiego dotyczącą potencjału *dzeta* podwójnej warstwy elektrycznej (ang. *electric double layer - EDL*) i obserwacji, że ciśnienie nie jest stałe wzdłuż głębokości EDL, [71]. Wyprowadzono też analogiczną formułę dla przepływów ściśliwych.

Rozważmy ciecz-elektrolit w zbiorniku. Na granicy układu ciecz-ścianka zbiornika powstaje warstwa EDL o małej grubości. Gdy ciecz jest w spoczynku, potencjał elektryczny Ψ wytwarzany przez EDL ma wewnątrz cieczy stałą wartość Ψ_L, zaś wewnątrz warstwy wartość Ψ_S. Wartość potencjału zmienia się gwałtownie w kierunku $\boldsymbol{n}$ prostopadłym do ścianki, i pozostaje stała w kierunku $\boldsymbol{t}$ stycznym do ścianki. Zgodnie z twierdzeniem Gaussa ładunek elektryczny ρ^ε w cieczy dany jest wzorem

$$\rho^\epsilon = -\nabla \cdot (\epsilon\, \epsilon_0 \nabla \Psi)$$

przy czym ϵ i ϵ_0 są przenikalnościami elektrycznymi odpowiednio cieczy i próżni. Gdy pojawi się potencjał zewnętrzny Φ, całkowity potencjał elektryczny U staje się sumą dwu składników, $U = \Phi + \Psi$. Siła działająca na elektrolit jest $\boldsymbol{F} = -\rho^\epsilon\, \nabla\Phi$. Dla powolnych przepływów równanie hydrodynamiki jest postaci $\nabla p = \nabla\sigma' - \rho^\epsilon\, \nabla\Phi$, przy czym p jest ciśnieniem, a σ' tensorem naprężenia o składowych

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\, \delta_{ij}$$

przy czym $\boldsymbol{v}$ jest prędkością cieczy, a η i η' lepkościami, porównaj [41]. Po wstawieniu ostatniego związku do równania hydrodynamiki mamy

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\, \delta_{ij} \right] - \rho^\epsilon\, \nabla\Phi$$

Dla przepływów nieściśliwych, po rozwinięciu nieznanych pól: ciśnienia p, prędkości $\boldsymbol{v}$ i potencjału Φ w szeregi wg małego parametru i zastosowaniu opisanej wyżej analizy asymptotycznej dostajemy

$$\frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_3}\left(\eta\, v_i^{(0)} + \epsilon\, \epsilon_0 \Psi^{(0)} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_i}\right) = 0$$

Po scałkowaniu na komórce przy warunkach brzegowych: $v_i^{(0)} = 0, \quad \Psi^{(0)} = \Psi_S, \quad \text{dla} \quad y_3 = 0, \quad v_i^{(0)} = v_i \quad \Psi^{(0)} = \Psi_L \quad \text{dla} \quad y_3 = \delta/\varepsilon$ otrzymujemy prawo Smoluchowskiego

$$\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\eta}\, \epsilon\, \epsilon_0\, \zeta \boldsymbol{E} \tag{14}$$

przy czym $\zeta = \Psi_s - \Psi_L$, zaś $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$. Podobna analiza dla cieczy ściśliwych prowadzi do uogólnienia równania Smoluchowskiego dla cieczy ściśliwych.

Widać, że metoda homogenizacji pozwala wyprowadzić nowe prawo fizyczne. Innego przykładu dostarcza homogenizacja asymptotyczna niejednorodnego w sposób mikrookresowy ośrodka lepkotermosprężystego, [HD3]. W wyniku homogenizacji otrzymujemy w tym wypadku zamiast związków lokalnych związki ze splotem czasowym.

4.4 Dyfuzja

Dyfuzją nazywa się zmiana stężenia substancji w czasie wskutek niejednorodności własnego stężenia. Jest to zjawisko makroskopowe, wyjaśniane na poziomie mikroskopowym, które pełni ważną rolę w różnych procesach przyrodniczych, w szczególności w procesach biologicznych, chemicznych i technicznych. Poszukiwanie opisu i wyjaśnienia dyfuzji sięga czasu powstania praw dyfuzji Ficka. Mianowicie, Adolf Fick zauważył analogię między przepływem ciepła a dyfuzją, [72, 73].

Badanie zjawisk dyfuzji i innych procesów wyrównywania związane jest z poznaniem dynamicznej struktury ośrodka. Badania struktury oparte są przede wszystkim na interpretacji zjawisk rozpraszania, rozpraszania wolnych neutronów i promieniowania elektromgnetycznego, z tym, że badania neutronowe podają dynamikę samych jąder atomowych i unikają wpływu powłok elektronowych atomów. Funkcje Van Hovego, $G_s(\boldsymbol{r}, t)$ i $G_d(\boldsymbol{r}, t)$ zawierają pełną informację o dynamice układu.

4.4.1 Równanie kinetyczne dyfuzji wyróżnionej cząstki

W pracy [H1] podano opis dyfuzji cząstki wyróżnionej (nr 1) w polu sił zewnętrznych otrzymany metodą operatora rzutowego, co prowadzi od równania Liouville'a do do równania ze splotem czasowym na transformatę Fouriera jednocząstkowej funkcji rozkładu $f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{v}_1, t)$.

Ewolucja N-cząstkowego układu opisana jest przez równanie Liouville'a (1) dla funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $f_N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N, t)$ w $6N$-wymiarowej przestrzeni fazowej. Stosując operator przesunięcia Koopmana (ang. *Koopman's shift operator*) mamy

$$F_N(t) \;=\; \mathrm{e}^{-t\,K_N}\, F_N(0) \tag{15}$$

Określamy funkcję

$$F_N(0) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r}_1}\, f_N^0 \tag{16}$$

i transformatę Fouriera jednocząstkowej funkcji rozkładu

$$f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_1, t) \;=\; \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1} \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{N-1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^{N-1}\, F_N(t) \tag{17}$$

Całkowanie po $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$, a także po $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i, i = 2, \cdots, N$, jest wykonywane po objętości Ω. Całkowanie po $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1$, a także po $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i, i = 2, \cdots, N$, jest wykonywane po całej przestrzeni prędkości.

Z funkcji $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_1, t)$ przez całkowanie można otrzymać tzw. *pośrednią funkcję rozpraszania*

$$I_s(\boldsymbol{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_1, t) \mathrm{d}\boldsymbol{v}_1 \tag{18}$$

z której po dokonaniu przekształcenia Laplace'a powstaje tzw. *prawo rozpraszania*

$$S_s(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} I_s(\boldsymbol{k}, t) \mathrm{d}t \tag{19}$$

ważne przy badaniu dynamiki sieci krystalicznej, [75].

Korzystając z metody operatorów rzutowych, naszkicowanej w 4.3.5, też [52, 76], wyprowadzamy równanie

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{k} v_1\right) f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_1, t) \;+\; \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{ext}} \left(\beta \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{v}_1, t) = \\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{v}^{N-1}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1}\, \mathcal{P} K_N \,\cdot \\ &\cdot \int_0^t \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\,\tau\,(1-\mathcal{P})K_N}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}_1}\, \frac{f_N^0(\boldsymbol{v}^N, \boldsymbol{r}^N)}{\varphi_{\mathrm{M}}(v_1)}\, f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_1, t-\tau) \end{aligned} \tag{20}$$

przy czym

$$\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{ext}} = -\,\frac{1}{Q} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}^N\, \frac{\partial U^{\mathrm{ext}}}{\partial \boldsymbol{r}_1}\, \mathrm{e}^{-\beta U^{\mathrm{ext}}} \tag{21}$$

przedstawia uśrednioną siłę zewnętrzną niezależną od położenia. W szczególnym przypadku, gdy można zaniedbać siły międzycząstkowe dostajemy równanie Własowa, [77, 78],

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{k} v_1\right) f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}_1, t) \;+\; \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{ext}} \left(\beta \boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{v}_1, t) = 0 \tag{22}$$

Widać, że zgodnie z ogólną prawidłowością znalezioną przez Zwanziga równanie na $f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{v}_1, t)$ nie jest odwracalne przy zamianie t na $-t$, choć samo równanie Liouville'a jest odwracalne, [52].

W powyższym ujęciu temperatura bezwzględna T ośrodka mierzona w jednostkach energii jest stała i jest odwrotnością stałej β, $T = 1/\beta$.

Jeśli wyróżniona cząstka (nr 1) ma masę *znacznie większą* od masy każdej z pozostałych cząstek (czyli jest cząstką Browna) można wychodząc z równania kinetycznego dojść do równania Fokkera-Plancka, jak to pokazał (przy niewystępowaniu sił zewnętrznych) Michał Narbutowicz, [79].

Opisaną metodę znajdowania równań kinetycznych można rozszerzyć na badania wielocząstkowych funkcji rozkładu potrzebnych do analizy zadań bardziej skomplikowanych, jak ruchy dyfuzyjne obiektów rozciągłych, porównaj [80]-[84].

W gazie Lorentza wyróżniona cząstka (nr 1) ma masę *znacznie mniejszą* od masy pozostałych cząstek (jest to klasyczny model elektronu między atomami sieci kryształu), np. [85]. Zagadnienia dyfuzji badane w czasie porównalnym z czasem zderzenia prowadzą do równania kinetycznego ze skokowym potencjałem, które są równaniami funkcyjnymi w przestrzeni prędkości. W pracy [86] po przeglądzie znaczenia dyfuzji w biologii badamy ruch dyfuzyjny jako gaz Lorentza.

Współczynnik przewodnictwa ciepła zależny od temperatury

Jeśli współczynnik przewodnictwa ciepła zależy od temperatury w sposób potęgowy

$$K = K_0\, T^n$$

i $n > 0$, rozkład temperatury jest ograniczony. W jednowymiarowym zadaniu granice ogrzanego obszaru rozszerzają się według prawa

$$x_0 = C\, T^{1/(2+n)}$$

Powyżej K_0 i C są to stałe. Poza tymi granicami temperatura $T = 0$, porównaj [41, 87]. W podobny sposób można opisywać dyfuzję, której współczynnik zależy od stężenia, [HD4].

4.4.2 Równanie Ficka-Smoluchowskiego

Gdy interesuje nas dyfuzja w skali czasowej, w której czas zderzenia cząstek może być zaniedbany, ale czas między zderzaniami zaniedbywalny nie jest możemy stosować klasyczny opis dyfuzji w polu sił zewnętrznych podany przez Smoluchowskiego, [88] - [90],

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \mathbf{D} \left(\nabla f + \frac{f}{T} \nabla V \right) \tag{23}$$

przy czym $\mathbf{D}$ oznacza tensor dyfuzji, T oznacza temperaturę bezwzględną w jednostkach energii, a V potencjał zewnętrzny. Do równania tego typu można dojść wychodząc z rozkładu dwumianowego Bernoulliego, porównaj [91].

W istocie równaniem Smoluchowskiego opisywana jest dyfuzja w ciele stałym poddanym naprężeniom, które pełnią rolę siły zewnętrznej, [92], [93]-[95].

W pracy [H2] badamy niesymetryczny spacer przypadkowy. Pokazujemy, że w tym wypadku nie tylko pojawia się analog siły unoszenia (ang. *drift force*), ale i ulega zmianie analog współczynnika dyfuzji. Dyskutujemy tam również tak zwany paradoks nieskończonej prędkości rozchodzenia się dyfuzji. Pojawia się on skutkiem przejścia granicznego z krokiem dyfuzji h do zera.

W pracy [HD5] zwracamy uwagę na to, że dyfuzyjna interpretacja spaceru przypadkowego nie jest jedyna, ale zależy od przyjętej skali długości kroku spaceru h i czasu trwania kroku τ. Tylko dodatkowe argumenty: dodatniość funkcji rozkładu i dodatniość wzrostu entropii pomagają wybrać właściwą, to jest dyfuzyjną interpretację. W nawiązaniu do formuły Einsteina pozwala to wyjaśnić paradoks nieskończonej prędkości dyfuzji.

Wprowadźmy przekształcenie Fouriera oraz przekształcenie Laplace'a, odpowiednio wzorami

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{kr}} f(\boldsymbol{r}) \quad \text{oraz} \quad \widetilde{f}(z) = \int_0^t \mathrm{d}t \mathrm{e}^{izt} f(t), \quad z = \omega + i\varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Załóżmy, że współczynnik dyfuzji D i temperatura T są stałe, i że $\Delta V = 0$. Po zastosowaniu operacji Fouriera do r-nia (23) dostajemy równanie liniowe, którego całką jest

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}, t) = \hat{f}(\boldsymbol{k}, 0) \exp\Big[-D \left(k^2 - i\, \frac{\boldsymbol{kF}}{T} \right) t \Big]$$

Gdy do r-nia (23) zastosujemy obie operacje dostajemy

$$\widetilde{\hat{f}}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{Dk^2 + i(\omega - \boldsymbol{kF}/T)}{(Dk^2)^2 + (\omega - \boldsymbol{kF}/T)^2}\, \hat{f}(\boldsymbol{k}, 0)$$

Dwa ostatnie wzory to przybliżenia dla dużych czasów, odpowiednio pośredniej funkcji rozpraszania $I_s(\boldsymbol{k}, t)$ i prawa rozpraszania $S_s(\boldsymbol{k}, \omega)$, wprowadzonych wzorami (18) i (19). Mamy dla dużych czasów $I_s(\boldsymbol{k}, t) = \hat{f}(\boldsymbol{k}, t) \quad \text{oraz} \quad S_s(\boldsymbol{k}, \omega) = \widetilde{\hat{f}}(\boldsymbol{k}, \omega)$.

Gra na giełdzie. W grze na giełdzie uczestniczą spekulanci i ludzie interesu. Już poeta rzymski zauważył, że kierują nimi dwa motywy, marzenie o bogactwie i strach przed stratą, [97]. W warunkach giełdy uczciwej, i kupujący i sprzedający są przekonani, że robią dobry interes. Jak na to zwrócił uwagę Louis Bachelier sytuacja przypomina spacer przypadkowy, gdy krok w tył i krok do przodu ma takie samo prawdopodobieństwo, [98]. Pojawienie się dryfu wskazuje, że giełda przestaje być uczciwa. Dzięki analogii z dyfuzją otwiera się perspektywa na wykorzystanie metod fizycznych w ekonomii, [99]. Autor niniejszego tekstu poświęcił ekonofizyce kilka opracowań, np. [HD4], [N17].

4.5 Równanie ciepła, dyfuzja i termodyfuzja

Dyfuzyjny strumień masy $\boldsymbol{j}$ i strumień ciepla $\boldsymbol{q}$ powstają wskutek występowania gradientów stężenia i temperatury. Przy tym każdy ze strumieni zależy na ogół od obu tych gradientów. Praca [H3] przedstawia powiązanie procesów przenoszenia masy i ciepła i jest syntezą prac [HD5] - [HD8].

Proces, w którym gradient temperatury wywołuje ruch masy nazywamy termodyfuzją. Używa się też terminów: dyfuzja termiczna, termoforeza lub termomigracja.

Zjawisko może być obserwowane gołym okiem, gdy np. dym papierosowy jest odpychany od rozżarzonego pręta metalowego. Rozgrzane przez pręt cząsteczki powietrza porywają za sobą cząstki dymu. Siła, która odpycha od rozżarzonego pręta cząstki dymu jest przykładem sily termodyfuzyjnej (lub inaczej termoforetycznej). Zjawisko termodyfuzji polega na tym, że w mieszaninie dwu gazów gradient temperatury dodaje się do gradientu względnej koncentracji obu składników. Podobny efekt występuje w cieczy i nosi nazwę efektu Soreta. W połączeniu z dyfuzją całkowity strumień cząstek wynosi $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{D}} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{TD}}$, a strumień ciepła $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{DT}} + \boldsymbol{q}_{\mathrm{T}}$.

Termodyfuzję w mieszaninach cieczy zaobserwował i opisał Carl Ludwig w r. 1856, a pogłębił jej rozumienie Charles Soret w publikacji z r. 1879, [100, 101]. Termodyfuzję w mieszaninach gazów opisał po raz pierwszy John Tyndall w r. 1870, [102]. Następne studium tego zjawiska ogłosił John Strutt (Baron Rayleigh) w r. 1882.

James Clerk Maxwell napisał w r. 1873 na temat mieszanin różnych cząsteczek i cząstek, [103]: ”Proces dyfuzji przebiega w gazach, cieczach i do pewnego stopnia w ciałach stałych. (...) Teoria dynamiczna mówi nam o tym, co zachodzi, gdy zderzają się cząstki o różnych masach. Większe masy poruszają się wolniej niż masy mniejsze tak, że przeciętnie każda cząstka, czy duża czy mała ma tę samą energię ruchu.”, [103], także [104].

W tym samym r. 1873 Wilhelm Feddersen wyrazi opinię, że warunki do ujawnienia się zjawiska termodyfuzji są na tyle powszechne, że nie można temu zjawisku przypisywać tylko drugorzędnegp znaczenia w przyrodzie. Dopiero jednak w r. 1912 David Enskog i w r. 1916 Sydney Chapman wyprowadzili wzór na współczynnik termodyfuzji dla gazu opisywanego równaniem Boltzmanna. Dokładnie wyznaczono współczynnik termodyfuzji dla układu neon-ksenon w [105]. W roku 1938 Klaus Clusius i Gerhard Dickel wykorzystali to zjawisko do rozdzielenia izotopów, [106]. Termodyfuzja była jedną z metod wzbogacania uranu w izotop U^{235} w programie atomowym Manhattan, [107]-[110].

Termodyfuzję nazywamy *dodatnią*, gdy cząstki wędrują od obszaru gorącego do zimnego, *ujemną*, gdy ruch jest odwrotny. Naogół cząstki większe wykazują termoferezę dodatnią, a mniejsze ujemną.

W zjawisku termoforezy w cieczach istotną rolę pełni kształt cząstki i własności jej powierzchni. Stefan Duhr i Dieter Braun podają doświadczalny przykład termoforezy cząstek DNA: w temperaturze 3°C cząstki DNA gromadzą się w obszarze ciepłym, a w temperaturze 20°C w obszarze chłodnym. Tak więc współczynnik termodyfuzji zależy przede wszystkim od rodzaju cząstki i własności jej powierzchni, [104, 111].

Zjawisko termodyfuzji i zjawisko zmian fluorescencji pod wpływem zmian temperatury pozwalają na badanie oddziaływań między cząstkami biologicznymi; jest to tzw. termoforeza mikroskalowa, ang. *microscale thermophoresis MST*, [112]-[115].

4.5.1 Termodyfuzja Streatera

Specjalne podejście do zjawiska dyfuzji podał Raymond Frederick *Ray* Streater, [116]. Zwrócił on uwagę na to, że cząstka wyróżniona (cząstka Browna) poruszając się w zewnętrznym polu sił wytwarza wskutek tarcia ciepło, co należy uwzględnić przy bilansowaniu energii i entropii układu.

W pracy [H4] omówiono również dyfuzję Streatera w ośrodku niejednorodnym. Asymptotyczną metodą dwuskalową wyprowadzono makroskopowe równania takiej dyfuzji. Po homogenizacji człon tarcia nie występuje w równaniu dyfuzji, pojawia się tylko w równaniu ciepła jako człon źródłowy.

Wyprowadziliśmy też wzór barometryczny dla tego przypadku

$$f(x) = f_0 \exp\Big[-g \int_0^x \left(\frac{1}{T_0 + a \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}\eta}{K(\eta)}} \right) \mathrm{d}\xi \Big] \tag{24}$$

Nie jest to wzór zgodny z rozkładem Gibbsa, który otrzymamy dopiero, gdy przyjmiemy $K \to \infty$, co oznacza, że temperatura w całym ośrodku jest taka sama. Wtedy

$$f(x) = f_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{g\,x}{T_0}} \tag{25}$$

czyli otrzymujemy klasyczny *wzór barometryczny* (1), porównaj [117]. Używana w niniejszym opracowaniu temperatura

$$T = k_\mathrm{B} \cdot \mathcal{T} \tag{26}$$

mierzona jest w dżulach. Wzór (24) opisuje więc rozkład cząstek o masie jednostkowej, gdy siła zewnętrzna (ciężar) działa wzdłuż osi x.

W pracy [HD7] podano jeszcze całkową postać zagadnienia i wyprowadzono zhomogenizowane równania dyfuzji Streatera dla ośrodka porowatego.

Można więc powiedzieć, że w opisie dyfuzji podanym przez Streatera występuje zjawisko termodyfuzji poprzez powiązanie *grawitacyjne* strumienia dyfuzji ze strumieniem ciepła, [116].

4.5.2 Termodyfuzja Streatera razem z termodyfuzją Dufoura-Soreta

W pracy [H3] wprowadzamy bezpośrednio termodyfuzję Dufoura-Soreta, czyli proces powiązania strumienia dyfuzji ze strumieniem ciepła poprzez oddziaływania w skali mikrocząstkowej, jednak z utrzymaniem Streaterowskiego powiązania grawitacyjnego . Strumienie dyfuzji i ciepła są jak następuje

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= -D(\nabla f + \frac{f}{T}\nabla V) - M\nabla T \\ \boldsymbol{q} &= -N(\nabla f + \frac{f}{T}\nabla V) - K\nabla T \end{aligned} \tag{27}$$

przy czym D jest współczynnikiem dyfuzji, M i N są współczynnikami termodyfuzji, a K jest współczynnikiem przewodnictwa ciepła. Odpowiednie równania ciągłości są

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{j} = 0 \qquad C\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{q} = r \tag{28}$$

przy czym C oznacza ciepło właściwe, a r - źródło ciepła. Symetria współczynników kinetycznych wymaga by

$$MT^2 = Nf \tag{29}$$

W pracy pokazujemy, że warunek konzystencji termodynamicznej, ściślej spełnienie drugiej zasady termodynamiki, wymaga by zachodził związek (23) i $DK > NM$. Pokazujemy też, że siłą termodynamicną dla strumienia masy jest

$$\frac{1}{f}\left(\nabla f + \frac{f}{T}\nabla V\right) \tag{30}$$

a siłą termodynamiczną dla strumienia ciepła

$$\frac{1}{T^2}\nabla T \tag{31}$$

W jednowymiarowym zadaniu, gdy strumień masy znika, temperatura zmienia się wg prawa

$$T(x) = T_0 + a \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{K - \frac{N^2}{D}\frac{f}{T^2}} \tag{32}$$

przy czym a jest stałą.

Ponadto, w zadaniu jednowymiarowym, jeśli przyjąć, że temperatura T jest znaną funkcją zmiennej x, to w obecności termodyfuzji równanie Smoluchowskiego przyjmuje postać ze zmienionym potencjałem

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla \mathbf{D} \left(\nabla f + \frac{f}{T} \nabla \widetilde{V} \right) \tag{33}$$

przy czym

$$\widetilde{V} = V + \frac{N}{D} \ln T$$

W pracy [H4] pokazujemy też, że średnia prędkość cząstki $\boldsymbol{v} = \int_\Omega \boldsymbol{j} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ dana jest wzorem

$$\boldsymbol{v} = -\int_\Omega \Big[\mathbf{D}(\nabla f + \frac{f}{T} \nabla V) + \mathbf{M} \nabla T \Big] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{34}$$

Jeśli $\mathbf{D}, \mathbf{M}, T$ i $\nabla V = -\boldsymbol{F}$ są stałe, a ponadto $f = 0, T = 0, V = 0$ na $\partial\Omega$,

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{T} \mathbf{D} \boldsymbol{F} \tag{35}$$

Jest to formuła Einsteina, [118]-[120]. Jeśli jednak, jak często się obserwuje $\mathbf{M} = \widetilde{\mathbf{M}} f$, a wektor ∇T jest stały,

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{T} \mathbf{D} \boldsymbol{F} - \widetilde{\mathbf{M}} \nabla T \tag{36}$$

to znaczy dostajemy uogólnienie tej formuły na przypadek termodyfuzji.
Uwaga: Zgodnie ze wzorem Einsteina-Stokesa dla cząstek kulistych o promieniu r

$$D = \frac{T}{6\pi\eta r}$$

współczynnik dyfuzji D jest odwrotnie proporcjonalny do lepkości η. Wzór ten jednak jest słuszny tylko dla dostatecznie dużych cząstek, [121].

4.5.3 Dyfuzja dwupoziomowa

Dobrze znane są układy metastabilne, takie jak dwupoziomowe szkła i lasery optyczne, [123]-[125]. Są to układy o dwu stanach energii (ang. *two level system TLS*). Do układów takich należą silniki białkowe (inaczej brownowskie), które pełnią funkcje biologiczne w organizmach żywych. Silniki takie, jak miozyna, kinezyna i dyneina pod działaniem chemicznego źródła energii, takiego jak trifosoran adenozyny kolejno przylegają i odrywają się od podłoża. Istnienie dwu stanów, przylgnięcia i oderwania jest istotne dla powstania ruchu, [126].

Rozważamy ruch wyróżnionej cząstki w płynie o temperaturze T pod działaniem zachowawczego pola sił. Cząstka może znajdować się w dwu stanach, A i B, o potencjale V^{A} i V^{B}. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie A jest $f^{\mathrm{A}} = f^{\mathrm{A}}(x,t)$, prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w stanie B jest $f^{\mathrm{B}} = f^{\mathrm{B}}(x,t)$. Pole zewnętrzne jest takie, że na cząstkę w stanie A działa siła $F^{\mathrm{A}} = -\nabla V^{\mathrm{A}}$, a na cząstkę w stanie B siła $F^{\mathrm{B}} = -\nabla V^{\mathrm{B}}$. Niech wielkości $\boldsymbol{j}^{\mathrm{A}}, \boldsymbol{j}^{\mathrm{B}}$ i q będą odpowiednio strumieniami dyfuzji wyróżnionych cząstek w stanach A i B, i strumieniem ciepła. Odpowiednie równania ciągłości są

$$\frac{\partial f^{\mathrm{A}}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{j}^{\mathrm{A}} = k \qquad \frac{\partial f^{\mathrm{B}}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{j}^{\mathrm{B}} = -k \qquad c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{q} = r$$

Przy tym c_p oznacza ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, zaś r oznacza źródło ciepła. Wielkość k jest dana przez

$$k = -\omega^{\mathrm{A}} f^{\mathrm{A}} + \omega^{\mathrm{B}} f^{\mathrm{B}}$$

zaś ω^{A} i ω^{B} są szybkościami przejści między stanami A i B. Źródło ciepła ma trzy składniki

$$r = r^{\mathrm{A}} + r^{\mathrm{B}} + r^{\mathrm{C}}$$

przy czym

$$r^{\mathrm{A}} = -j^{\mathrm{A}} \cdot \nabla V^{\mathrm{A}} \qquad r^{\mathrm{B}} = -j^{\mathrm{B}} \cdot \nabla V^{\mathrm{B}} \qquad r^{\mathrm{C}} = k\,(V^{\mathrm{B}} - V^{\mathrm{A}})$$

W pracy[H5] zbadano termodynamikę oddziaływania między cząstką Browna, która może zajmować dwa poziomy energii i strumienia ciepła opisywanego przez podane przez Streatera nieliniowe równanie ciepła, to znaczy, że wzięto pod uwagę przemianę energii potencjalnej na ciepło na skutek tarcia.

Pokazano, że dla takiego ośrodka słuszne jest pierwsze prawo termodynamiki. Drugie prawo nie zachodzi, ponieważ nie jest to układ zamknięty. Przypuszczenie Prigogine'a, które mówi, że w układach sterowanych szybkość wytwarzania entropii zmierza do minimum.Tymczasem przypuszczenie Prigogine'a nie jest spełnione, nawet w postaci przybliżonej, znanej z dyfuzji jednopoziomowej, [HD8]. Zbadano również układ poza warunkiem równowagi szczegółowej.

W pracy [HD9] podano model dwupoziomowej dyfuzji oparty o dwumianowy wzór Bernoulliego i wykazano pewne twierdzenie o jednoznaczności rozwiąąń układu równań zagadnienia.

Analogicznie można opisać tzw. dwutemperaturowe przewodnictwo ciepła.Na nagłe ogrzaniu metalu promieniowaniem inaczej reaguje jonowa sieć krystaliczna, a inaczej elektrony międzyjonowe. Przejawia się to również w tym, że zaraz po napromieniowaniu temperatura elektronów T_e jest inna niż temperatura sieci T_l. Odpowiedni układ równań ma wtedy postać

$$\begin{aligned} c_p^{(1)}(T_e)\,\frac{\partial T_e}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_e\,\frac{\partial T_e}{\partial x_i}\right) - \alpha\,(T_e - T_l) + f_e(\boldsymbol{x}, t), \\ c_p^{(2)}(T_l)\,\frac{\partial T_l}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_l\,\frac{\partial T_l}{\partial x_i}\right) + \alpha\,(T_e - T_l) + f_l(\boldsymbol{x}, t), \end{aligned} \tag{37}$$

przy czym λ_e i λ_l są odpowiednimi przewodnictwami ciepła, zaś α jest współczynnikiem wymiany ciepła. Funkcje $f_e(\boldsymbol{x}, t)$ and $f_l(\boldsymbol{x}, t)$ opisują zadane źródła ciepła, porównaj [131]-[139].

4.6 Zjawiska sączenia przez ośrodki porowate

Temu zagadnieniu poświęcono 3 prace, od [H6] do [H9].

W mniejszym lub większym stopniu przedmioty, z którymi mamy do czynienia są substancjami porowatymi. Należą do nich zarówno tkanki pochodzenia biologicznego: korek, gąbka, kość, kreda, produkty wytwarzane: chleb, ceramika, maski medyczne i przeciwgazowe, czy spotykane na zewnątrz: gleba, skały (trawertyn, pumeks). Bardzo często przez substancje porowate przepływają płyny.

Współczynnik porowatości określony jest jako iloraz

$$\phi = \frac{\Omega_{\mathrm{P}}}{\Omega_0}$$

przy czym Ω_{P} oznacza objętość przestrzeni porów, a Ω_0 objętość całego rozważanego materiału, włączając w to i ciało stałe (szkielet) i pory.

W niniejszym ujęciu istotne dla tematu są trzy prawa przepływu ustalonego:
równanie Stokesa

$$0 = -\nabla p + \eta\Delta\boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{38}$$

które dla cieczy nieściśliwych ma postać

$$0 = -\nabla p + \eta \Delta \boldsymbol{v} \tag{39}$$

prawo Darcy'ego

$$\boldsymbol{v} = -\kappa \nabla p \tag{40}$$

i prawo Brinkmana

$$\boldsymbol{v} = -\kappa \nabla p + \kappa\, \eta' \Delta \boldsymbol{v} \tag{41}$$

Przy tym $\boldsymbol{v}$ oznacza prędkość, p oznacza ciśnienie, η i ζ to pierwsza i druga lepkość, κ to przepuszczalność ośrodka porowatego, zaś $\eta\prime$ to lepkość zwana przez Brinkmana lepkością skuteczną ang. *effective viscosity*, [140, 141], [HD10].

Jeśli $\eta' \to 0$ dostajemy prawo Darcy'ego, jeśli $K \to \infty$ i $\eta' \to \eta$ odzyskujemy równanie Stokesa.

Na prostym przykładzie można łatwo porównać przepływy opisane tymi prawami. Rozpatrujemy ustalony jednowymiarowy przepływ cieczy między dwiema nieruchomymi płaszczyznami oddalonymi od siebie o stałą odległość $2h$. Płaszczyzna xz jest równoległa do tych płaszczyzn i umieszczona między nimi pośrodku. Oś x skierowana jest w kierunku ruchu cieczy.

Równanie Stokesa daje

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Stąd

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$$

a po uwzględnieniu warunków brzegowych $v = 0$ dla $y = \pm h$ dla prędkości otrzymujemy

$$v_\mathrm{S} = -\frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(h^2 - y^2\right) \tag{42}$$

Wartość średnia prędkości

$$\overline{v}_\mathrm{S} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} v_\mathrm{S}\,\mathrm{d}y = -\frac{h^2}{3\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{43}$$

Z równania Brinkmana otrzymujemy dla przepływu między takimi samymi jak wyżej płaszczyznami

$$v = K\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{44}$$

przy warunkach brzegowych $v = 0$ for $y = \pm h$ otrzymujemy rozwiązanie

$$v_\mathrm{B} = -\,K\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{\alpha y} + \mathrm{e}^{-\alpha y}}{\mathrm{e}^{\alpha h} + \mathrm{e}^{-\alpha h}}\right) \tag{45}$$

przy czym

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{K\eta'}}$$

Dla małych wartości α, a więc dla dużych wartości K albo η', po rozwinięciu w odpowiednie szeregi i pominięciu małych członów dostajemy

$$v_\mathrm{B} = -\frac{1}{2\eta'}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(h^2 - y^2\right) \tag{46}$$

czyli wyrażenie różniące się od wyrażenia v_S, r-nie (42), tylko wartością lepkości. Fakt ten wykorzystano do oszacowania wpływu przeszkód na dnie kanału, np. dennej roślinności na przepływ wody w kanale, [N6, N7].

Porowatość ośrodków spotykanych w przyrodzie na ogół nie jest stała, zmienia się z czasem, monotonicznie lub okresowo. Wchodzą tu w grę takie zjawiska jak ubijanie gruntu pod wpływem własnego ciężaru lub obciążeń zewnętrznych, wysychanie wody albo jej zamarzanie w porach gruntu. W odniesieniu medycznym prześwit naczyń krwionośnych maleje wskutek arteriosklerozy. Przepływy wód podziemnych są tematem badań różnych dziedzin nauki i techniki, takich jak mechanika płynów, hydrologia, inżynieria zasobów wodnych, mechanika gruntów, [142].

4.6.1 Równanie Boussinesqa

Równanie Boussinesqa opisuje kształt powierzchni freatycznej czyli tzw. swobodnego lustra wody przepływów w ośrodku porowatym. Wyprowadzenie równania Boussinesqa oparte jest o prawo Darcy'ego i przybliżeniu Dupuita. Przybliżenie to zakłada, że składowa pionowa wektora prędkości przepływu może być pominięta w porównaniu ze składowymi poziomymi.

W pracy [H6] wychodząc z prawa Darcy'ego wyprowadzono równanie Boussinesqa dla przypadku porowatości zależnej od czasu, $\phi = \phi(t)$. Niech płaszczyzna Oxy pokrywa się z dnem zbiornika wodonośnego, a oś z będzie skierowana pionowo do góry. Niech swobodna powierzchnia cieczy będzie opisana wzorem $z = h(x, y, t)$, i niech na tej powierzchni panuje ciśnienie p_0.

Przyjmujemy, że ciśnienie w cieczy zapełniającej pory jest dane wzorem dla cieczy w spoczynku

$$p = p_0 + \rho g(h - z)$$

Wtedy prawo Darcy'ego

$$\boldsymbol{v} = -\frac{K}{\eta}\nabla p \tag{47}$$

przy czym K oznacza przepuszczalność ośrodka porowatego, a η - współczynnik lepkości cieczy, przyjmuje postać

$$\boldsymbol{v} = -C\nabla h \tag{48}$$

przy czym

$$C = \rho g \frac{K}{\eta}$$

jest współczynnikiem sączenia. Po wstawieniu prawa (48) do równania ciągłości dostajemy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi h) = C\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(h\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}\right) \tag{49}$$

co dla ϕ nie zależnego od czasu przechodzi w klasyczne równanie Boussinesqa

$$\phi\,\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2}\,C\,\Delta h^2 \qquad \text{przy czym} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{50}$$

Równanie (49) otrzymane w [H6] ma postać klasycznego równania Boussinesqa, ale ze współczynnikiem zależnym od czasu. Wynik ten odnotowano w literaturze, [143]-[145].

4.6.2 Termodynamika przepływu Darcy'ego

Siłą termodynamiczną w przepływie Darcy'ego jest $\boldsymbol{X} = -\,[\nabla(p+U)]$, przy czym p oznacza jak zwykle ciśnienie, a U - potencjał si} zewnętrznych. Zgodnie z zasadą Onsagera produkcja ciepła dana jest wzorem

$$T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\sum_i X_i \cdot x_i = -\,[\nabla(p+U)]\cdot\boldsymbol{v} = \frac{K}{\eta}\,[\nabla(p+U)]\cdot[\nabla(p+U)]$$

Zatem produkcja entropii wynosi

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \gamma\left[\nabla(p+U)\right]\cdot\left[\nabla(p+U)\right]\cdot$$

przy czym współczynnik kinetyczny jest

$$\gamma = \frac{1}{T}\,\frac{K}{\eta}$$

Pracę [H7] poświęcono wyprowadzeniu i zbadaniu równania Darcy'ego dla przepływów przez ośrodek porowaty sprężysty cieczy nieściśliwej i ściśliwej. Ośrodek porowaty (szkielet) ma budowę mikrokomórkową. Parametrem małości jest iloraz rozmiaru komórki i rozmiaru ośrodka

$$\varepsilon = \frac{l}{L}$$

Skorzystano z metody dwuskalowych rozwinięć asymptotycznych wg parametru ε. Wyjaśniono przy tym konieczność przeskalowania lepkości cieczy. Z równania Stokesa wyprowadzono prawo Darcy'ego i wyznaczono szybkość wzrostu entropii podczas przepływu.

Sprężysty szkielet opisany był prawem Hooke'a

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}$$

zaś przepływ cieczy prawem Newtona

$$\sigma'_{ij} = \eta_{ijmn}\frac{\partial v_m}{\partial x_n}$$

Tutaj σ_{ij} i σ'_{ij} oznaczają odpowiednio tensory naprężenia w ciele stałym i cieczy, C_{ijmn} i η_{ijmn} to tensory sprężystości i lepkości, $\boldsymbol{u}$ - to przemieszczenie w ciele stałym , a $\boldsymbol{v}$ to prędkość płynu.

Porowaty ośrodek sprężysty wypełniony cieczą został potraktowany jako kompozyt mikrookresowy z elementarną komórką sześcienną. W pracy wykazano, że współczynnik lepkości winien być przeskalowany wg reguły

$$\eta^\varepsilon = \varepsilon^2\eta$$

Wychodząc z równań teorii sprężystości i równań przepływu Stokesa wyprowadzono prawo Darcy'ego i wyznaczono szybkość wzrostu entropii podczas przepływu, zgodną z termodynamiką Onsagera. Wyznaczono również zastępczy tensor sprężystości ośrodka.

4.6.3 Przepływ elektrolitu przez porowaty piezoelektryk

Dwuskalowa metoda rozwinięć asymptotycznych pozwoliła wyprowadzić równania przepływu dwuskładnikowego elektrolitu przez porowaty ośrodek piezoelektryczny. Jest to temat zespołowej pracy [H8], porównaj też obszerniejszą wersję [HD11].

Podobnie jak poprzednio rozważamy ośrodek porowaty (szkielet) wypełniony przepływającą cieczą (elektrolitem). Szkielet jest piezoelektrykiem opisanym równaniami

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^\varepsilon_{ijmn}\frac{\partial u^\varepsilon_m}{\partial x_m} + \pi^\varepsilon_{kij}\frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x_k}\right) = 0\\
&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi^\varepsilon_{imn}\frac{\partial u^\varepsilon_m}{\partial x_m} - \epsilon^{S\varepsilon}_{ik}\frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial x_k}\right) = 0
\end{aligned} \tag{51}$$

zaś ciecz

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-p^\varepsilon\,\delta_{ij}+\varepsilon^2\eta^\varepsilon_{ijmn}\frac{\partial v^\varepsilon_m}{\partial x_m}\right)+f^g_i-q^\varepsilon\frac{\partial\Phi^\varepsilon}{\partial x_i}-k\frac{\partial q^\varepsilon}{\partial x_i}=0\\
&\frac{\partial v^\varepsilon_i}{\partial x_i}=0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\epsilon^{L\varepsilon}_{ik}\frac{\partial\Phi^\varepsilon}{\partial x_k}\right)=-q^\varepsilon\\
&q^\varepsilon=q^{(+)\varepsilon}+q^{(-)\varepsilon}\\
&\frac{\partial J^{(+)\varepsilon}}{\partial x_i}=0 \qquad \frac{\partial J^{(-)\varepsilon}}{\partial x_i}=0
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Po homogenizacji m.in. odtworzono prawo Gaussa

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{Y}\int_Y D^{(0)}_i\mathrm{d}\boldsymbol{y}=q^{(0)}$$

przy czym Y oznacza objętość komórki elementarnej. Wyprowadzono też wzory na pozostałe prawa zachowania i zastępcze współczynniki materiałowe.

4.7 Termosprężystość i termopiezoelektryczność

W r. 1660 Robert Hooke sformułował prawo sprężystości noszące jego imię, [146, 147]. Analogiczne prawo fizyki gazów nosi nazwę prawa Boylea-Mariottea, choć sam Robert Boyle nazywał je "*Mr. Towneley's hypothesis*". W rzeczywistości prawo znane dziś powszechnie jako prawo Boyle'a-Mariotte'a podał w r. 1661 Henry Power, [148]. Sprężystość liniowa oparta o prawo Hooke'a opisuje odkształcenie ciała stałego pod wpływem obciążeń zewnętrznych i masowych. Jest ona uproszczeniem nieliniowej teorii sprężystości i gałęzią mechaniki ośrodka ciągłego. Podstawowym założeniami linearyzacyjnymi liniowej sprężystości jest założenie małych odkształceń i założenie liniowego związku między tensorem odkształcenia i naprężenia, porównaj monografię [149]. Założenia te przestają obowiązywać, gdy obciążenia wywołują stan uplastycznienia, [150].

W ramach liniowej teorii sprężystości zagadnienie początkowo-brzegowe składa się z trzech typów równań różniczkowych:
związek naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ i odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ (prawo Hooke'a)

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}\quad\text{lub}\quad\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}$$

związek odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$ z przemieszczeniem $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}]$$

równanie ruchu (II prawo Newtona)

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{F}$$

Przy tym $\mathbf{C}$ oznacza tensor sprężystości, $\mathbf{S}=\mathbf{C}^{-1}$ oznacza tensor podatności sprężystej, ρ - gęstość masową, $\boldsymbol{F}$ siłę masową, symbol $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ oznacza transpozycję.

Z powyższego układu dostajemy przemieszczeniowe równania elastodynamiki (Naviera-Cauchy'ego)

$$\rho\ddot{u}_i=\left(C_{ijkl}\,u_{k,l}\right)_{,j}+F_i$$

oraz naprężeniowe równania elastodynamiki (Ignaczaka)

$$2S_{ijkl}\,\ddot{\sigma}_{ij}=\left(\frac{1}{\rho}\,\sigma_{ik,k}\right)_{,j}+\left(\frac{1}{\rho}\,\sigma_{il,l}\right)_{,i}+\left(\frac{1}{\rho}\,F_j\right)_{,j}+\left(\frac{1}{\rho}\,F_j\right)_{,i}$$

W przypadku ciał sprężystych w tym ostatnim ujęciu unika się gradientów współczynników sprężystości, cho wprowadza się gradienty gęstości masowej. Zatem, naprężeniowe sformułowanie liniowej elastodynamiki odpowiada sformułowaniu przemieszczeniowemu.

Wiadomo, że pod wpływem obciążeń przekraczających granicę plastyczności nawet w jednorodnym i izotropowym ośrodku powstają odkształcenia trwałe. Odkształcenia takie powstają również wskutek obciążeń cieplnych, przy wchłanianiu wilgoci i przy dyfuzji gazu do ciała stałego. Odkształcenia takie nazywają się dystorsjami, [151, 153], także [152].

Sformułowanie naprężeniowe zostało zastosowane do teorii dyslokacji przez Ignaczaka i Rao w pracy [154]. W pracy[HD12] rozpatrzyliśmy zagadnienie początkowo-brzegowe liniowej inkompatybilnej elastodynamiki w oparciu o teorię, ktørą podał Arnold M. Kosevich na temat rozłożonych w sposób ciągły defekt; w wywołanych przez zadane pole odksztaceń plastycznych. Podano sformułowanie zagadnienia liniowej elastodynamiki z defektami w terminach pola tensora dystorsji i udowodniono odpowiednie twierdzenie o jednoznacznoci. Pokazaliśmy tam również przez symetryzację, że sam problem i twierdzenie jednoznaczności redukują się do czysto naprężeniowego ujęcia elastodynamiki.

W analogii do termodynamiki fenomenologicznej gazu doskonałego, [23], w pracy [H9] podano termodynamikę sprężystego ciała stałego. Kibaek Lee i Donald Scott Stewart rozszerzyli ostatnio wyniki tej pracy przez dołączenie przemian fazowych i chemicznych, [155, 156].

Piezoelektryczność to liniowe oddziaływanie między polem mechanicznym i elektrycznym w kryształach bez środka symetrii, [161]-[164]. Już od pierwszych zastosowań urządzenia piezoelektryczne bywały kompozytami, a dzisiaj są nimi przeważnie, porównaj monografię [165].

Układy biologiczne, na różnym poziomie organizacji (makrocząsteczki, wierzchołki wzrostu) charakteryzują się kształtem przestrzennego zwoju - helisy. Helisy nie mają środka symetrii i dlatego materiały biologiczne (DNA, białka, celuloza, drewno, kolagen, kości) wykazują zjawisko piezoelektryczne, [HD14, HD15], [166]. Możliwość zamiany sygnałów mechanicznych na elektryczne nie jest więc ograniczona do samych tylko minerałów i ceramiki. W istocie nawet w niewątpliwym krysztale jakim jest kwarc za efekt piezoelektryczny odpowiadaj helisy czsteczek Si_3O_6, stanowiące komórki elementarne kwarcu.

W pracy[HD13] przeprowadzono homogenizację asymptotyczną mikrookresowo niejednorodnego ośrodka termosprężystego, uogólnioną w pracy [H10] na homogenizację ośrodka termo-piezoelektrycznego. W odróżnieniu od wcześniejszych prac [167, 168] nie wprowadzono linearyzacji związku między entropią a temperaturą ciała. Praca [H10] została wymieniona w monografii [170] i w artykule [171].

Najważniejsze osiągnięcia - podsumowanie

Do najważniejszych osiągnięć w powyższym cyklu prac H1- H10 zaliczam:

- Równanie kinetyczne dla gazu cząstek oddziaływujących parami w polu zewnętrznym, słusznego w całym przedziale czasowym, obejmującym również czas zderzenia. Skrajnym przypadkiem tego równania jest równanie Własowa. Z wyprowadzonego równania można otrzymać momenty prawa rozpraszania. Podczas ewolucji ukłladu opisywanego równaniem Liouville'a entropia nie ulega zmianie. Podczas ewolucji ukłladu opisywanego równaniem kinetyczneym entropia układu wzrasta.

- Interpretacja spaceru przypadkowego sterowanego przez niesymetryczny rozkład Bernoulliego jako dyfuzji w polu zewnętrznym

- Wyjaśnienie paradoksu nieskończonej prędkości rozchodzenia się impulsu dyfuzyjnego (cieplnego) jako skutku przejścia granicznego od przyrostów skończonych do przyrostów nieskończenie małych.

- Dyfuzja w ośrodku porowatym w polu zewnętrznym. Efekt Streatera powiązania pola termicznego z polem zewnętrznym, np. grawitacyjnym.

- Zbadanie dyfuzji dwupoziomowej w warunkach nieizotermicznych i izotermicznych.

- Równanie Boussinesqa dla przepływu w ośrodku porowatym o porowatości zależnej od czasu. Rozwiązanie pewnego zadania szczegółowego.

- Przepływ cieczy Stokesa ściśliwej i nieściśliwej) przez komórkowy ośrodek porowaty: wyprowadzenie prawa Darcy'ego i umieszczenie go w schemacie procesów nieodwracalnych Onsagera.

- Przepływ elektrolitu przez ośrodek porowaty: wyprowadzenie makroskopowych równań przepływu i makroskopowych związków konstytutywnych.

- Termodynamika ciała stałego z równaniem stanu: opis przejść fazowych rodzaju pierwszego (równanie Clapeyrona-Clausiusa) i rodzaju drugiego (równania Ehrenfesta).

- Homogenizacja ośrodka termo-piezoelektrycznego. Podanie wzorów na współczynniki zastępcze i podanie równań różniczkowych ośrodka.

Na koniec opisu cyklu prac pragnąłbym wyjaśnić, że tematy prac [H8] i [H10] wskazał mi ś.p. Profesor Józef Joachim Telega. Z Nim też prowadziłem dyskusje nad tymi zagadnieniami. Obliczenia w H[8] są moje.

Literatura

[1] H. H. Frisinger, Mathematicians in the history of meteorology: the pressure-height problem from Pascal to Laplace, *Historia Mathematica* **1** 263–286 (1974).

[2] J. Perrin, Mouvement brownien et molécules, *Journal de physique théorique et appliqée* **9** (1) 5–39 (1910).

[3] J. C. Maxwell, *A treatise on elektricity and magnetisme*, Third edition, volume one, Dover Publications, Inc., New York 1954 (republication of the third edition published by Clarendon Press in 1891).

[4] J. B. Keller, A theorem on the conductivity of a composite medium, *Journal of Mathematical Physics* **5** (4) 548–549 (1964).

[5] A. M. Dykhne, Conductivity of a two-dimensional two-phase system, *Soviet Physics JETP* **32** (1) 63–65 (971); in Russian: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59** (1) 110–115 (1970).

[6] I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, V. V. Danishevskyy, Elastic and viscoelastic properties of fibre- and particle-reinforced composites, *Asymptotical Mechanics of Composites*, Part of the Advanced Structured Materials book series (STRUCTMAT, volume 77), 2017, pp. 123–165.

[7] S. Yakubovich, P. Drygas and V. Mityushev, Closed-form evaluation of two-dimensional static lattice sums, *Proc Roy. Soc. London* A **472** (2195) 20160510 (2016).

[8] I. Newton, *Mathematical principles or natural philosophy*, transl. into English by Andrew Motte, First American edition, Daniel Adee, New York 1846.

[9] I. Newton, Scala graduum caloris. Calorum descriptiones & signa, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **22** (270) 824–829 (1701).

[10] R. Kubo, The fluctuation-dissipation theorem, *Reports on Progress in Physics* **29** (1) 255–284 (1966).

[11] M. S. Green, Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependent phenomena. II. Irreversible processes in fluids, *J. Chem. Phys.* **22**, 398–413 (1954).

[12] R. Kubo, Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570–586 (1957).

[13] R. Balescu, *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*, John Wiley & Sons, New York - London - Sydney - Toronto 1975.

[14] M. de Morveau, Mémoire sur le développement des principes de la nomenclature méthodique, in: L.-B. Guyton de Morveau, A.- L. Lavoisier, C. L. Bertholet, A. F. de Fourcroy (eds.), *Méthode de nomenclature chimique*, pp. 2674, Cuchet, Paris 1787.

[15] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, chez Firmin Didot, père et fils, libraires pour les mathématiques, l'architecture, hydraulique et marine, Rue Jacob, N^o 24, Paris 1822; Éditions Jacques Gabay, Sceaux 1988.

La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l' univers, ses rayons occupant toutes les parties de l' espace.

[16] Autobiographisches, in: *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, a cura di P. A. Schilpp (Library of Living Philosophers, Evanston, 111. 1949); testo originale in tedesco e traduzione inglese, pp. 2-95.

Eine Theorie ist desto eindrucksvoller, je grösser die Einfachheit ihrer Prämissen ist, je verschiedenartige Dinge sie verknüpft, und je weiter ihr Anwendungsbereich ist. Deshalb der tiefe Eindruck, den die klassische Thermodynamik auf mich machte. Es ist die einzige physikalische Theorie allgemein Inhaltes, von der ich überzeugt hin, dass sie im Rahmen der Anwendbarkeit ihrer Grundbegriffe niemals umgestossen werden wird (zur besonderen Beachtung der grundsätzlichen Skeptiker).

[17] Chuang Liu, Einstein and relativistic thermodynamics in 1952: a historical and critical study of a strange episode in the history of modern physics, *The British Journal for the History of Science* **25** (2) 185–206 (1992).

[18] R. Emden, Why do we have winter heating? *Nature* **141** (3577) 908–909 (May 1938).

In the huge manufactory of natural processes, the principle of entropy occupies the position of manager, for it dictates the manner and method of the whole business, whilst the principle of energy does the bookkeeping, balancing credits and debits.

[19] P. J. Schneider, *Conduction heat transfer*, Addison-Wesley Pub. Co., Cambridge, Mass. 1955.

[20] S. Carnot, *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, Bachelier Libraire, Paris 1824.

C'est á la chaleur que doivent être attribués les grands mouvements qui frappent nos regards sur la terre; c'est à elle que sont dues les agitations de l'atmosphère, l'ascension des nuages, la chute des pluies et des autres météores, les courans d'eau qui sillonnent la surface du globe et don't l'homme est parvenu à employer pour son usage une faible partie; enfin les tremblemens de terre, les éruptions volcaniques, reconnaissent aussi pour la chaleur.

[21] J. Meyer, M. Goeppert-Mayer, *Statistical mechanics*, Wiley, New York 1940.

[22] J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular theory of gases and liquids*, John Wiley & Sons, Inc., New York 1954.

[23] J. Werle, *Termodynamika fenomenologiczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1957.

[24] L. Landau i E. Lifszic, *Fizyka statystyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959.

[25] J. Stecki, *Termodynamika statystyczna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971.

[26] R. S. Ingarden, Information theory and variational principles in statistical theories, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, Série des sciences math., astr. et phys. **11** (1) 541–547 (1963).

[27] R. S. Ingarden, The higher order temperatures and the zeroth principle of thermodynamics, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, Série des sciences math., astr. et phys. **13** (1) 69–72 (1963).

[28] Th. H. Maiman, Stimulated optical radiation in ruby, *Nature* **187** (4736) 493–494 (1960).

[29] Ch. H. Townes, *How the laser happened: adventures of a scientist*, Oxford University Press, 2000.

[30] A. Plecha, V. Kotaidis, M. Lorenc, M. Wulff, Thermal dynamics in laser excited metal nanoparticles, *Chemical Physics Letters* **401** (4-6) 565–569 (2005).

[31] R. Mitalas and K. Sills, On the photon diffusion time scale for the sun, *The Astrophysical Journal* **401** 759–760 (1992).

[32] S. F. Odenwald, How old is sunlight? A classroom activity on the random walk problem, 2004, http://image.gsfc.nasa.gov/poetry/MathDocs/sunlight.html

[33] The 8-minute travel time to Earth by sunlight hides a thousand-year journey that actually began in the core. http://web.archive.org/web/20160823022606/http://sunearthday.nasa.gov:80/2007 /locations/ttt_sunlight.php

[34] M. Stix. On the time scale of energy transport in the sun, *Solar Physics* **212** (1) 3–6 (2003).

[35] D. Castelvecchi, Neutrinos reveal final secret of Suns nuclear fusion. Detection of particles produced by the Suns core supports long-held theory about how our star is powered, 24 June 2020, https://www.nature.com/articles/d41586-020-01908-2

[36] R.J. de Meijer and W. van Westrenen, The feasibility and implications of nuclear georeactors in Earth's coremantle boundary region, *South African Journal of Science* **104** (3-4) 111–118 (2008).

[37] H. H. Pennes, Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm, *Journal of Applied Physiology* **1** (2) 93–122 (1948).

[38] J. J. Telega and M. Stańczyk, Modelling of soft tissues behaviour, in: *Modelling in biomechanics*, edited by Józef Joachim Telega, Institute of Fundamental Technological Research Polish Academy of Sciences, Warsaw 2005, pp. 191–453.

[39] E. H. Wissler, Pennes 1948 paper revisited, *J. Appl. Physiol.* **85** (1) 35–41 (1998).

[40] B. Gambin, E. Kruglenko, A. Gałka and R. Wojnar, Macroscopic thermal properties of quasiinear cellular medium on example of the liver tissue, *Computer Assisted Methods in Engineering and Science* **22** (4) 329–346 (2015).

[41] L. Landau i E. Lifszic, *Mechanika ośrodków ciągłych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsawa 1958.

[42] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of continuous media*, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2009.

[43] R. Wojnar, Bohmian picture of the wave function and the gauge invariance, in: *Geometry, Integrability, Mechanics and Quantization*, Ivailo M. Mladenov, Mariana Hadzhilazova and Vasyl Kovalchuk (Editors), Avangard Prima, pp.411-424, Sofia 2015.

[44] M. Planck, *Treatise on thermodynamics*, transl. by Alexander Ogg, Longmans, Green and Co, Lonodn, New York and Bombay 1903.

[45] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal* **27** (3) 379–423 (July 1948).

[46] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal* **27** (4) 623–656 (October 1948).

[47] R. Kubo, in cooperation with H. Ichimura, Ts. Usui, N. Hashitsume, *Statistical mechanics*, an advanced course with problems and solutions, North-Hollan, Amsterdam - Oxford - New York - Tokyo 1965.

[48] L. Onsager, Reciprocal relations in irreversible processes. I., *Phys. Rev.* **37** 405–26 (1931).

[49] L. Onsager, Reciprocal relations in irreversible processes. II., *Phys. Rev.* **38** 2265–279 (1931).

[50] O. Penrose and P. C. Fife, Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions, *Physica* D **43** 4462 (1990).

[51] S. Nakajima, On quantum theory of transport phenomena: steady diffusion, *Prog. Theor. Phys.* **20** 948 (1958).

[52] R. Zwanzig, Ensemble method in the theory of irreversibility *J. Chem. Physics* **33**, 1338–1341 (1960).

[53] H. Mori, Transport, collective motion, and Brownian motion, *Prog. Theor. Phys.* **33** (3) 423–455 (1965).

[54] J. M. Dominy and D. Venturi, Duality and conditional expectations in the Nakajima-Mori-Zwanzig formulation, *J. Math. Phys.* **58** 082701 (2017).

[55] J. Xing and K. S. Kim, Application of the projection operator formalism to non-Hamiltonian dynamics, *J. Chem. Phys.* **134** 044132 (2011).

[56] H. Meyer, T. Voigtmann, and T. Schilling, On the dynamics of reaction coordinates in classical, time-dependent, many-body processes, *J. Chem. Phys.* **150** 174118 (2019).

[57] M. te Vrugt and R. Wittkowski, Mori-Zwanzig projection operator formalism for far-from-equilibrium systems with time-dependent Hamiltonians, *Phys. Rev.* E **99**, 062118 (2019).

[58] G. Sandri, A New metod of expansion in mathematical physics, *Il Nuovo Cimento* **36** 67–93 (1965).

[59] H. A. Lorentz, The motion of electrons in metallic bodies I, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen KNAW, Proceedings*, 7, 1904-1905, Amsterdam, 1905, pp. 438-453

[60] H. A. Lorentz, *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat*; a course of lectures delivered in Columbia University, New York, in March and April 1906, Columbia University Press, New York 1916.

[61] P. Drude, Zur Elektronentheorie der Metalle, *Annalen der Physik* **306** (3) 566, (1900).

[62] P. Drude, Zur Elektronentheorie der Metalle; II. Teil. Galvanomagnetische und thermomagnetische Effecte, *Annalen der Physik* **308** (11), 369, (1900).

[63] M. Suffczyński, *Elektrodynamika*, PWN, Warszawa 1980.

[64] M. Dressel; M. Scheffler, Verifying the Drude response, *Annalen der Physik* **15** (78) (2006).

[65] P. Drygaś, S. Gluzman, V. Mityushev, W. Nawalaniec , *Applied analysis of composite media: analytical and computational results for materials scientists and engineers*, WP Woodhead Publishing Elsevier, Duxford UK, Cambridge MA, Kidlington UK 2020.

[66] Bensoussans A., Lions J.- L. and Papanicolaou G.: *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*, North Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford 1980.

[67] Sanchez-Palencia E.: *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.

[68] Bakhvalov N. S. Panasenko G. P.: *Homogenisation: averaging processes in periodic media*: *mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Kluwer, Dordrecht - Boston - London 1989.

[69] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer, Berlin, Heidelberg 1994.

[70] R. Wojnar, S. Bytner, and A. Gałka, Effective properties of elastic composites subject to thermal fields, in: *Thermal Stresses V*, Lastran Corp., Rochester, NY, 1999, pp. 257–466.

[71] M. Smoluchowski, Contribution à la théorie de l'endosmose électrique et de quelques phénomènes corrélatifs, *Bull. Acad. Sci. Cracovie*, Cl. Sci. Math. et Natur. **63**, 110–127, 182–199 (1903); też: *Pisma Marjana Smoluchowskiego - Oeuvres de Marie Smoluchowski*, Wł. Natanson and J. Stock, Eds., Acad. Pol. Sci. Lett., Cracovie, Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Paris, t. I, 384–420, 1924.

[72] A. Fick, Ueber Diffusion, *Annalen der Physik* **94** (1) 59–86 (1855).

[73] J. Philibert, One and a half centuries of diffusion: Fick, Einstein, before and beyond, *Diffusion Fundamentals* **2** 1.1–1.10 (2005).

[74] S. Piekarski, On diffusion and thermodiffusion in a gravity field, *Journal of Technical Physics* **44** (3) 329–337 (2003).

[75] L. van Hove, Correlations in space and time and Born approximation scattering in systems of interacting particles, *Physical Review* **95** (1) 249 – (1954).

[76] J. Stecki, On the kinetic equation nonlocal in time for the generalized self-diffusion process, *Journal of Computational Physics* **7** (3) 547–553 (1971).

[77] A. A. Vlasov, On vibration properties of electron gas, *J. Exp. Theor. Phys.* (in Russian). **8** (3) 291 (1938).

[78] A. A. Vlasov, The vibrational properties of an electron gas, *Soviet Physics Uspekhi* **10** (6) 721–733 (1968).

[79] M. A. Narbutowicz, Kinetic equation for a heavy marked particle, *Reports on Mathematical Physics* **8** (1) 1–18 (1975).

[80] F. Perrin, Mouvement brownien d'un ellipsoide - I. Dispersion diélectrique pour des molécules ellipsoidales, *J. Phys. Radium* **5** 497–511 (1934).

[81] F. Perrin, Mouvement Brownien d'un ellipsoide (II). Rotation libre et dépolarisation des fluorescences. Translation et diffusion de molécules ellipsoidales, *J. Phys. Radium* **7** 1–11 (1936).

[82] Y. Han, A. M. Alsayed, M. Nobili, J. Zhang, T. C. Lubensky, A. G. Yodh, Brownian Motion of an Ellipsoid, Science 314, 626-630 (2006)

[83] A. Neild, J. T. Padding, Lu Yu, B. Bhaduri, W. J. Briels, & T. W. Ng, Translational and rotational coupling in Brownian rods near a solid surface, *Physical Review* E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics **82** (4) 041126–1/10 (2010).

[84] I. Gralinski, A. Neild, Tuck Wah Ng, and M. S. Muradoglu, Sorting of Brownian rods by the use of an asymmetric potential, *J. Chem. Phys.* **134** 064514 (2011).

[85] R. Wojnar, J. Stecki Kinetic equation for the dilute Lorentz gas with attractive forces, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **84** (2) 316–335 (1976).

[86] R. Wojnar, Kinetic equation for a gas with attractive forces as a functional equation, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica* **70** (1) April 2009.

[87] Ya. B. Zeldovich and A. S. Kompaneets, The theory of heat propagation in the case where conductivity depends on temperature, in: Collection of papers celebrating the seventieth birthday of Academician A. F. Ioe, pp. 6171, ed. P. I. Lukirskii, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moskva, 1950, (in Russian).

[88] M. Smoluchowski, von, Drei Vortrage uber Diffusion, Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen, *Phys. Zeitschr.* **17**, 557–571 (1916).

[89] M. Smoluchowski, von, Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekulärbewegung und der Suspensionen, *Ann. Phys.* **21** 756-780 (1906).

[90] S. Chandrasekhar, M. Kac, R. Smoluchowski, *Marian Smoluchowski - his life and scientific work*, ed. by R. S. Ingarden, Seria: Polish Men of Science, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1999.

[91] M. Kac, Random walk and the theory of Brownian motion, *The American Mathematical Monthly* **54** (7) 369–391 (1947).

[92] P. G. Shewmon, *Diffusion in solids*, McGraw-Hill, New York 1963.

[93] S. Piekarski, On the modified Fick law and its potential applications, *Journal of Technical Physics* **46** (1) 3–7 (2005).

[94] S. Piekarski, Stress-assisted diffusion and the modified Fick law, *Journal of Technical Physics* **44** (2) 125–131 (2003).

[95] S. Piekarski, On diffusion and thermodiffusion in a gravity field, *Journal of Technical Physics* **44** (3) 329–337 (2003).

[96] S. Piekarski, On the Debye effect in a semiconductor and an alectrolyte, arXiv:cond-mat/0403758 [cond-mat.mtrl-sci], submitted on 31 Mar 2004 (v1), last revised 2 Apr 2004.

[97] Gaius Petronius Arbiter, Satyricon CXXVIII.

[98] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **3** (17) 21–86 (1900).

[99] R. N. Mantenga, H. E. Stanley, *Ekonofizyka Wprowadzenie*, tum. Ryszard Kutner, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

[100] C. Ludwig, Diffusion zwischen ungleich erwärmten Orten gleich zusammengesetzter Lösungen, *Sitzungber. Bayer Akad. Wiss. Wien Math.-Naturwiss. Kl.* **20** 539 (1856).

[101] Ch. Soret, *Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genve* t.II, p. 48-61.(1879)

[102] J. Tyndall, *Scientific Addresses*, Charles C. Chatfield & Co, New Haven, Conn. 1870.

[103] J. C. Maxwell, *Molecules*, Łecture delivered before the British Association at Bradford, by Prof. Clerk-Maxwell, F.R.S., *Nature* **8** 437–441 (1873). http://victorianweb.org/science/maxwell/molecules.html

[104] S. Duhr, D. Braun, Why molecules move along a temperature gradient, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **103** (52): (December 2006).

[105] W. L. Taylor, S. Weissman, W. J. Haubach, and P. T. Pickett, Thermal-diffusion factors for the neon-xenon system, *J. Chem. Phys.* **50** (11) 4886–4898 (1969).

[106] G. Müller & G. Vasaru, The Clusius-Dickel thermal diffusion column 50 years after its invention, *Isotopenpraxis Isotopes in Environmental and Health Studies* **24** (11-12) 455–464 (1988).

[107] W. H. Furry, R. Clark Jones, and L. Onsager, On the theory of isotope separation by thermal diffusion, *Phys. Rev.* **55** (11) 1083-1095 (1939).

[108] E. F. Shrader, Partial separation of the isotopes of chlorine by thermal diffusion, *Phys. Rev.* **69** (9-10) 439–442 (1946).

[109] L. Arnold, Britain and the H-Bomb , Palgrave Publishers Ltd, New York 2001.

[110] V. I. Ritus, V. L Ginzburg and the atomic project, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **60**(4) 413–418 (2017).

[111] S. Duhr, D. Braun, Thermophoretic depletion follows Boltzmann distribution, *PRL* **96** 168301 (2006).

[112] A. M. Mueller, D. Breitsprecher, S. Duhr, P. Baaske, T. Schubert, G. Längst, Microscale thermophoresis: a rapid and precise method to quantify protein-nucleic acid interactions in solution, in: *Methods in Molecular Biology* 1654. pp. 151–164 (2017).

[113] P. M. Thibado, P. Kumar, Surendra Singh, M. Ruiz-Garcia, A. Lasanta, and L. L. Bonilla Fluctuation-induced current from freestanding graphene *Phys. Rev.* E **102** 042101 (2020).

[114] Ch. J. Wienken, Ph. Baaske, U. Rothbauer, D. Braun, S. Duhr, Protein-binding assays in biological liquids using microscale thermophoresis, *Nature Communications*, pp. 1–7, Nat Commun. 2010 Oct 19;1:100. doi: 10.1038/ncomms1093. PMID: 20981028.

[115] Ph. A. E. Schoen, J. H. Walther, S. Arcidiacono, D. Poulikakos, P. Koumoutsakos, Nanoparticle traffic on helical tracks: thermophoretic mass transport through carbon nanotubes, *Nano Letters* **6** (9): 1910–1917 (2006).

[116] R. F. Streater, Nonlinear heat equations, *Reports on Mathematical Physics* **40** (3) 557–564 (1997).

[117] G. Gerlich R. D. Tscheuschner, On the barometric formulas and their derivation from hydrodynamics and thermodynamics, arXiv:1003.1508v2 [physics.ao-ph] 9 Mar 2010

[118] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik* [**322** (8)] (4) **17** 549–560 (1905).

[119] A. Einstein, Theorie der Brownschen Bewegung, *Zs. Elektrochem.* **14** 235-239 (1908).

[120] Ch. Cruickshank Miller, The Stokes-Einstein law for diffusion in solution, *Proceedings of the Royal Society of London*. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, **106** (740) 724–749 (1924).

[121] K. Makuch, R. Hołyst, T. Kalwarczyk, P. Garstecki and J. F. Brady, Diffusion and flow in complex liquids, *Soft Matter* November 2019, https://www.researchgate.net/publication/337113514

[122] R. G. Mortimer and H. Eyring, Elementary transition state theory of the Soret and Dufour effects, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **77** (4) 1728–1731 (1980).

[123] P. W. Anderson, B. I. Halperin & C. M. Varma, Anomalous low-temperature thermal properties of glasses and spin glasses, *Philosophical Magazine* **25** (1) 1–9 (1972).

[124] W. Kob, H. C. Andersen, Scaling behavior in the β-relaxation regime of a supercooled Lennard-Jones mixture, *Physical Review Letters* **73** (10) 1376–1379 (1994).

[125] P. Esquinazi, ed., *Tunneling systems in amorphous and crystalline solids*, Springer, Berlin 1998.

[126] J. Prost, J.-F. Chauvin, L. Peliti and A. Ajdari, Asymmetric pumping of particles, *Phys. Rev. Lett.* **72** (16) 2652–2655 (1994).

[127] P. Hänggi, F. Marchesoni, F. Nori, Brownian motors, *Annalen der Physik* (*Leipzig*) **14** (1-3) 51-70 (2005).

[128] R. Dean Astumian, The unreasonable effectiveness of equilibrium theory for interpreting nonequilibrium experiments, *American Journal of Physics* **74** 683–688 (2006).

[129] F. Gittes, Two famous results of Einstein derived from the Jarzynski equality, *American Journal of Physics* **86** 31–35 (2018).

[130] J.-L. Auriault, C. Boutin, J. Lewandowska, Mécanique des milieux hétérogènes, in: J.-L. Auriault, F. Darve, E. Dembicki, Z. Sikora (Eds.), *Some Selected Topics on Advanced Mechanics in Porous Materials*, Technical University of Gdańsk, Misiura, Gdańsk, 1997, pp. 1–199.

[131] V. L. Ginzburg, V. P. Shabanskii, Kinetic temperature of electrons in metals and anomalous electron emission, *Doklady Akademia Nauk SSSR* **100** (3) 445–447 (1955).

[132] M. I. Kaganov, I. M. Lifshits, and L. V. Tanatarov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31**, 232 (1956) [*Sov. Phys.-JETP* **4**, 173 (1957)].

[133] M. I. Kaganov, I. M. Lifshits, and L. V. Tanatarov, To the theory of radiation changes in metals, *At. Energ.* **6**, 391 (1959) [in Russian]. I. M. Lifshits, M. I. Kaganov, L. V. Tanatarov. To the theory of radiation changes in metals. *J. Nucl. Energ.* A **12**, 69 (1960).

[134] I. B. Levinson, Distribution of hot phonons generated by laser radiation, [*Sov. Phys.-JETP* **38** (1) 162–166 (1974)]; *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65**, 331 (1973).

[135] S. I. Anisimov, B. L. Kapeliovich, T .L. Perel'man, Elektronnaya emissiya s poverkhnosti metallov pod deistviem ul'trakorotkikh lazernykh impul'sov, *ZhETF* 66 (2), 776–779 (1974); or in English: Electron emission from metal surfaces exposed to ultrashort laser pulses, *Sov. Phys. JETP* **39** 375–377 (1974).

[136] Yu. V. Petrov, K. P. Migdal, N. A. Inogamov, V. V. Zhakhovsky, Twotemperature equation of state for aluminum and gold with electrons excited by an ultrashort laser pulse, *Appl. Phys.* B **119** 401–411 (2015).

[137] A. V. Shavlov, The ball-lightning model based on two-temperature plasma, *Doklady Physics* **55** (3) 109-114 (2010). Original Russian published in *Doklady Akademii Nauk* **431** (2) 177–182 (2010).

[138] Lan Jiang, Hai-Lung Tsai, Improved two-temperature model and its application in ultrashort laser heating of metal films, *Journal of Heat Transfer* **127** 1167–1173 (2005).

[139] W. Bielski, P. Kowalczyk, R. Wojnar, Two-temperature heat transfer in metal films, *Conference Proceedings Eurotherm Seminar No 109* NHT2015, Numerical Heat Transfer 2015, 27-30 September 2015, Gliwice-Warsaw, Poland, Eds.: A.J. Nowak, J. Banaszek, B. Šarler, Institute of Thermal Technology Silesian University of Technology, Institute of Heat Engineering Warsaw University of Technology Gliwice - Warszawa 2015.

[140] H. C. Brinkman, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, *Applied Scientific Research* **1** (1) 27–34 (1949).

[141] F. J. Valdes-Parada, J. A. Ochoa-Tapia, J. Alvarez-Ramirez, On the effective viscosity for the Darcy-Brinkman equation, *Physica* A, Statistical Mechanics and its Applications, **385** (1) 69–79 (2007).

[142] P. Y. Polubarinova-Kochina, *Theory of groundwater movement*, Princeton Univ. Press, Princeton 1962.

[143] J. Sęk, M. Błaszczyk, M. Bartos, Hydrodynamic and kinetic study of an elution of a high viscosity liquid from the sand bed using eluent of low viscosity, *Chemical and Process Engineering* **33** (1) 31–41 (2011).

[144] M. A. Patel, N. B. Desai, An Approximate analytical solution of Boussinesq's equation for infiltration phenomenon in unsaturated porous medium, *International Journal of Mathematics and Applications* **6** (1C) 463–470 (2018).

[145] M. A. Patel, N. B. Desai, Homotopy analysis approach of Boussinesq equation for infiltration phenomenon in unsaturated porous medium, *Mathematical Journal of Interdisciplinary Sciences* **7** (1) 21–28 (2018).

[146] J. Rychlewski J., *CEIIINOSSSTTUV: Matematyczna struktura ciał sprężystych*, Inst. Problem Mechaniki AN SSSR, reprint No 217, Moskwa 1983 (w j. rosyjskim/ in the Russian) [Mathematical structure of elastic bodies]

[147] J. Rychlewski, Elastic energy decomposition and limit criteria, *Uspekhi Mekh. Advances in Mech.* **7** 51–80 (1984) (w j. rosyjskim).

[148] A. K. Wróblewski, *Prawda i mity w fizyce*, Wydawnictwo Iskry, 1987.

[149] R. B. Hetnarski, J. Ignaczak, *The mathematical theory of elasticity*, Second Edition, CRC Press Taylor& Francis Goup, Boca Raton, London, New York 2011.

[150] R. B. Pęcherski, P. Szeptyński, M. Nowak, An extension of Burzyski hypothesis of material effort accounting for the third invariant of stress tensor, *Archives of Metallurgy and Materials* **56** (2) 503–508 (2011).

[151] A. M. Kosevich, Equation of motion of dislocation, *Zh. E. T. F.* **43** 637-648 (1962).

[152] A.M.Kosevich,*Theory of crystal lattice*, Kharkiv State University, Vishcha Shkola, Kharkiv, 1988 (in Russian); Translated into English: WILEY-VCH, Berlin, New York, 1999.

[153] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of elasticity*, Vol. 7 of Course of Theoretical Physics, Pergamon Press, Oxford 1970.

[154] J. Ignaczak and C. R. A. Rao, Stress characterization of elastodynamics with continuously distributed defects, *J. Elasticity* **30** 219–250 (1993).

[155] K. Lee, D. S. Stewart, Modeling aluminum combustion in oxidizing environment with the Gibbs formulation, *Combustion and Flame* **220** 92–106 (2020).

[156] D. S. Stewart, K. Lee, Modeling the thermo-mechanical-chemical behavior of condensed phase reactive materials, *Propellants, Explosives, Pyrotechnics* **45** 270–283 (2020).

[157] S. J. Matysiak, V. J. Pauk, A. A. Yevtushenko, On applications of the microlocal parameter method in modelling of temperature distributions in composite cylinders, *Archive of Applied Mechanics*, Springer 1998.

[158] S. J. Matysiak, O. M. Ukhanska, On two-dimensional heat conduction problem of a periodic stratified convective half-space with a moving heat source, *International Communications in Heat and Mass Transfer* **24** (1) 129–138 (1997).

[159] S. J. Matysiak, A. A. Yevtushenko, Mixed nonstationary problem of heat conduction for a microperiodic two-layered half-space, *International Communications in Heat and Mass Transfer* **34** (9) 1101–1107 (2007).

[160] E. Pazera, P. Ostrowski, Heat transfer in functionally graded laminate - third type boundary conditions, *AIP Conference Proceedings* 2239, 020040 (2020).

[161] P. Langevin and C. Chilowsky, Echo sounding, *Nature* **115** 689–690 (1925).

[162] M. Born M. & H. Kun, *Dynamical theory of crystal lattices*, Clarendon Press, Oxford University Press 1954.

[163] W. G. Cady, *Piezoelectricity, an introduction to the theory and applications of electromechanical phenomena in crystals*, vol. 2. Dover Publications, New York 1964.

[164] V. L. Ginzburg, Phase transitions in ferroelectrics: some historical remarks, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk and Russian Academy of Sciences Physics-Uspekhi* **44** (10) 1037–1044 (2001).

[165] B. Gambin, Wpływ mikrostruktury na wasności kompozytów sprężystych, piezoelektrycznych i termosprę zystych, *Prace IPPT - IFTR Reports*, Warszawa 2006.

[166] D.- M. Shin, S. W. Hong and Y.- H. Hwang, Recent advances in organic piezoelectric biomaterials for energy and biomedical applications, *Nanomaterials* **10** (1), 123 (2020).

[167] A. Gałka, J. J. Telega, R. Wojnar, Homogenization and thermopiezoelectricity, *Mechanics Research Communications* **19** (4), 315–324 (1992).

[168] A. Gałka, J. J. Telega, R. Wojnar, Some computational aspects of homogenization of thermopiezoelectric composites *Comput. Assist. Mech. Eng. Sci.* **3** (2) 133–154 (1996).

[169] V. Mityushev, Cluster method in composites and its convergence, *Applied Mathematics Letters* **77** 44–48 (2018).

[170] Q.-H. Qin, Q.-S. Yang, *Macro-micro theory on multifield coupling behavior of hetereogenous materials*, Higher Education Press and Springer, Beijing 2008.

[171] F. Fantoni, A. Bacigalupo, M. Paggi, Multi-field asymptotic homogenization of thermopiezoelectric materials with periodic microstructure, *International Journal of Solids and Structures* **120** 31–56 (2017).

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

5.1 Opis dorobku naukowego nie związanego z tematem habilitacji

Oprócz zagadnień związanych z tematem niniejszej rozprawy habilitacyjnej w działalności naukowej zajmowałem się zagadnieniemi:
1. teoria sprężystości i termosprężystości,
2. pomiary optyczne w mechanice doświadczalnej,
3. biomechanika: zagadnienia wzrostu tkanek, w szczególności kości i chrząstki,
4. mechanika krystalizacji, granice ziaren, nanodruty,
5. przepływy w kanałach,
6. fizyka zjawisk ekonomicznych.

Co do punktu 1 są to prace, np: N30, N31, N33, N49, N51, N52.
Co do punktu 2 są to prace: N35, N42, N47.
Co do punktu 3 są to prace, np: N10, N12, N13, N19, N20.
Co do punktu 4 są to prace: N1, N8, N9, N21.
Co do punktu 5 są to prace, np: N2, N6, N7.
Co do punktu są to prace, np: N11, N17.

Do większych prac należy rozdział poświęcony homogenizacji (praca zbiorowa, podana w rozdziale 4 jako pozycja bibliograficzna [70]) i rozdział [N13] poświęcony biomechanice kości i chrząstki, wymieniony poniej.

Poniżej wymieniam inne moje prace związane z ogólnie rozumianą teorią sprężystości i biomechaniką.

[N1] R. Wojnar, Helisa Boerdijka-Coxetera – w geometrii, biologii, fizyce, , w monografii: Postępy w badaniach fizykochemicznych - wybrane zagadnienia, str. str.180-197, redakcja: Zbigniew Czyż, Wydawnictwo Naukowe TYGIEL sp. z o.o., 2019.

[N2] R. Wojnar, and W. Bielski, Gravity driven flow past the bottom with small waviness, in: Modern Problems in Applied Analysis, Piotr Drygaś and Sergei Rogosin Editors, Birkhäuser, Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, Cham, Switzerland 2018, pages 181-202.

[N3] W. Bielski, R. Wojnar, Stokes flow through a tube with wavy wall, in: Dynamical Systems in Theoretical Perspective, edited by Jan Awrejcewicz, pp. 379-390, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 248, Springer International Publishing AG, part of Springer Nature 2018.

[N4] N. Rylko, R. Wojnar, rozdział: Resurgence edge effects in composites: fortuity and geometry, in: *Geometry, Integrability, Mechanics and Quantization*, Ivailo M. Mladenov, Mariana Hadzhilazova and Vasyl Kovalchuk (Editors), Avangard Prima, Sofia, ISBN 978-619-160-488-3, pp.342–349, 2015.

[N5] R. Wojnar, Bohmian picture of the wave function and the gauge invariance, in: *Geometry, Integrability, Mechanics and Quantization*, Ivailo M. Mladenov, Mariana Hadzhilazova and Vasyl Kovalchuk (Editors), Avangard Prima, Sofia, ISBN 978-619-160-488-3, pp.411–424, 2015.

[N6] R. Wojnar, W. Bielski, Laminar flow past the bottom with obstacles - a suspension approximation, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* **63** (3) 685–695 (2015).

[N7] R. Wojnar, Flow in the canal with plants on the bottom, in: *Complex Analysis and Potential Theory with Applications*, Editors: Tahir Aliev Azeroğly, Anatoly Golberg, Sergei V.Rogosin, Cambridge Scientic Publishers, 2014.

[N8] R. Wojnar, P. Wojnar, S. Kret, Elastic state induced energy gap variation in ZnTe/ZnMgTe core/shell nanowires, *Technische Mechanik* **34** (3–4) 233–245 (2014).

[N9] P. Wojnar, M. Zielinski, E. Janik, W. Zaleszczyk, T. Wojciechowski, R. Wojnar, M. Szymura, Łukasz Kłopotowski, L. T. Baczewski, A. Pietruchik, M. Wiater, S. Kret, G. Karczewski, T. Wojtowicz, J. Kossut, Strain-induced energy gap variation in ZnTe/ZnMgTe core/shell nanowires, *Applied Physics Letters* **104** (16), 163111 (2014).

[N10] R. Wojnar, Modelling polycrystalline structure of collagen fibrils dense packing by the most uniform concentric pattern among all possible 2D polycrystals, *International Conference of the Polish Society of Biomechanics: BIOMECHANICS 2014*, Abstracts, Editors: J. Awrejcewicz, R. Grądzki, M. Kaźmierczak, J. Mrozowski, pp. 243–244, Łódź, September 1-3, 2014.

[N11] R. Wojnar, Rayleigh's distribution, Wigner's surmise and equation of the diffusion, Proceedings of the 6th Polish Symposium of Physics in Economy and Social Sciences (FENS2012), Gdańsk, Poland, *Acta Physica Polonica* A**123** (3) 624–628 (2013).

[N12] R. Wojnar, Bone and cartilage - its structure and physical properties, in: *Biomechanics of hard tissues; modeling, testing and materials*, pp.1–75, Edited by Andreas Öchsner and Waqar Ahmed, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim 2010.

[N13] R. Wojnar, Strains in tissue development: a vortex description, *More Progresses In Analysis*, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress , Catania, Italy, 25 30 July 2005, Edited By: H. G. W. Begehr (Freie Universität Berlin, Germany) and F. Nicolosi (Universitá di Catania, Italy), pp. 1271–1281, World Scientific 2009.

[N14] W. Bielski and R. Wojnar, Homogenisation of flow through double scale porous medium, in: eds. A.A. Kilbas and S.V. Rogosin, *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations*, pp. 2744, AMADE Cambridge Scientific Publishers, Cambridge 2008.

[N15] J. J. Telega, R. Wojnar, Electrokinetics in random piezoelectric porous media, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* **55** (1) 125–128 (2007).

[N16] W. Bielski, R Wojnar, Homogenisation of flow through double scale porous medium, *Analytic methods of analysis and differential equations* AMADE, 2006.

[N17] R. Wojnar, The average behaviour of financial market by 2 scale homogenisation, *Acta Physica Polonica* B **37** (11) 3177–3185 (2006); arXiv preprint physics/0608191, 2006.

[N18] J. J. Telega, R. Wojnar, Electrokinetics in random deformable porous media, *IUTAM Symposium on Physicochemical and Electromechanical Interactions in Porous Media*, pp. 117–124, Edited by J.M. Huyghe, Peter A.C. Raats and Stephen C. Cowin, SOLID MECHANICS AND ITS APPLICATIONS, Volume 125, Series Editor: G.M.L. GLADWELL, Springer, Dordrecht 2005.

[N19] R. Wojnar, Structural control in tissue development, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **43** (4) 805–812 (2005).

[N20] J. J. Telega and R. Wojnar, Streaming potentials in biological tissues, *AMAS Workshop in Orthopaedic Biomechanics OBM '02*, Warsaw 2002, pp. 387–454.

[N21] A. Lissowski, R. Wojnar, Computer simulation of Bragg-Nye model of crystallization, *Structured Media - TRECOP '01* In memory of Professor Ekkehart Kröner, Poznań, Poland, September 16–21, 2001; Proceedings of the International Symposium, Editor Bogdan T. Maruszewski, Poznań University of Technology, Poznań 2002, pp. 159–168.

[N22] R. Wojnar, Dynamic growth of a spherical inclusion in thermoelastic medium, *Materials Physics and Mechanics* **3** 52–56 (2001).

[N23] R. Wojnar Distortion equation of motion in linear incompatible elastodynamics, *Archives of Mechanics* **51** (1) 3–13 (1999).

[N24] W. Bielski, J.J. Telega, R.Wojnar, Nonstationary flow of a viscous fluid through a porous elastic medium: Asymptotic analysis and two-scale convergence, *Mechanics Research Communications* **26** (5) 619–628 (1999).

[N25] W. Bielski, J. J. Telega, R. Wojnar, Macroscopic equations for nonstationary flow of Stokesian fluid through porous elastic medium, *Archives of Mechanics* **51** (3–4) 243–274 (1999).

[N26] R. Wojnar, Diffusion and nonlinear heat equation, Troisièmes Rencontres Internationales autour de la Thermodiffusion R.I.T. 3, Mons, Belgique, 31 août - 4 septembre 1998, *Entropie* (Paris) **35** (218) 67–68 (1999).

[N27] R. Wojnar, Upper and lower bounds on heat flux, *Journal of Thermal Stresses* **21** (3–4) 381–403 (1998).

[N28] R. Wojnar, On fluctuations in thermoelasticity of composites, *Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej*, Mechanika **66** 277–283 (1998).

[N29] R. Wojnar & J. J. Telega, Electrokinetics in dielectric porous media, in: *Problems of Environmental and Damage Mechanics*, edit. W. Kosiński, R. de Boer, D. Gross, Wydawnictwa IPPT PAN, Warszawa 1997, pp. 97–136.

[N30] A. Gałka & R. Wojnar, Stresses generated in an elastic half-space by laser pulses, *Journal of Thermal Stresses* **18** (2) 113–140 (1995).

[N31] R. Wojnar, Homogenization of electric conductor and Joule-Lenz heat, *Journal of Technical Physics* **35** (1–2) 151-159 (1994).

[N32] A. Gałka and R. Wojnar, Propagation of one-dimensional thermoelastic waves in the presence of stress and temperature-dependent heat source, *7th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, Bologna, Italy, October 4–9, 1993; Editors: Salvatore Rionero, Tommaso Ruggeri, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences - Vol. 23, World Scinetific, Singapore - New Jersey - London - Hong Kong 1994.

[N33] A. Gałka, J. J. Telega, R. Wojnar, Thermodiffusion in heterogeneous elastic solids and homogenization, *Prace IPPT - IFTR Reports*, ISSN: 2299-3657, No.14, pp.1-76, 1993.

[N34] A. Gałka, R. Wojnar, Dynamiczne naprężenia cieplne w półprzestrzeni sprężystej wywołane przez impuls laserowy, *PRACE IPPT · IFTR REPORTS* 25/1993 IPPT PAN, Warszawa 1993.

[N35] R. Wojnar, Determination of the pricipal stress directions by superposition of isochromatic fringe patterns, *Österreichische Ingenieur- und Architekten - Zeitschrift; Zeitschrift des Österreichscher Ingenieur- und Architekten Vereins*, Jahrgang 132, Heft 7/8, 239–241 (1987).

[N36] R. Wojnar, Analogy between nonrelativistic Schrödinger wave equation and dynamic Kirchhoff plate equation, *Problems in Quantum Physics II: Recent and Future Experiments and Interpretations* Proceedings of the Conference, Gdańsk '89, ed. by Jacek Mizerski, Andrzej Posiewnik, Jarosław Pykacz and Marek Żukowski, World Scientific, Singapore 1990.

[N37] R. Wojnar, Surface waves in thermoelasticity with relaxation times, in: D. F. Parker et al. (eds.), *Recent Developments in Surface Acoustic Waves*, pp.335–341, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988.

[N38] R. Wojnar, Homogeneous solutions and energy of a linear anisotropic elastic strip, *Arch. Mech.* **40** (5–6) 857–869 (1988).

[N39] R. Wojnar, Uniqueness of the displacement - heat flux problem in thermoelasticity with two relxation times, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* **33** (5–6) 217–227 (1985).

[N40] R. Wojnar, Two-dimensional fields of thermoelasticity with relaxation times, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences* **33** (7–8) 307–323 (1985).

[N41] R. Wojnar, Uniqueness of displacement-heat flux and stress-temperature problems in thermoelasticity with one relaxation time, *Journal of Thermal Stresses* **8** (4) 351–364 (1985).

[N42] R. Wojnar, Zastosowanie wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera do rozdzielenia naprężeń w elastooptyce, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **2** (23) 255–265 (1985).

[N43] R. Wojnar, Pewne analogie między polem sprężystym a elektromagnetycnym, *Archiwum Elektrotechniki* **34** (131/132 - 1/2), 483-484 (1985).

[N44] R. Wojnar, Rayleigh waves in thermoelasticity with relaxation times, in: *International Conference on Surface Waves in Plasma and Solids*, Ohrid, Yugoslavia, World Scientific, Singapore 1985.

[N45] R. Wojnar, Wyznaczanie różnicy naprężeń normalnych na podstawie obrazu izochrom, *Rozprawy Inżynierskie - Engineering Transactions* **31** (2) 279–290 (1983).

[N46] J. Lietz, B. Michalski, R. Wojnar, Zastosowanie metody kolejnych rozwiązań sprężystych do elastooptycznego badania ośrodka sprężysto-plastycznego z otworem walcowym, (Praca stanowi rozszerzenie referatu przedstawionego na VIII Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, Warszawa, 4–6 września 1978, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics - Mechanika Teoretyczna i Stosowana* **17** (3) 391–404 (1979).

[N47] R. Wojnar, The determination of Poisson's ratio by the moiré method, *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Techn.* **25** 11-16 (1977).

[N48] R. Wojnar, Zastosowanie formuły Liebmanna do opracowywania wyników badań elastooptycznych, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **15** (2) 155–177 (1977).

[N49] R. Wojnar, On the uniqueness of solutions of the stress equations of elastostatics, *Archives of Mechanics - Archiwum Mechaniki Stosowanej* **28** (2) 237–243 (1976).

[N50] R. Wojnar, The dynamic problem of stress averaged over the thickness, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Série des sciences techniques* **23** (10) 453–462 [817]–[826] (1975).

[N51] R. Wojnar, Uniqueness theorem for stress equations of isochoric motions of linear elasticity, *Archives of Mechanics - Archiwum Mechaniki Stosowanej* **26** 747–750 (1974).

[N52] R. Wojnar, On a plane state of stresses in linear elastodynamics, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Série des sciences techniques* **22** (10) 533–537 [865]–[869] (1974).

5.2 Kierowanie i uczestnictwo w grantach

Kierowanie grantami:
nr 4 T07A 003 27, Wpływ mikrostruktury na właności mechaniczne tkanki kostnej i materiałów biomimetycznych, 2005–2008, Departament Badań Naukowych Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, ul. Wspólna 1/3, 00-529 Warszawa.

Uczestnictwo w grantach:
Państwowy Komitet Badań Naukowych (KBN) granty nr: 7 T07 A 016 12, 8 T11 F 018 12, 8 T11 F 017 18.

5.3 Prezentacje na konferencjach, seminariach, sympozjach

Poniżej wymieniam referaty wygłoszone na konferencjach:

[R1] R. Wojnar, Kapsydy wirusów jako wielościany, II Ogólnopolska Przyrodnicza Konferencja Naukowa *Mater naturae* - osiągnięcia, wyzwania i problemy nauk przyrodniczych, Fundacja na rzecz promocji nauki i rozwoju TYGIEL, Lublin, 11 grudnia 2020r.

[R2] R. Wojnar, Moments of the Van Hove dynamic scattering law, *33rd M. Smoluchowski Symposium on Statistical Physics*, Thursday 03 December 2020 - Friday 04 December 2020.

[R3] R. Wojnar, Helisy i piezoelektryczność, *XII Interdyscyplinarna Konferencja Naukowa TYGIEL 2020:Interdyscyplinarność kluczem do rozwoju*, Fundacja na rzecz promocji i rozwoju TYGIEL, Lublin, 24–27 września 2020r.

[R4] R. Wojnar, Rozkład Bosego–Einsteina i prawo Pareta, *XII Interdyscyplinarna Konferencja Naukowa TYGIEL 2020* – Interdyscyplinarność kluczem do rozwoju, Fundacja na rzecz promocji i rozwoju TYGIEL, Lublin, 24–27 września 2020r.

[R5] W. Bielski, R. Wojnar, Gravity waves in canals with corrugated bottom: an asymptotic approach, INTERNATIONAL CONFERENCE Dynamical Systems – Theory and Applications DSTA, December 2–5, ódź 2019.

[R6] J. Wołowicz, A. Lissowski, R. Wojnar, How to construct BC-helix from the simplest children's toy: the equilateral triangle, *World Congress on Physics*, October 17–19, 2019, Berlin.

[R7] R. Wojnar, Kinetic equation for the pair distribution function in the Boltzmann gas, *32nd Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics*, 18–20 September, 2019, Kraków.

[R8] R. Wojnar,Kinetic equation for a heavy marked particle in an external field, *51 Symposium on Mathematical Physics*, Toruń, 16–18 June 2019.

[R9] W. Bielski, R. Wojnar, Brinkman's regularization of Darcian seepage, *4th Polish Congress of Mechanics and 23rd International Conference on ComputerMethods in Mechanics*, PCM-CMM-2019,Kraków, Poland, September 8–12, 2019.

[R10] R. Wojnar, Coxeter-Boerdijks helix as the smallest nanotube, *Biomolecules and Nanostructures 7*, 15–19 May 2019, Pomlewo near Gdask; (Biomolecules and Nanostructures 7 conference organized under the auspices of the Division of Physics in Life Science of the European Physical Society. www.nanofun.edu.pl/bionano7/).

[R11] R. Wojnar, Helisa Boerdijka-Coxetera – w geometrii, biologii, zyce, ... , *XI Interdyscyplinarna Konferencja Naukowa TYGIEL 2019* – Interdyscyplinarność kluczem do rozwoju, Lublin, 23–24 marca 2019 r. www.konferencja-tygiel.pl/

[R12] W. Bielski, P. Kowalczyk and R. Wojnar, Thermal stresses and two temperature heat transfer, *41st Solid Mechanics Conference* 41th SolMech2018, Organizers: Institute of Fundamental Technological Research and Committee on Mechanics Polish Academy of Sciences, August 27-31, 2018, Warsaw, Poland.

[R13] R. Wojnar, Movement of coincidence grain boundaries with Sigma = 7, 13, 19, ... , 49, ... ,91, ... : from isotropy to anisotropy, *41st Solid Mechanics Conference* 41th SolMech2018, Organizers: Institute of Fundamental Technological Research and Committee on Mechanics Polish Academy of Sciences, August 27-31, 2018, Warsaw, Poland

[R14] R. Wojnar, Noether's theorem, symmetries and conservation laws, *W setną rocznicę twierdzenia Noether*, okolicznościowe seminarium ZTOCiN IPPT PAN, 19 lipca 2018r.

[R15] R. Wojnar, Kinetic equation for the dilute Boltzmann gas in an external field, *XXX Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics* Kraków, Poland, September 3–8, 2017.

[R16] W. Bielski (IGF PAN) and R. Wojnar (IPPT PAN), Brinkman's flow through porous elastic media: an asymptotic approach, *40th Solid Mechanics Conference* 40th SolMech2016, Session 3: Geomechanics and multiscale modelling of materials - 31.08 2016, 16:20, organized by Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland, 29.08.–2.09.2016.

[R17] W. Bielski, R. Wojnar, Plane flow through the porous medium with chessboard-like distribution of permeability, *2 nd Workshop on Porous Media, Book of Abstracts*, p.7, Olsztyn, 28–3 0 June 2018, University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Faculty of Technical Sciences, Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, Olsztyn - Poland, 28–30 June 2018.

[R18] W. Bielski, R. Wojnar, Laminar flow past the bottom with obstacles: suspension and porous medium approximations, *1 st Workshop on Porous Media, Book of Abstracts*, p.8, Olsztyn, 1–3 July 2016, University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Faculty of Technical Sciences, Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, Olsztyn - Poland, 1–3 July 2016.

[R19] R. Wojnar, Local interactions and global events, *SFINKS, Sympozjum Fizyki Interdyscyplinarnej w Naukach Ekonomicznych i Społecznych*, Politechnika Warszawska, 23 czerwca 2016r.

[R20] W. Bielski, R. Wojnar, Boundary value problem for the interface between Stokes' and Brinkman's flows, *BFA 2016, The 3rd International Workshop:Boundary Value Problems, Functional Equations and Applications*, Rzeszów, Poland, April 20-23, 2016.

[R21] W. Bielski, R. Wojnar, Laminar flow past the bottom with obstacles - from suspension to poorus medium, in: *PCM-CMM-2015 3rd Polish Congress of Mechanics & 21st Computer Methods in Mechanics*, pp.267–268, Gdańsk, Poland, September 8th–11th 2015, pp.207–208.

[R22] R. Wojnar, B. Gambin, Thermal properties of biomaterials on the example of the liver, in: *PCM-CMM-2015 3rd Polish Congress of Mechanics & 21st Computer Methods in Mechanics*, pp.267–268, Gdańsk, Poland, September 8th–11th 2015, pp.267–268.

[R23] R. Wojnar, Modelling polycrystalline structure of collagen fibrils dense packing by the most uniform concentric pattern, in: *PCM-CMM-2015 3rd Polish Congress of Mechanics & 21st Computer Methods in Mechanics*, pp.267–268, Gdańsk, Poland, September 8th–11th 2015, pp. 269–270.

[R24] B. Gambin, E. Kruglenko, R. Wojnar, Macroscopic thermal properties of quasi-linear cellular medium on example of the liver tissue, *The Conference Proceedings of the Numerical Heat Transfer 2015* - Eurotherm Seminar No. 109, 27–30 September 2015, Warsaw, Poland, Edited by Andrzej J. Nowak, Jerzy Banaszek, Bozidar Sarler, pp.177–178, Institute of Thermal Technology, Silesian University of Technology, Konarskiego 22, 44-100 Gliwice, Poland, www.itc.polsl.pl; Institute of Heat Engineering, Warsaw University of Technology, Nowowiejska 21/25, 00-665 Warszawa, Poland, www.itc.pw.edu.pl; Gliwice - Warsaw 2015.

[R25] R. Wojnar, Dyfuzja i prawa zachowania, *XLIII Zjazd Fizyków Polskich*, 6–11 września 2015, Kielce.

[R26] R. Wojnar, Linear description of the nonlinear reality, *MULTIPHYSICS 2014*, 11-12 Dec 2014, Sofia, Bulgaria

[R27] R. Wojnar, Optimal defects in polycrystalline collagen fibrils packing, *Mieżdunarodnyj Simpozium ≪ FIZIKA KRISTAŁŁOW 2013 ≫* poswiaszczennyj 100-letiju so dnia rożdenija profesora M. P. Szaskolskoj. Naucznyj Sowiet RAN po fizike kondensirowannych sred, Institut kristałłografii im. A. W. Szubnikowa RAN, 28 oktjabria - 2 nojabrja 2013 g., Moskwa, Tezisy dokładow, s. 47.

[R28] J. Wojnar, R. Wojnar, Piezoelektryczność i rośliny - Piezoelectricity and plants, *Interdyscyplinarne i aplikacyjne znaczenie nauk botanicznych*: 56. Zjazd Polskiego Towarzystwa Botanicznego w Olsztynie, w dniach 24–30 czerwca 2013 r.

[R29] R. Wojnar and W. Bielski, Flow in canal with rough bottom, *9th International ISAAC Congress* August 5–9, 2013 in Kraków, Poland, Editors: Vladimir Mityushev, Łukasz T. Stępień and Alfred Budziak.

[R30] R. Wojnar, Random walk, diffusion and wave equation, *XXV Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics, Fluctuation Relations in Nonequilibrium Regime*, Kraków, Poland, September 10–13, 2012.

[R31] R. Wojnar, Collagen structure: geometry and physics, *III Krajowa Konferencja Nano- i Mikromechaniki KKNM 2012*, 4-6 July 2012, IPPT PAN, Warszawa 2012.

[R32] R. Wojnar, Collagen triple helix, discrete Hopf fibration, dislocations ..., *THe Sixth European Congress of Mathematics* (6ECM), Kraków, Poland, July 27, 2012.

[R33] R. Wojnar, Growth of plants by vortices, *Acta Societatis Botanicorum Poloniae - Polish Journal of Botany*, Proceedings of the 55th Meeting of the Polish Botanical Society: *Planta in vivo, in vitro et in silico*, Warsaw, September 6–12, 2010, Vol. 79, Supplement 1, Warszawa 2010, p. 105.

[R34] R. Wojnar, Viscous incompressible flow in porous media, *Selected Topics of Contemporary Solid Mechanics*, Proceedings of the 36th Solid Mechanics Conference, Gdańsk, Poland, September 912, 2008, Zbigniew Kotulski, Piotr Kowalczyk, Włodzimierz Sosnowski (Editors), PRACE IPPT - IFTR REPORTS 2/2008, pp.124–125.

[R35] R. Wojnar, Kinetic equation for two particle distribution function in the dilute Boltzmann gas, *20th International Conference on Chemical Thermodynamics ICCT 2008*, Warsaw, August 3–8, 2008, organized by : the Institute of Physical Chemistry of the Polish Academy of Sciences, the Faculty of Chemistry of the Warsaw University of Technology, Department of Chemistry of the Warsaw Uniwersity and the Polish Chemical Society.
Symposium: Molecular simulations of fluids and statistical themodynamics (MS-ST), p. 265.

[R36] R. Wojnar, Nonlinear diffusion in external field, *20th International Conference on Chemical Themodynamics ICCT 2008*, Warsaw, August 3–8, 2008, Symposium: Molecular simulations of fluids and statistical themodynamics (MS-ST), p. 266.

[R37] R. Wojnar, Pochłanianie dźwięku w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, *VII Konferencja Nowe kierunki rozwoju mechaniki* PTMTS, Rogów, 6–8 czerwca 2008r., Symposium: Molecular simulations of fluids and statistical themodynamics (MS-ST), p. 266.

[R38] W. Bielski, A. Gałka, St. Tokarzewski, R. Wojnar, Prawa filtracji dla przepływów nieustalonych, *I Kongres Mechaniki Polskiej* KMP 2007, Warszawa, 28–31 sierpnia 2007. Streszczenia referatów: J. Kubik, W. Kurnik, W. K. Nowacki (Red.).

[R39] R. Wojnar, Subdiffusion with external time modulation, Proceedings of the 3rd Polish Symposium on Econo- and Sociophysics, Wrocław 2007, *Acta Physica Polonica* A **114** (3) 607–611 (2008).

[R40] R. Wojnar, Growth of plants and crystals, *Botanika w Polsce: sukcesy, problemy, perspektywy.* Streszczenia referatów i plakatów. Red. Kępczyńska E., Kępczyński J., Oficyna In Plus 2007, s. 54. Zjazd Polskiego Towarzystwa Botanicznego. Szczecin 3–8 września 2007.

[R41] W. Bielski and R. Wojnar, Nonstationary flow through porous piezoelectric body with two scale structure, *35*$^{\text{th}}$ *Solid Mechanics Conference*, Polish Academy of Sciences Institute of Fundamental Technological Research, Kraków, September 4–8, 2006, pp.125–126.

[R42] R. Wojnar, Smoluchowski's zeta potential in compressible flow, *35*$^{\text{th}}$ *Solid Mechanics Conference*, Polish Academy of Sciences Institute of Fundamental Technological Research, Kraków, September 4–8, 2006, pp.185–186. .

[R43] R. Wojnar, Two-level motion of Brownian particle, *Stochastic Models in Biological Sciences - Workshop*, European Science Foundation, Stefan Banach International Mathematical Center, Warsaw, Poland, May 29th - June 2nd 2006.

[R44] R. Wojnar, Strains in tissue development, in: $5^{(}th)$ *ISAAC Congress* July 25-30.2005, University of Catania, Italy, International Society for Analysis, its Applictaions and Computation, Conference Abstracts: III.5. Complex analytic methods in the applied sciences, p.165.

[R45] R. Wojnar, From Riemann zeta through L-functions, random matrices, quantum chaos, brownian diffusion, critical collective phenomena... to financial correlations, *Pierwsze Polskie Sympozjum z Ekono- i Socjofizyki - Symposium FENS*, Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej, 21 listopada 2004.

[R46] A. A. Gałka, J. J. Telega, R. Wojnar, Macroscopic relations for nonlinear thermodiffusion in heterogeneous elastic medium, *XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM 04*, 15 - 21 August 2004, Warsaw, Poland.

[R47] A. Lissowski, R. Wojnar, Animation of edge dislocations and tilt grain boundaries, *13*th *International Workshop Computational Mechanics and Materials IW CMM13*, September 22–23, 2003, Magdeburg, Germany, organized by Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg and State Materials Testing Institute (MPA) University of Stuttgart.

[R48] A. Lissowski, R. Wojnar, Structural control of stress and shape in 2D crystallization and in phyllotaxis – simulated optimal adaptive design, *AMAS Workshop on Smart Materials and Structures* SMART'03, Jadwisin, September 2–5, 2003, pp. 63–70.

[R49] R. Wojnar, Nonlinear heat equation and brownian diffusion, *Microscale Heat Transfer 2*, Reims, 8–10 July 2003.

[R50] A. Gałka, J. J. Telega and R. Wojnar, Cartillage modelling: elektromechanical behaviour and swelling, in : *Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics: Poromechanics II*, Grenoble, France, 26-28 August 2002; Poromechanics II, eds. J. - L. Auriault, Ch. Geindreau, P. Royer, J. - F. Bloch, C. Boutin, J. Lewandowska, A. A. Balkema Publishers, Lisse, Abingdan, Exton (PA), Tokyo 2002, pp. 59–64.

[R51] R. Wojnar, Rearrangement of pentagon-heptagon dislocations in grain boundaries, *Mehrfeldprobleme in der Kontinumsmechanik*, International Conference on Multifield Problems, April 8-10 2002, Wednesday, 10. April 2002, 15.30, Book of Abstracts, M. A. Efendiev, W. L. Wendland (Hrgb.)

[R52] W. R. Bielski, J. J. Telega and R. Wojnar, One- and two-phase nonsteady flows of viscous fluids through porous deformable medium, in : *Proceeding of the Second Biot Conference on Poromechanics: Poromechanics II*, Grenoble, France, 26-28 August 2002; Poromechanics II , eds. J - L.Auriault et al., A. A. Balkema Publishers, Lisse, Abingdan, Exton (PA), Tokyo 2002, pp. 339–344.

[R53] A. Lissowski, R. Wojnar, Nanocrystallization by 5-7 dislocations, *Intern. Symp. Advanced Problems in Mechanics 2002*, St Petersburg-Repino, July 2002.

[R54] R. Wojnar, Swelling of cartilage, *34*$^{\text{th}}$ *Solid Mechanics Conference*, Polish Academy of Sciences Institute of Fundamental Technological Research, Zakopane, September 4–8, 2001.

[R55] R. Wojnar, Dynamic growth of a spherical inclusion in thermoelastic medium, *Trudy XXVIII Letniej Szkoy: Aktualnyje Problemy Mechaniki*, Sankt-Peterburg (Repino) 1–10 ijunia 2000 goda, APM '2000, RAN, GAMM, tom 1, pod red. D. A. Indejewa, Sankt Peterburg 2001, pp. 134–141.

[R56] R. Wojnar, Prigogine conjecture for thermoviscoelastic body, *Theoretical Foundations of Civil Engineering* Polish-Ukraïnian Transactions, Pridneprovsk 27.06 - 1.07. 2001, ed. by W. Szcześniak, OW PW, Warsaw 2001.

[R57] A. Gałka, J. J. Telega and R. Wojnar, Influence of temperature on macroscopic moduli of piezoelectric composites, *Advanced Course on Structural Control and Health Monitoring: SMART '01*, May 22–25, 2001, Staszic Palace, Warsaw, Poland. Organizer: Jan Holonicki-Szulc, Centre of Excellence for Advanced Materials and Structures.

[R58] R. Wojnar, Chondrocyte deformation and the regulation of cartilage activity, *Advanced Course on Structural Control and Health Monitoring: SMART '01*, May 22–25, 2001, Staszic Palace, Warsaw, Poland. Organizer: Jan Holonicki-Szulc, Centre of Excellence for Advanced Materials and Structures.

[R59] W. Bielski, A. Gałka, J. J. Telega and R. Wojnar, Modelling of flow through elastic porous media by using homogenization methods, *Analyitic Methods of Analysis and Differential Equations AMADE 2001*, Conference, Section 2.4 Problems of mathematical physics, State University BSU, February 15–19, Minsk, Belarus, International Sport Center ISC Staiki 2001.

[R60] W. Bielski, J. J. Telega and R. Wojnar, Modelling of nonstationary two-phase flow through elastic porous medium, *33*rd *Solid Mechanics Conference SolMech 2000*, Institute of Fundamental Technological Research Center of Mechanics and Information Technology and Committee of Mechanics of Polish Academy of Sciences, Zakopane, September 5–9, 2000, pp. 109–110.

[R61] A. Gałka, J. J. Telega and R. Wojnar, Modelling of cartilage: anizotropy and inhomogeneity, *33*rd *Solid Mechanics Conference SolMech 2000*, Institute of Fundamental Technological Research Center of Mechanics and Information Technology and Committee of Mechanics of Polish Academy of Sciences, Zakopane, September 5–9, 2000, pp. 173–174.

[R62] S. Tokarzewski, G. Starushenko and R. Wojnar, Optimum configurations of arterial branching, *33rd Solid Mechanics Conference SolMech 2000*, Institute of Fundamental Technological Research Center of Mechanics and Information Technology and Committee of Mechanics of Polish Academy of Sciences, Zakopane, September 5–9, 2000, pp. 401–402.

[R63] R. Wojnar, Uniqueness theorem in dynamic thermoelasticity with dislocations, *33rd Solid Mechanics Conference SolMech 2000*, Institute of Fundamental Technological Research Center of Mechanics and Information Technology and Committee of Mechanics of Polish Academy of Sciences, Zakopane, September 5–9, 2000, pp. 429–430.

[R64] R. Wojnar, Dynamic growth of a spherical inclusion in thermoelastic medium, *Intern.Symp.Advanced Problems in Mechanics 2000*, St Petersburg-Repino, July 2000.

[R65] W. Bielski, J. J. Telega, R. Wojnar, Flow of two immiscible fluids through an elastic porous medium, *Mehrfeldprobleme in der Kontinumsmechanik*, Sonderforschungsbereich 404, *International Conference on Multifield Problems*, October 6–8 1999, Book of Abstracts, Bericht 99/12, A.-M. Sändig, W. L. Wendland (Hrsg.), p.22.

[R66] J. J. Telega, R. Wojnar, Chrząstka jako wielofazowy materiał anizotropowy - Cartilage a an anisotropic multiphase material, *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, Vol. 1, Supplement 1, 1999, Materiały IV Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej "BIOMECHANIKA '99"Proceedings of the 4 th Polish Scientific Conference "BIOMECHANICS '99", 8–11.09.1999, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999.

[R67] R. Wojnar, Diffusion and nonlinear heat equations, *Troisièmes Rencontres Internationales autour de la Thermodiffusion* R.I.T. 3, Mons, Belgique, 31 août - 4 septembre 1998; *Entropie* (Paris) **35** (218) 67–68 (1999).

[R68] A. Gałka, J. J. Telega and R. Wojnar, Effective moduli of thermoelastic composites with temperature-dependant coefficients, *Third International Congress on Thermal Stresses: THERMAL STRESSES '99*, June 13–17, 1999, Cracow, Poland, hosted by Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, *Proceedings*, eds. J.Skrzypek and R.B.Hetnarski, , pp.25-32, Cracow Univ.of Technology , Poland (ISBN 83-86991-57-7 ; 1999),

[R69] R. Wojnar, Heat flow in a heterogeneous body, *3rd International Congress on Thermal Stresses: THERMAL STRESSES 99*, June 13–17, 1999, Cracow, Poland, hosted by Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, *Proceedings*, eds. J.Skrzypek and R.B.Hetnarski, , pp.25-32, Cracow Univ.of Technology , Poland (ISBN 83-86991-57-7 ; 1999),

[R70] R. Wojnar, Effective Young's modulus of a polymer composite, *10th International Conference on Polymers Deformation, Yield and Fracture*, 7–10 April 1997, Conference papers, Churchill College, Cambridge, UK.

[R71] J. J. Telega and R. Wojnar, Electrolite flow through porous elastic medium, *344. Fluid-structure interactions in biomechanics* EUROMECH Colloquium, Prof. T. J. Pedley, Department of Applied Mathematical Studies, The University of Leeds, Leeds LS2 9JT, UK, Prof. C. G. Caro, London, 10-13 April 1996, London, England

[R72] R. Wojnar, Thermodynamics of solids with a state equation, *International Seminar on Machanisms and Mechanics of Solid–Solid Phase Transformations MECAMAT '95*, La Bresse, 16–19 May, 1995.

[R73] A. Gałka and R. Wojnar, Propagation of one-dimensional thermoelastoc waves in the presence of stress and temperature-dependent heat source, *7th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, Bologna, Italy, October 4–9, 1993..

[R74] A. Gałka, J. J. Telega, R. Wojnar, Homogenization of thermoelastic solid in the presence of diffusion, *Thermodynamics and Kinetic Theory* - Proceedings of the 5th Bilateral Polish- Italian Meeting, 28 August - 1 September 1990, Mądralin, Poland, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences - Volumen12, Editors Witold Kosiński, Wiesław Larecki, Angelo Morro and Henryk Zorski, World Scientific, Singapore-New Jersey- London-Hong Kong 1992, pp.35–48.

[R75] A. Gałka, J. J. Telega and R. Wojnar, Homogenization of elastic solid in presence of heat- and mass-diffusion transfer, *Second Minsk International Heat and Mass Transfer Forum*, (Academic Scientific Complex Ą. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the Academy of Sciences of Belarus") N. V. Pavlyukevich and I. G. Gurevich, Minsk 1992.

[R76] R. Wojnar, Homogeneous solutions and energy of a linear anisotropic elastic strip, *VI French-Polish Symposium on Nonlinear Mechanics*, Villard-de-Lans, France, September 28 - October 1, 1987.

[R77] R. Wojnar, Rayleigh-Lamb problem in an infinite thermoelastic plate with relaxation times, *Proc. XVII Yugoslav Congress of Theoretical and Appl. Mech.*, pp.149–153 (1986).

[R78] R. Wojnar, Rayleigh waves in thermoelasticity with relaxation times, in: ICSW-85, Surface waves in plasmas and solids, ed. S. Vukovic, World Scientific, Singapore 1986, pp. 682–685.

[R79] R. Wojnar, Uogólnione macierze Jonesa i ich zastosowanie w elastooptyce, *VII Sympozjum Badań Doświadczalnych w Mechanice*, 28–29 września 1976, IPPT–PW, 489–496, Warszawa 1976.

Wśród wyżej wymienionych są 23 referaty związane z tematem habilitacji wygłoszone na konferencjach krajowych i międzynarodowych. I tak odnoszą się do rozdziału
(4.4) Dyfuzja: R5, R6, R13, R31;
(4.5) Równanie ciepła, dyfuzja in termodyfuzja: R23, R27, R38, R44, R51, R60;
(4.6) Zjawiska sączenia przez ośrodki porowate: R30, R32, R37, R45, R65;
(4.7) Termosprężystość i termopiezoelektryczność: R50, R52, R54, R55, R64, R66, R69, R68.

W ramach Seminarium Zakładu Teorii Ośrodków Ciągłych i Nanostruktur IPPT PAN wygłosiłem również 9 wykładów związanych z tematem habilitacji:

[S1] 2019-02-15 W. Bielski, P. Kowalczyk, R. Wojnar, kolejno odpowiednio: Instytut Geofizyki PAN, Wydz. Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, IPPT PAN, *Plane flow through the porous medium with chessboard-like distribution of permeability.*

[S2] 2017-11-10 W. Bielski, IGF PAN, R. Wojnar IPPT PAN, *Przepływ Stokesa po dnie porowatym.*

[S3] 2016-10-21 W. Bielski, IGF PAN, R. Wojnar, IPPT PAN, *Laminarne przepływy niejednorodne: od zawiesin do ośrodków porowatych.*

[S3] 2015-10-09 W. Bielski[1], P. Kowalczyk[2], R. Wojnar[3], [1]IGF PAN, [2]Wydz. MIM UW, [3]IPPT PAN *Dwutemperaturowy przepływ ciepła w warstwie metalowej.*

[S4] 2013-04-12 R. Wojnar, *Wymiana ciepła i masy w zastosowaniach fizyki matematycznej.*

[S5] 2010-03-12 R. Wojnar, *Równanie dyfuzji i rozkłady Wignera.*

[S6] 006-06-23 R. Wojnar, *Dyfuzja w gospodarce.*

[S7] 2002-06-21 R. Wojnar, *Gaz Lorentza jako przykład dyfuzji w ośrodku porowatym.*

[S8] 2001-10-19 R. Wojnar, *Dwupoziomowa dyfuzja i nieliniowe równanie ciepła.*

[S9] 2000-11-24 R. Wojnar, *Przypuszczenie Prigogine'a i rozwiązanie Streatera.*

5.4 Organizacja konferencji, działalność recenzencka i edytorska

Od roku 1995 do chwili obecnej jestem sekretarzem naukowym Seminarium Zakładu Teorii Ośrodków Ciągłych i Nanostruktur IPPT PAN.

Recenzje dla czasopism:
Acta Geophysica, Acta Mechanica, Acta Physica Polonica A, Advances in Mechanical Engineering, Applied Mechanics Reviews, Archiwum Mechaniki Stosowanej - Archives of Mechanics, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, Computer Assisted Methods in Engineering Sciences CAMES, Mathematical Problems in Engineering, Rozprawy Inżynierskie - Engineering Transactions, Mechanika Teorretyczna i Stosowana - Journal of Theoretical and Applied Mechanics JTAM, Reports on Mathematical Physics RoMP.

5.6. Dydaktyka i popularyzacja nauki

W latach 2010 - 2015 prowadziłem w zastępstwie zajęcia z fizyki w gimnazjach i liceach warszawskich i podwarszawskich. (Zespół Państwowych Szkół Muzycznych im. Grażyny Bacewicz, Zespół Szkół im. inż. Stanisława Wysockiego, Zespół Szkół Ogólnokształcących im. Marii Dąbrowskiej w Komorowie.) W latach 1997 - 1999 prowadziłem zajęcia z mechaniki ośrodków ciągłych ze studentami w trybie zaocznym wydziału technicznego Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Olsztynie. Zajęcia obejmowały wykłady i ćwiczenia.

Festiwale nauki:

W latach 2003-2020 prowadziłem i współprowadziłem wielokrotnie lekcje pokazowe dla uczniów liceum i gimnazjum w ramach Festiwalu Nauki (FN) w dziedzinie: technika i technologia, np.

P. Ranachowski, R. Wojnar, *Porowata przyroda - od nanoporów do kości i betonu*, XXIV FN, *Szkoła marzeń*, Jazgarzewszczyzna, 05-501 Zalesie Dolne, - lekcja 24 września 2020, czwartek.

P. Ranachowski, R. Wojnar, Daria Jóźwiak-Niedźwiedzka, Erwin Grzebielichowski, *Porowata przyroda - od atomu do kości i betonu*, XXII FN, IPPT PAN, czwartek 27 września 2018.

M. Gliński, R. Wojnar, J. Wołowicz, *Indentacja i nanoindentacja: określanie twardości w mikro- i nanoskali, czyli obrazy i mowa kamieni*, XVI FN, Warszawa, 21–30 września 2012r.

R. Wojnar, *Błędny spacer po rynku finansowym* lekcja festiwalowa, 19.IX. g.10. X FN 2006r.

R. Wojnar, A. Lissowski, *Napięcia w rozwoju tkanek - Buckling in tissue development*, VII FN rok 2003, Lekcja festiwalowa i wykład z pokazem, 25. IX.

Popularyzacja nauki: publikacje

[P1] J. Wojnar, R. Wojnar, Kryzysy w fizyce i w ekonomii. Cz. 1, *Fizyka w Szkole* rok LVII nr 1 (306) s.4–15 (2010); Cz. 2, nr 2, s.4–13 (2010); Cz. 3, nr 3, s.4–14 (2010).

[P2] J. Wojnar, R. Wojnar, Ekonofizyka i socjofizyka: nowe gałęzie fizyki, *Fizyka w Szkole*, rok LV nr 5, s. 39–50 (2008).

[P3] R. Wojnar, Wokół Zasad Izaaka Newtona: recenzja wydawnictwa "Isaac Newton's *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", Proceedings of, 15–17 Oct. 1987, ed. W. A. Kamiński, World Scientific Publishing Co., Singapore 1988, *Sigma Magazyn Problemowo-Informacyjny Politechniki Wrocławskiej*, nr 175, 1990-1991.

[P4] J. Ignaczak, R. Wojnar, Teoria sprężystości - podstawy i zastosowania, wkład uczonych IPPT PAN do rozwoju teorii sprężystości w latach 1952-2002, *J. of Theoretical and Applied Mechanics* **41** (3) 711–730 (2003).

[P5] R. Wojnar, Some remarks on the calculus of probability and stochastic differential equations, *U podstaw przyrodoznawstwa i humanistyki*, pod red. T. Grabińskiej i M. Zabierowskiego, Wrocław 1998.

[P6] J. Wojnar, R. Wojnar, Achilles Zenona z Elei, *Fizyka w Szkole* rok XVVI, nr 1 (253), s.50–51 (2000); korekta nr 4 (2000), s. 179.

[P7] J. J. Telega, R. Wojnar, Main Polish historical and modern sources on applied mechanics, *Appl. Mech. Rev.* **49** (8) 401–432 (1996).

[P8] J. Wojnar, R. Wojnar, Jednoczesność zajścia a jednoczesność zobaczenia zdarzeń, *Fizyka w Szkole* nr 1 (144), rok XXVI, s.52–54 (1980).

5.5 Nagrody

Srebrny Krzyż Zasługi, odznaczony 7 października 2002r.

II Nagroda w Konkursie PTMTS w r. 1991 za pracę: Homogenization of stress equation of motion in linear elastodynamics.

II Nagroda w Konkursie PTMTS w r. 1977 za pracę: Wyznaczenie dewiatora naprężeń na podstawie obrazu izochrom.

Nagroda Sekretarza Naukowego Polskiej Akademii Nauk za udział w opracowaniu Nowych Równań Konstytutywnych Procesów Nieodwracalnych, 22 czerwca 1976 r.