



**Bartłomiej Dyniewicz**

**Dynamiczne właściwości układu hybrydowego  
poddanego ruchomym źródłom zaburzeń**

**rozprawa doktorska**

**promotor: doc. dr hab. inż. Czesław Bajer**

**Warszawa 2008**

# Spis treści

<b>1. Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>2. Równania ruchu</b>	<b>10</b>
2.1. Równanie ruchu struny pod ruchomym obciążeniem . . . . .	10
2.2. Równanie belki Bernoulliego-Eulera pod ruchomym obciążeniem . . . . .	12
2.3. Równanie belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem . . . . .	13
<b>3. Rozwiązania analityczne równania struny</b>	<b>15</b>
3.1. Inercyjna struna pod działaniem ruchomej stałej siły – rozwiązanie klasyczne . . . . .	15
3.1.1. Przypadek $v \neq c$ . . . . .	18
3.1.2. Przypadek $v = c$ . . . . .	18
3.2. Inercyjna struna pod działaniem ruchomej stałej siły – transformacja całkowa . . . . .	20
3.3. Bezmasowa struna pod ruchomym obciążeniem inercyjnym . . . . .	21
3.3.1. Przypadek gdy $\alpha \neq 1$ . . . . .	22
3.3.2. Przypadek gdy $\alpha = 1$ . . . . .	24
3.4. Nieciągłość rozwiązania w przypadku struny bezmasowej . . . . .	25
<b>4. Rozwiązania analityczne równania drgań belek</b>	<b>28</b>
4.1. Belka Bernoulliego-Eulera pod ruchomą, stałą siłą . . . . .	28
4.2. Belka Timoshenki pod ruchomą, stałą siłą . . . . .	29
<b>5. Rozwiązania półanalityczne struny</b>	<b>34</b>
5.1. Inercyjna struna pod ruchomym obciążeniem inercyjnym . . . . .	34
5.2. Równanie Lagrange’a 2-go rodzaju w przypadku struny pod jadącą masą	40
5.3. Nieciągłość rozwiązania struny masowej pod obciążeniem inercyjnym .	43
<b>6. Rozwiązania półanalityczne drgań belek</b>	<b>45</b>
6.1. Belka Bernoulliego-Eulera pod działaniem ruchomego obciążenia inercyjnego . . . . .	45
6.2. Belka Timoshenki pod działaniem ruchomej masy . . . . .	49
<b>7. Metoda elementów czasoprzestrzennych (wariant prędkościowy)</b>	<b>54</b>
7.1. Dyskretyzacja struny metodą elementów czasoprzestrzennych . . . . .	55
7.2. Elementy odpowiedzialne za ruchomą masę w przypadku struny . . . . .	57
7.3. Elementy opisujące ruchomą masę w belce Bernoulliego–Eulera . . . . .	60
7.4. O rozwiązaniu belki Timoshenki . . . . .	61
7.5. Przykłady funkcji wirtualnych . . . . .	62

---

<b>8. Przykłady zastosowań</b>	<b>66</b>
8.1. Dynamika toru kolejowego . . . . .	66
8.2. Metody bezsiatkowe (Element Free Galerkin Method) . . . . .	71
<b>9. Wnioski</b>	<b>74</b>
<b>A. Macierze w elemencie belki</b>	<b>77</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>85</b>

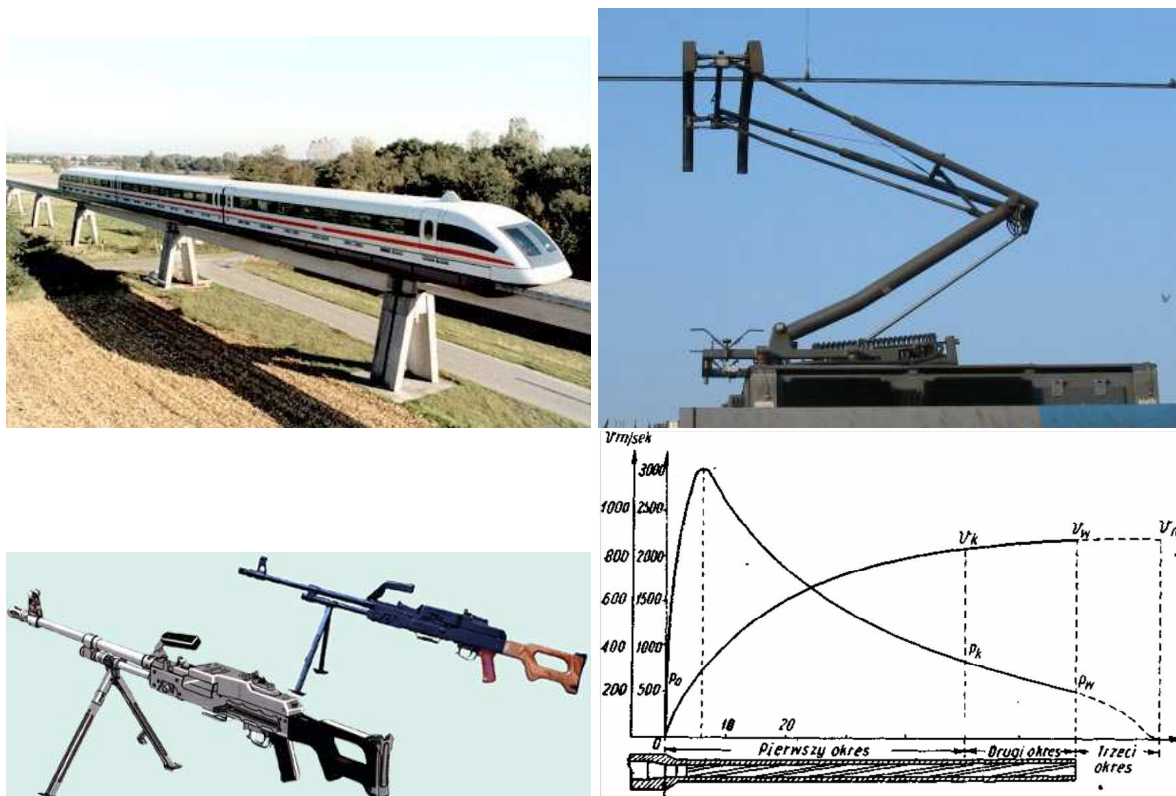
## Wstęp

Ruchome obciążenie poruszające się po swobodnie podpartej belce mostowej należy do jednego z najstarszych problemów dynamiki budowli. Wraz z rozwojem transportu kolejowego i drogowego zaistniała potrzeba bliższego poznania zjawisk towarzyszących poruszającej się sile, zarówno grawitacyjnej jak i bezwładnościowej, będącej efektem ruchomej masy. Siły te, choć o zupełnie innym charakterze, często są ze sobą mylone. W niniejszej pracy zajmujemy się układami jednowymiarowymi o skończonej długości pod działaniem ruchomego, skupionego obciążenia bezwładnościowego. Rozpatrujemy przypadki z wymuszeniem zewnętrznym przy zerowych warunkach początkowych i brzegowych, poddane małym odkształceniom, spełniającym zależność  $(\partial u/\partial x)^2 \ll 1$ . Pomimo szerokiego zainteresowania tym tematem od ponad wieku, nadal wiele spraw pozostaje nierozwiązanych. O ile istnieją pełne, analityczne rozwiązania w szeregach Fouriera, dotyczące ruchomej siły grawitacyjnej poruszające się po strunie, belkach czy płytach, o tyle ruchome obciążenie bezwładnościowe do dnia dzisiejszego nie doczekało się pełnego, analitycznego rozwiązania. Wyjątek stanowi struna bezmasowa, w przypadku której znamy pełne, analityczne rozwiązanie w formie szeregów hipergeometrycznych, a w szczególnym przypadku również pełne, zamknięte rozwiązanie. Powodem matematycznych trudności jest składnik równania ruchu opisujący ruchomą masę.

Ruchome obciążenia mają wiele ważnych, praktycznych zastosowań w zagadnieniach inżynierskich. Wraz z rosnącą prędkością przejazdu masy, rosną także efekty falowe powodujące większe przemieszczenia badanego układu, niejednokrotnie znacznie przekraczające jego ugięcie statyczne. Najwięcej zastosowań znajdziemy w kolejnictwie m.in. oddziaływania kół kolejowych z szyną lub torem, wpływ ruchomego pojazdu na most, współpraca kolejowego odbieraka prądu z siecią trakcyjną, a także w kolei magnetycznej. Ruchome obciążenia mają również szerokie zastosowanie w przemyśle lotniczym oraz samochodowym, a także w robotyce. Ruch pocisku w lufie karabinowej, choć nieco bardziej złożony, także jest problemem ruchomego obciążenia inercyjnego.

Celem pracy jest:

- uporządkowanie istniejących rozwiązań związanych z zagadnieniem ruchomych obciążeń, przede wszystkim tych ściśle analitycznych,
- uzyskanie rozwiązań zamkniętych lub doprowadzenie rozwiązań do jak najprostszej formy, pozwalającej na ich analizę jakościową,



Rysunek 1.1: Przykłady zastosowań ruchomych obciążeń.

- uogólnienie wniosków płynących z badań jakościowych i budowa odpowiednich numerycznych schematów obliczeniowych całkowania równania różniczkowego ruchu; celem końcowym jest odpowiednia modyfikacja macierzy charakterystycznych układu, tak aby wpływ ruchomej masy mógł być uwzględniony przez dodanie do macierzy globalnej macierzy pojedynczego elementu, uwzględniającego przesuwaną się masę.

W literaturze znaleźć można liczne prace dotyczące ruchomych obciążeń. Zdecydowana większość dotyczy obciążeń bezmasowych. Mimo zawartych w tytułach prac informacji o badaniu obciążeń masowych, autorzy poprzestają na zastosowaniu obciążenia siłą bezmasową. W ich rozumieniu obciążenie masowe polega na wywieraniu siły bezmasowej, równej co do wielkości sile grawitacyjnej wywołanej masą. W innej grupie prac porzuca się początkowe rozważania dotyczące masy bezpośrednio położonej na belce lub strunie i wprowadza zastępczy układ w postaci oscylatora. Istnieją też inne techniki obliczeniowe, opisujące zachowanie układu ciągłego w dwóch przedziałach: od początkowej podpory do masy i od masy do końcowej podpory. Uzyskaną parę rozwiązań próbuje się łączyć w punkcie śledzącym masę. W trakcie dyskusji konferencyjnych często przywoływano znaną monografię Fryby i z niedowierzaniem przyjmowano odpowiedź, że ruchoma masa jest tam rozpatrywana jedynie fragmentarycznie i to jedynie w przypadku bezmasowej struny. Do tego pewne zawarte w niej formuły wynikowe są błędne.

Prezentowane w literaturze analityczno-numeryczne rozwiązania zadania ruchomej masy są dość skomplikowane i niosą za sobą sporo uproszczeń mających ostateczny wpływ na otrzymane wyniki. Opracowanie prostego schematu obliczeń, a jednocześnie

możliwie najdokładniejszego rozwiązania problemu ruchomego obciążenia bezwładnościowego posłużyło do weryfikacji istniejących narzędzi numerycznych, opartych na metodzie elementów skończonych oraz zaproponowania własnego podejścia z wykorzystaniem metody elementów czasoprzestrzennych opisanych prędkościami.

W pracy przedstawiono w skrócie znane z literatury rozwiązania analityczne struny, belki Bernoulliego-Eulera oraz belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem grawitacyjnym, a także rozwiązanie analityczne bezmasowej struny pod ruchomą siłą bezwładnościową. W dalszej części pracy przedstawiono własne rozwiązania półanalityczne układów pod ruchomym obciążeniem inercyjnym, w których dokonujemy numerycznego całkowania końcowych formuł z powodu braku możliwości dalszego, analitycznego kontynuowania obliczeń. W przypadku struny i belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem bezwładnościowym wykryto nieciągłość trajektorii poruszającej się masy przy końcowej podporze. Uzyskano matematyczny dowód nieciągłości ruchu punktu materialnego w przypadku struny bezmasowej, ponieważ tylko to zadanie ma pełne rozwiązanie analityczne. Nieciągłość w strunie i belce Timoshenki z własną bezwładnością, ze względu na brak pełnego rozwiązania analitycznego została tylko przedstawiona i wykazana bez dowodu.

Inne uproszczenia przyjmowane w literaturze omówiono szerzej w rozprawie. Trzeba przyznać, że w większości przypadków prezentowane w literaturze rozwiązania są wystarczające w praktycznych zastosowaniach. Niestety, do realizacji postawionego w pracy celu uporządkowania rozwiązań (a w efekcie usunięcia istniejących w nich błędów i zaproponowania poprawnego), należało unikać jakichkolwiek uproszczeń i układów zastępczych. Ograniczono się jedynie do komentarza wykazując, że dodanie do zadania punktowych podpór sprężystych lub rozłożonego w sposób ciągły podłoża sprężystego typu Winklera nie przedstawia żadnych trudności matematycznych, ale też nie wnosi istotnych aspektów poznawczych.

**W pracy zaproponowano oryginalne rozwiązanie bezpośrednio równania różniczkowego, oparte, w przypadku różnych zadań, na transformacji Fouriera oraz Laplaca-Carsona. Niezależnie rozwiązano identyczny problem wychodząc z równania Lagrange'a. Uzyskano identyczny wynik matematyczny. Wynik matematyczny pozwolił wykazać nieznaną dotąd własność rozwiązania przedmiotowego zadania w postaci nieciągłości trajektorii masy. Jest to wprawdzie efekt poznawczy o mniejszym praktycznym znaczeniu, gdyż porównanie do rzeczywistych zadań wymaga uwzględnienia również innych czynników, jak np. nieliniowości, łagodzących nieciągłości, lecz mimo to jest obserwowany w konstrukcjach mostowych i odbierakach prądu w kolejnictwie.**

**Otrzymane wyniki ukazały poważne błędy w dotąd stosowanych podejściach w zastosowaniach numerycznych, dyskretnych, np. metodzie elementów skończonych, szczególnie w przypadku struny. Poprawnie działających algorytmów dotyczących ruchomej masy było dotąd brak. W przypadku drgań belek obciążonych inercyjnie stosowanie niepoprawnych formuł nie jest łatwe do wychwycenia. Autorzy wielu prac zamieszczają niepoprawne wyniki, porównując własne uproszczone lub niepoprawne rozwiązania z innymi, również obciążonymi wadami. Z uwagi na paraboliczne efekty w belkach czynione błędy są rozmywane na wynikowych wykresach.**

**Zaproponowano własne podejście numeryczne, stosując do dyskretyzacji różniczkowego równania ruchu metodę czasoprzestrzennych elementów**

skończonych. Ostatecznie, przedstawioną metodę zastosowano w konkretnych problemach inżynierskich. Wszystkie prezentowane w pracy układy mają skończoną długość, w których, w odróżnieniu do obiektów nieskończonych, występuje wiele ciekawych zjawisk związanych z odbiciami fal mechanicznych od podpór oraz ruchomego obciążenia, mających wpływ na ostateczny charakter rozwiązania.

Obciążenie skupione w postaci siły bezmasowej lub skupionej masy najlepiej przedstawić za pomocą delty Diraca. Odpowiada ona za położenie ruchomego obciążenia na strunie, belce lub płycie. W przytłaczającej większości prac dotyczących tej grupy zagadnień tak to jest czynione. W przypadku siły grawitacyjnej rozwiązanie zadań jest proste, gdyż odpowiedni człon, odpowiedzialny za ruchomą siłę jest iloczynem wartości stałej i delty Diraca. W innych przypadkach mamy do czynienia z iloczynem pewnej funkcji i delty Diraca. To powoduje znaczne komplikacje obliczeniowe. Dystrybucji nie można na ogół mnożyć przez siebie tak jak funkcje. Nieokreślony jest np. iloczyn  $\delta(x-a)\delta(x-b)$ . Można jednakże mnożyć każdą dystrybucję przez funkcję klasy  $C^\infty$ . Próbuje się zastępować iloczyny dystrybucji splotem. Działanie takiej dystrybucji określa się tak, jakby działanie dystrybucyjne było całkowaniem. W niniejszej pracy wydaje się to być mniej przydatne, gdyż wymaga to znajomości równania w postaci całkowej.

Iloczyn dwóch funkcji nieciągłych, czyli dystrybucji jedynie wtedy jest określony (możliwy), gdy każda z funkcji opisana jest względem innej zmiennej niezależnej [59, 69, 81]. W prezentowanym w pracy przypadku ruchomej masy tak właśnie jest. Delta Diraca jest funkcją zmiennej przestrzennej  $x$ , natomiast przyspieszenie ruchomego punktu materialnego jest tylko i wyłącznie funkcją czasu  $t$ .

W rozdziale 2 pracy przedstawiono jeden ze sposobów wyprowadzania różniczkowego równania ruchu na podstawie równowagi sił i momentów w infinitezymalnym wycinku układu z ruchomym obciążeniem. Rozwiązania analityczne zostały przedstawione w przypadku struny w rozdziale 3 oraz w przypadku belek Bernoulliego-Eulera i Timoshenki w rozdziale 4. Dodatkowo w rozdziale 3 przedstawiono dotąd nie publikowany matematyczny dowód istnienia nieciągłości trajektorii ruchomego obciążenia bezwładnościowego poruszającego się po bezmasowej strunie.

Nowe, dotąd nie znane półanalityczne rozwiązania autora, dotyczące obciążenia inercyjnego poruszającego się po strunie mającej własną bezwładność zostało przedstawione w rozdziale 5. To samo nowe półanalityczne podejście zastosowano do belek w rozdziale 6. Zarówno w strunie opisanej w rozdziale 5 oraz w belce Timoshenki z rozdziału 6 zaobserwowano dotąd nieznaną efekt nieciągłości trajektorii ruchomej masy. W rozdziale 7 opisano sformułowanie prędkościowe metody czasoprzestrzennych elementów skończonych oraz przedstawiono nowe, dotąd nie publikowane sformułowania, odpowiedzialne za modelowanie ruchomej masy w przypadku struny oraz belek. Przykłady zastosowań przedstawiono w rozdziale 8, natomiast w rozdziale 9 zamieszczono wnioski płynące z przeprowadzonych rozważań.

Pomimo że liczba liczących się publikacji dotyczących ruchomych obciążeń dawno przekroczyła tysiąc pozycji, ograniczymy się w tym przeglądzie literaturowym do szczegółowego przedstawienia głównie prac przełomowych i nowatorskich, odnoszących się bezpośrednio do przedstawionych w pracy zagadnień.

Pierwszym, historycznym podejściem do problemu ruchomego obciążenia jest tzw. zagadnienie Willisa [77]–Stokesa [70]. Rozpatrzono w nim belkę Bernoulliego–Eulera statycznie obciążoną stałą siłą grawitacyjną. Następnie w otrzymanym rozwiązaniu zastąpiono stałą siłę obciążeniem masowym mającym swoją bezwładność. Istnieje czysto matematyczne uzasadnienie takiego postępowania, polegające na wykorzystaniu dystrybucyjnej metody rozwiązywania równań różniczkowych. Podejście zaproponowane przez Willisa nie jest jednak pozbawione wad. Stosuje on bowiem przyspieszenie poprzeczne ruchomej masy nie uwzględniające składowych ruchu wzdłuż belki. Pomimo tego, przy małych prędkościach przejazdu masy błąd wynikający z brakujących członów jest niewielki.

W roku 1861 Renaudot [63] przedstawił prawidłową postać przyspieszenia ruchomej masy, będącej z matematycznego punktu widzenia pochodną złożoną, podając przy tym jej geometryczną interpretację. Przyspieszenie ruchomej masy składa się z przyspieszenia poprzecznego, ale także z przyspieszenia Coriolisa oraz odśrodkowego, odpowiedzialnych za ruch wzdłużny.

W przypadku obciążenia grawitacyjnego znane są pełne rozwiązania analityczne. Metoda zaproponowana przez Kriłowa [38], polegająca na rozdzieleniu zmiennych, stała się klasycznym sposobem rozwiązywania zadań problemu ruchomej, stałej siły. Lowan [54] przedstawił rozwiązanie przy pomocy funkcji Greena. Powstało także wiele prac z ruchomym wymuszeniem harmonicznym przedstawionym m.in. w [9] i [75].

Pierwsza próba podejścia do zagadnienia ruchomej masy została podjęta przez Sallera [65]. Udowodnił on, pomimo daleko idących uproszczeń znaczny wpływ ruchomej masy na dynamikę belki. Jednak prace przełomowe Inglisa [28] i Schallenkampa [66] przypadają na lata trzydzieste dwudziestego wieku. Inglis do opisu ruchomej masy zastosował przedstawiony wcześniej wzór Renaudota. Poszukiwane przemieszczenia przedstawił za pomocą szeregu trygonometrycznego, przyjmując jednak uproszczenie polegające na ograniczeniu rozwiązania tylko do pierwszego jego wyrazu. Otrzymane równanie różniczkowe zwyczajne jest równaniem o zmiennych współczynnikach. Inglis poszukuje rozwiązania tego równania w postaci nieskończonego szeregu o niewiadomych, stałych współczynnikach. Aby je rozwiązać musi ograniczyć się do skończonej liczby wyrazów. Ostatecznie poprzestaje na 22.

Rozwiązanie zaproponowane przez Inglisa jest rozwiązaniem przybliżonym. W zastosowaniach inżynierskich w niektórych przypadkach jeden wyraz szeregu może być wystarczający. Z kolei aby zaobserwować zjawiska falowe w badanych układach, potrzebujemy wyrazów znacznie więcej. Jest to szczególnie ważne, kiedy zajmujemy się zagadnieniem ruchomej masy. Zostanie to dowiedzione w dalszej części pracy.

Drugą ważną pozycją dotyczącą zagadnień ruchomej siły bezwładnościowej jest praca Schallenkampa. Zaproponował on inny sposób rozwiązania problemu ruchomej masy, zajmując się tylko jej trajektorią. Zastosował metodę rozdzielania zmiennych, rozwijając szukaną funkcję przemieszczeń w sinusowy szereg Fouriera. Dzięki temu, na podstawie własności funkcji sinus, w bezpośredni sposób realizowane są założone warunki brzegowe. Równanie różniczkowe zwyczajne opisujące ruchomą masę zostało przedstawione za pomocą współrzędnych uogólnionych, zgodnie z równaniem Lagrange’a drugiego rodzaju. Stanowiąca główny problem uogólniona siła, została wyznaczona na podstawie zasady pracy wirtualnej. Rozwiązanie Schallenkampa jest dość złożone i wolno zbieżne, ponieważ ostateczne ugięcia belki przedstawione są za pomocą potrójnego, nieskończonego szeregu.



Istnieje tylko jedno pełne rozwiązanie analityczne obciążenia inercyjnego. W roku 1964 Smith [68] przedstawił rozwiązanie bezmasowej struny z wykorzystaniem szeregów hipergeometrycznych. Częstkowe równanie różniczkowe ruchu przekształcono wykorzystując metodę dystrybucyjną w równanie hipergeometryczne, będące równaniem różniczkowym zwyczajnym o zmiennych współczynnikach. Ma ono pełne rozwiązanie analityczne w formie nieskończonych szeregów. Fryba [23] zastosował to samo podejście do zagadnienia i znalazł szczególny jego przypadek, który ma pełne, zamknięte rozwiązanie analityczne. Prace Inglisa i Schallenkampa były podstawą do analiz problemu ruchomej masy przez wielu badaczy, głównie z ZSRR, m.in. [10, 11, 58] i wielu innych. W literaturze istnieje wiele historycznych prac przeglądowych, głównie rosyjskich, dotyczących ruchomych obciążeń np. [14, 29, 61].

Od dłuższego czasu ciężar prac przesunął się w kierunku rozwiązań półanalitycznych, dotyczących wpływu ruchomej masy na drgania konstrukcji. Jedną z najciekawszych prac tego typu jest pozycja [76], w której rozpatrzono swobodnie podpartą belkę Bernoulego–Eulera. Równanie ruchu zapisane zostało w formie całkowitej z zastosowaniem funkcji Greena. Aby rozwiązać to równanie wykorzystano podwójny schemat numeryczny: metodę różnic skończonych wstecz w czasie oraz numeryczne całkowanie w kwadraturach metodą Gaussa względem parametru przestrzeni. Rozwiązanie dotyczy tylko punktu pod ruchomym obciążeniem. Metoda może być stosowana w pełnym zakresie prędkości przejazdu masy. Jediną wadą jest dość złożony podwójny schemat numeryczny, w wyniku czego otrzymanie dokładnego wyniku wymaga bardzo dużego nakładu obliczeniowego. Inne podejścia analityczno–numeryczne zostały przedstawione w pracach [21, 27, 30, 37, 53, 55, 56, 57, 64, 82].

Doskonałą i ważną monografię dotyczącą ruchomych obciążeń masowych poruszających się po belkach napisał Szcześniak [72]. Znajdziemy w niej opis setek prac dotyczących problemu ruchomych obciążeń poruszających się. Jeszcze trzeba by dodać odnośniki literaturowe po belkach. Autor przedstawia krytyczną ocenę istniejących rozwiązań, po czym prezentuje własne. Z tą i innymi pracami tego autora [71, 73, 74] winien zapoznać się każdy badacz tej grupy zagadnień. Ważne prace przedstawili też inni polscy badacze: Kączkowski [39, 40], Langer [48, 49, 51, 52], Kłasztorny [34, 35] i Śniady [83, 84]. Prace te dotyczą zarówno obciążeń stałych, grawitacyjnych jak i obciążeń bezwładnościowych.

Ograniczamy naszą część analizy literatury do nielicznych wybranych pozycji. Jest wiele innych cennych prac, które są powszechnie znane, a z powodu szczupłości miejsca w tej części, nie zostały zacytowane.

Pierwsze próby czasoprzestrzennego modelowania zadań fizycznych były opublikowane w 1964 przez Gurtina [24, 25] i Herrere [26]. Zdefiniowanie minimalizowanego funkcjonału, wynikającego z teorii splotów, umożliwiło wyprowadzenie zależności pomiędzy zmienną czasową a zmiennymi przestrzennymi w obszarach czasoprzestrzennych. Obszary te można interpretować jako czasoprzestrzenne elementy skończone. Później, w 1969 roku Oden [60] zaproponował uogólnienie metody elementów skończonych. Fried [22], Argyris, Scharpf i Chan [1, 2, 3] zaczęli jednakowo traktować zmienne przestrzenne i zmienną czasową przy formułowaniu problemów.

Niezależnie od tego kierunku prac pojawiły się opracowania Kączkowskiego [41, 42, 43], w których wprowadzono po raz pierwszy do mechaniki konstrukcji interpretację fizyczną pewnych wielkości dotychczas określanych w przestrzeni fizycznej. Rozpatry-

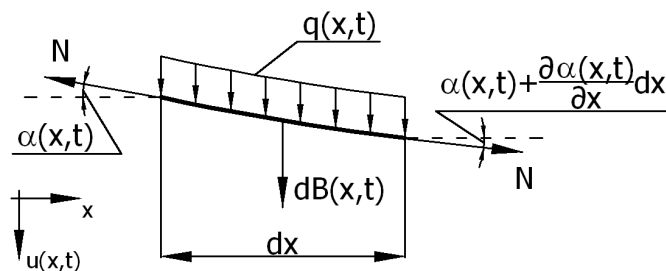
wano proste przypadki drgań osiowych pręta i struny. Kolejne poruszane zagadnienia to drgania poprzeczne belki [47], sposób rozwiązywania sformułowanych w czasoprzestrzeni zadań dynamicznych [78], przyspieszenie procesu symulacji czasowej zadań liniowych poprzez algebraiczną eliminację  $2^n$  warstw czasowych [31], próba syntezy sformułowania czasoprzestrzennego zadań [46] oraz oszacowania stabilności [5, 12, 13, 50, 62]. Znaczącym wkładem było wskazanie możliwości budowania bezwarunkowo stabilnych rozwiązań dzięki modyfikacji wirtualnej funkcji kształtu [32, 33].

Grupę prac przeglądowych na temat metody elementów czasoprzestrzennych stanowią pozycje [4, 6, 44, 80], a także część wprowadzająca do monografii [79]. Opis metody zawarto też w pracach [36, 45].

## Równania ruchu

Rozdział ten ma za zadanie przedstawienie jednego ze sposobów wyprowadzania różniczkowego równania ruchu struny i belek, polegającego na równowadze sił i momentów w infitezymalnym odcinku badanego układu. Głównym jednak powodem jest przedstawienie sposobu modelowania ruchomego obciążenia za pomocy delty Diraca.

### 2.1. Równanie ruchu struny pod ruchomym obciążeniem



Rysunek 2.1: Wycinek struny.

Na rys. 2.1 przedstawiono nieskończenie mały odcinek struny  $dx$ , odkształconej o pewien nieznaną kąt  $\alpha(x, t)$  w wyniku działania ciągłego, zewnętrznego obciążenia  $q(x, t)$ . Na podstawie równowagi sił względem osi pionowej  $u(x, t)$  otrzymujemy następujące równanie

$$q(x, t)dx + dB(x, t) + N \sin \left[ \alpha(x, t) + \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} dx \right] - N \sin [\alpha(x, t)] = 0, \quad (2.1)$$

gdzie  $N$  jest siłą naciągu struny. Siłę bezwładności działającą na rozpatrywany odcinek struny zapisujemy wzorem

$$dB(x, t) = -\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx. \quad (2.2)$$

Przy małych przemieszczeniach spełnione są następujące założenia

$$\sin[\alpha(x, t)] \approx \alpha(x, t) \quad \tan[\alpha(x, t)] \approx \alpha(x, t) . \quad (2.3)$$

Przedstawione założenia często przedstawiane są jako warunek małych odkształceń  $(\partial u / \partial x)^2 \ll 1$ . Ponieważ

$$\frac{du}{dx} = \tan[\alpha(x, t)] , \quad (2.4)$$

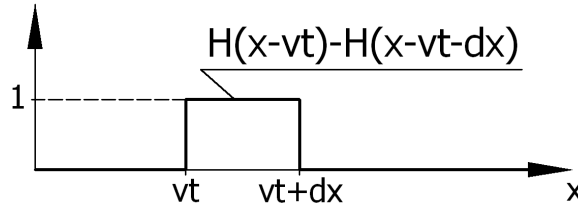
to na podstawie (2.3) powyższe równanie możemy zapisać w następującej formie

$$\alpha(x, t) \approx \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} . \quad (2.5)$$

Zatem równanie równowagi sił (2.1) przyjmuje zmienioną postać zapisu – tylko i wyłącznie za pomocą przemieszczeń

$$q(x, t)dx + dB(x, t) + N \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx - N \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 . \quad (2.6)$$

Ruchome obciążenie działające na odcinku  $dx$  możemy przedstawić zgodnie z rys. 2.2 za pomocą różnicy funkcji Heaviside'a. Na tej podstawie otrzymujemy zależność opisującą zewnętrzne obciążenie  $q(x, t)$  działające na odcinku  $dx$ :



**Rysunek 2.2:** Różnica funkcji Heaviside'a.

$$q(x, t)dx = [H(x - vt) - H(x - vt - dx)] \left[ P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right] . \quad (2.7)$$

Uwzględnia ona zarówno ruchomą, stałą siłę grawitacyjną jak i wpływ obciążenia bezwładnościowego. Warto zauważyć, że przyspieszenie ruchomej masy uwzględnione zostało w ruchomym punkcie  $vt$ , w odróżnieniu od bezwładności samej struny (2.2). Zgodnie z (2.7) i (2.2), równanie (2.6) w wyniku obustronnego dzielenia przez  $dx$  przyjmuje następującą postać:

$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{H(x - vt) - H(x - vt - dx)}{dx} \left[ P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right] . \quad (2.8)$$

Ponieważ rozpatrujemy nieskończenie mały odcinek struny ( $dx \rightarrow 0$ ) poniższą granicę możemy przedstawić za pomocą delty Diraca

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{H(x - vt) - H(x - vt - dx)}{dx} = \delta(x - vt) . \quad (2.9)$$

Ostatecznie równanie (2.8) opisujące ruch struny pod ruchomym obciążeniem możemy zapisać następująco:

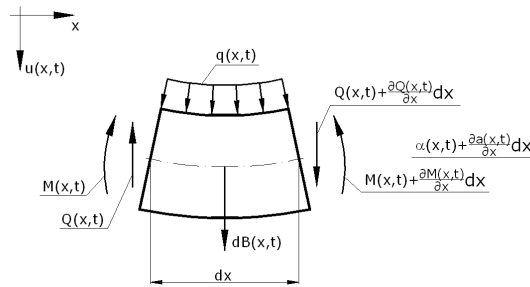
$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt) \left[ P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right]. \quad (2.10)$$

Przyspieszenie ruchomej masy, znane w literaturze pod nazwą wzoru Renaudota, zawiera pełen opis zjawisk towarzyszących poruszającemu się skupionemu obciążeniu bezwładnościowemu. Przy  $v = \text{const}$  otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=vt} + 2v \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=vt} + v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=vt}. \quad (2.11)$$

## 2.2. Równanie belki Bernoulliego-Eulera pod ruchomym obciążeniem

Pomimo że różniczkowe równanie ruchu belki Bernoulliego-Eulera nie jest równaniem falowym, to dzięki swej matematycznej budowie oraz prostej technicznej interpretacji stanowi zdecydowanie największą grupę prac opisujących ruchome obciążenia. Na pod-



Rysunek 2.3: Wycinek belki Bernoulliego-Eulera.

stawie kursu wytrzymałości materiałów, przy małych wychyleniach oraz zachowując konwencję znaków otrzymujemy

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.12)$$

Zgodnie z rys. 2.3 równowaga momentów względem środka elementu  $dx$  wynosi

$$M(x, t) - M(x, t) - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx + Q(x, t) \frac{dx}{2} + Q(x, t) \frac{dx}{2} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \frac{dx^2}{2} = 0. \quad (2.13)$$

Po uporządkowaniu równania (2.12) oraz pominięciu małych wyższego rzędu  $dx^2$  otrzymujemy ogólnie znany wzór określający siłę ścinającą

$$Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right]. \quad (2.14)$$

Na podstawie równowagi sił względem osi pionowej  $u(x, t)$  (Rys. 2.3) otrzymujemy

$$dB(x, t) + Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx - Q(x, t) + q(x, t) dx = 0 . \quad (2.15)$$

Zgodnie z (2.2) i (2.14) równanie (2.15) przyjmuje postać

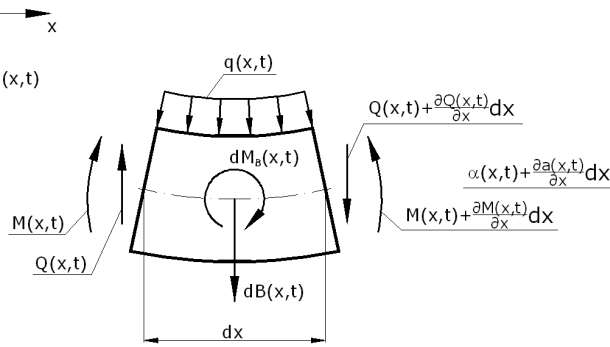
$$-\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] dx + q(x, t) dx = 0 . \quad (2.16)$$

Ruchome obciążenie działające na odcinku  $dx$ , podobnie jak w przypadku struny, modelujemy za pomocą delty Diraca. Ostatecznie równanie ruchu belki Bernoulliego–Eulera pod ruchomym obciążeniem zapisujemy w następujący sposób

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt) \left[ P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right] . \quad (2.17)$$

### 2.3. Równanie belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem

W przypadku belki Timoshenki kąt opisujący deformację układu nie odpowiada jedynie kątowi przy czystym zginaniu  $\psi(x, t)$ , jak w przypadku belki Bernoulliego–Eulera. Wraz



Rysunek 2.4: Wycinek belki Timoshenki.

z kątem  $\psi(x, t)$  bierzemy pod uwagę również wpływ odkształcenia postaciowego

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \psi(x, t) + \gamma(x, t) . \quad (2.18)$$

Kąt odkształcenia postaciowego pod działaniem siły ścinającej  $Q(x, t)$  zapisujemy następująco

$$\gamma(x, t) = k \frac{Q(x, t)}{GA} , \quad (2.19)$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem kształtu przekroju poprzecznego  $A$ , a  $G$  modułem odkształcenia postaciowego, zwanym modułem Kirchhoffa. Badany układ uwzględnia również przyrost momentu bezwładności infinitezimalnego odcinka belki, który zgodnie z konwencją znaków przyjmuje następującą postać

$$dM_B = -\rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} dx . \quad (2.20)$$

Na podstawie warunku równowagi momentów względem środka elementu  $dx$  (Rys. 2.3) otrzymujemy

$$M(x, t) - M(x, t) - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx + Q(x, t) \frac{dx}{2} + Q(x, t) \frac{dx}{2} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \frac{dx^2}{2} + dM_B = 0. \quad (2.21)$$

Podstawiając (2.20) do (2.21) oraz pomijając małe wyższego rzędu  $dx^2$ , siłę ścinającą możemy zapisać w następującej formie

$$Q(x, t) = \rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}. \quad (2.22)$$

W prosty sposób możemy zaobserwować różnicę między podejściem technicznym belki (2.14), a falowym opisem ruchu. Różniczkując moment gnący (2.12) względem  $x$  i podstawiając do (2.22) otrzymujemy

$$Q(x, t) = \rho I \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.23)$$

Zgodnie z (2.18) i (2.19) równanie (2.23) przyjmuje następującą postać

$$Q(x, t) = \rho I \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x \partial t^2} - \frac{\rho I k}{GA} \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \frac{EI k}{GA} \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.24)$$

Brakującą, dodatkową zależność znajdziemy, podobnie jak w przypadku belki Bernoulliego–Eulera, na podstawie równania równowagi sił (2.15) względem pionowej osi prostopadłej do osi  $Ox$ . Po uporządkowaniu oraz zgodnie ze wzorem opisującym siłę bezwładności działającą na odcinku  $dx$  (2.2) otrzymujemy

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - q(x, t). \quad (2.25)$$

Po uprzednich przekształceniach równań (2.24) i (2.25) ostatecznie otrzymujemy cząstkowe, różniczkowe równanie ruchu belki Timoshenki

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho^2 k \frac{I}{G} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \\ = q(x, t) - k \frac{EI}{GA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + \rho k \frac{I}{GA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

gdzie ruchome obciążenie działające na układ zapisujemy następująco:

$$q(x, t) = \delta(x - vt) \left[ P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right]. \quad (2.27)$$

Podobnie jak w przypadku struny, belka Timoshenki jest równaniem falowym, gdzie prędkość fali giętej  $c_1$  oraz prędkość fali ścinania  $c_2$  dane są wzorami

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{k\rho}}. \quad (2.28)$$

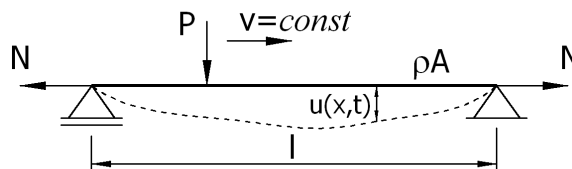
## Rozwiązania analityczne równania struny

Wszystkie przedstawione w rozdziale rozwiązania dotyczące ruchomej siły grawitacyjnej opierają się na znanym rozwinięciu w nieskończony szereg trygonometryczny. Pozwala on rozdzielić zmienne, a dzięki temu zredukować cząstkowe równanie różniczkowe ruchu do równania różniczkowego zwyczajnego. Przedstawiono zarówno rozwiązanie klasyczne jak i wykorzystujące transformacje całkowe.

W dalszej części rozdziału przedstawione zostanie w skrócie jedyne, pełne rozwiązanie analityczne dotyczące bezmasowej struny poddanej ruchomemu obciążeniu bezwładnościowemu. Na koniec przedstawiony zostanie matematyczny dowód istnienia nieciągłości trajektorii ruchomej masy na podstawie wcześniej uzyskanych rozwiązań dotyczących bezmasowej struny [18, 19].

Otrzymane rozwiązania zostaną po każdej części zobrazowane graficznie. W celu łatwego porównania wyników w przykładach przyjęto jednakowe dane: skupioną siłę  $P = -1$ , poruszającą się masę  $m = 1$ , siłę napięcia struny  $N = 1$ , gęstość masy  $\rho = 1$ , pole przekroju poprzecznego  $A = 1$  oraz długość  $l = 1$ . Wyniki dotyczyć będą różnych prędkości przejazdu obciążenia  $v$ .

### 3.1. Inercyjna struna pod działaniem ruchomej stałej siły – rozwiązanie klasyczne



Rysunek 3.1: Stała ruchoma siła  $P$ .

Stała siła  $P$ , poruszająca się ze stałą prędkością  $v$  (Rys. 3.1) przedstawiona jest za pomocą delty Diraca (2.9). Równanie ruchu zgodnie z przedstawionym wyprowadze-



niem w rozdziale 2, bez uwzględnienia bezwładności ruchomego obciążenia ma następującą postać

$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P, \quad (3.1)$$

gdzie  $N$  jest siłą naciągu, a  $\rho A$  liniową gęstością struny. Przyjmujemy następujące warunki brzegowe

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (3.2)$$

oraz warunki początkowe

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.3)$$

Aby rozdzielić zmienne, rozwijamy poszukiwane przemieszczenia w nieskończony szereg

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)T(t). \quad (3.4)$$

To samo podejście stosujemy do sił zewnętrznych

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)Q(t). \quad (3.5)$$

Stosując podstawienie

$$\frac{\rho A}{N} = \frac{1}{c^2} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{N}{\rho A}} \quad (3.6)$$

otrzymujemy równanie ruchu struny

$$-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt) \frac{P}{N}, \quad (3.7)$$

gdzie  $c$  jest prędkością rozprzestrzeniania się fali mechanicznej w strunie. Na podstawie szeregów (3.4), (3.5) równanie (3.7) przyjmuje postać

$$\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} X(x)\ddot{T}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} X''(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X(x)Q(t). \quad (3.8)$$

Przyjmujemy funkcję  $X(x)$

$$X(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.9)$$

realizującą założone warunki brzegowe (3.2). Na tej podstawie otrzymujemy drugą pochodną po  $x$

$$X''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.10)$$

Porównując (3.9) i (3.10) znamy zależność pomiędzy  $X(x)$  i  $X''(x)$

$$X''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{l^2} X(x). \quad (3.11)$$

Wykorzystując zależność (3.11) możemy równanie (3.8) zapisać w następujący sposób

$$\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}(t)X(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} X(x) - \sum_{n=1}^{\infty} Q(t)X(x) = 0. \quad (3.12)$$

Ostatecznie równanie (3.12) przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{c^2} \ddot{T}(t) + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} T(t) - Q(t) \right] X(x) = 0 . \quad (3.13)$$

Ponieważ założona funkcja  $X(x)$  w przedziale  $(0, l)$  nie przyjmuje wartości zerowych, dlatego też zawartość nawiasu kwadratowego, aby była spełniona równość z powyższego wzoru, musi równać się zero. A zatem

$$\frac{1}{c^2} \ddot{T}(t) + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} T(t) - Q(t) = 0 . \quad (3.14)$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne, niejednorodne

$$\ddot{T}(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} T(t) = c^2 Q(t) . \quad (3.15)$$

Będącą niejednorodnością funkcję  $Q(t)$  wyznaczamy na podstawie równania (3.5), mnożąc je przez funkcję  $X(x)$  i całkując w przedziale  $< 0; l >$

$$Q(t) = \frac{\int_0^l q(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx} . \quad (3.16)$$

Zgodnie z równaniem (3.7), w którym prawa strona jest funkcją  $q(x, t)$  otrzymujemy

$$\int_0^l q(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{P}{N} \int_0^l \delta(x - vt) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{P}{N} \sin \frac{n\pi vt}{l} , \quad (3.17)$$

oraz

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l . \quad (3.18)$$

Na podstawie (3.17) i (3.18) funkcja  $Q(t)$  przyjmuje następującą postać

$$Q(t) = \frac{2P}{Nl} \sin \frac{n\pi vt}{l} . \quad (3.19)$$

Ostatecznie równanie (3.15) zapisujemy następująco

$$\ddot{T}(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} T(t) = \frac{2P}{Nl} c^2 \sin \frac{n\pi vt}{l} . \quad (3.20)$$

Powyższe równanie różniczkowe rozwiązujemy klasyczną metodą, czyli dwuetapowo. Szukane rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego i szczególnego

$$T(t) = T_o(t) + T_s(t) . \quad (3.21)$$

Rozwiązania ogólnego szukamy z części jednorodnej równania (3.20)

$$\ddot{T}(t) + \frac{n^2 \pi^2 c^2}{l^2} T(t) = 0 , \quad (3.22)$$

którego rozwiązanie przedstawiono poniżej

$$T_o(t) = C_1 \cos \frac{n\pi ct}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi ct}{l} . \quad (3.23)$$

### 3.1.1. Przypadek $v \neq c$

Rozwiązania szczególnego szukamy metodą przewidywań.

$$T_s(t) = A \sin \frac{n\pi vt}{l} + B \cos \frac{n\pi vt}{l}, \quad (3.24)$$

gdzie

$$A = \frac{2Pl}{N} \frac{c^2}{n^2\pi^2(c^2 - v^2)}, \quad B = 0. \quad (3.25)$$

Po zastosowaniu stałych  $A$  i  $B$  rozwiązanie szczególne przyjmuje postać

$$T_s(t) = \frac{2Pl}{N} \frac{c^2}{n^2\pi^2(c^2 - v^2)} \sin \frac{n\pi vt}{l}. \quad (3.26)$$

Ostatecznie rozwiązaniem równania (3.20) jest następująca funkcja

$$T(t) = C_1 \cos \frac{n\pi ct}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi ct}{l} + \frac{2Pl}{N} \frac{c^2}{n^2\pi^2(c^2 - v^2)} \sin \frac{n\pi vt}{l}. \quad (3.27)$$

Zgodnie z założonymi warunkami początkowymi (3.3) oraz rozwinięciem w szereg (3.4) możemy zapisać

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} T(0)X(x) = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}(0)X(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(0) = 0 \\ \dot{T}(0) = 0 \end{cases}. \quad (3.28)$$

Na podstawie powyższych założeń obliczamy stałe  $C_1$  i  $C_2$  w równaniu (3.27)

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{2Pl}{N} \frac{cv}{n^2\pi^2(c^2 - v^2)}. \quad (3.29)$$

Po ich uwzględnieniu, otrzymujemy pełne rozwiązanie równania (3.20)

$$T(t) = \frac{2Pl}{N} \frac{c}{n^2\pi^2(c^2 - v^2)} \left( c \sin \frac{n\pi vt}{l} - v \sin \frac{n\pi ct}{l} \right). \quad (3.30)$$

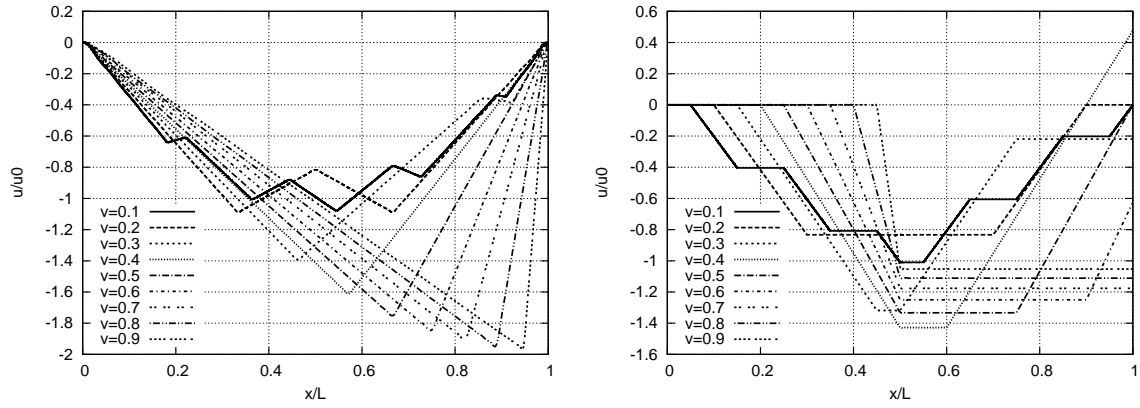
Ostateczne rozwiązanie równania (3.1) uwzględniając (3.4), (3.9) i (3.30) uzyskuje postać

$$u(x, t) = \frac{2Pl}{N} \frac{c}{\pi^2(c^2 - v^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( c \sin \frac{n\pi vt}{l} - v \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.31)$$

Przedstawione wyniki doskonale obrazują wpływ bezwładności struny na jej ostateczne rozwiązanie. Łatwo możemy zaobserwować odbicia fali mechanicznej od ruchomego obciążenia oraz obu podpór.

### 3.1.2. Przypadek $v = c$

Ponieważ dla prędkości ruchu siły grawitacyjnej  $v$  równej prędkości fali w strunie  $c$  rozwiązanie szczególne z poprzedniego przypadku (3.24) pokrywało by się z rozwiązaniem



**Rysunek 3.2:** Ruchoma siła grawitacyjna: trajektoria ruchomej siły (rysunek lewy) i środek struny (rysunek prawy).

ogólnym. Musimy poddać je modyfikacji, zgodnie z zasadami rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych niejednorodnych

$$T_s(t) = At \sin \frac{n\pi ct}{l} + Bt \cos \frac{n\pi ct}{l}, \quad (3.32)$$

gdzie

$$A = 0, \quad B = -\frac{Pc}{Nn\pi}. \quad (3.33)$$

Po zastosowaniu stałych  $A$  i  $B$  rozwiązanie szczególne przyjmuje postać

$$T_s(t) = -\frac{Pct}{Nn\pi} \cos \frac{n\pi ct}{l}. \quad (3.34)$$

Ostatecznie rozwiązaniem równania (3.20) dla  $v = c$  jest następująca funkcja

$$T(t) = C_1 \cos \frac{n\pi ct}{l} + C_2 \sin \frac{n\pi ct}{l} - \frac{Pct}{Nn\pi} \cos \frac{n\pi ct}{l}. \quad (3.35)$$

Na podstawie założonych warunków początkowych (3.28) obliczamy stałe  $C_1$  i  $C_2$

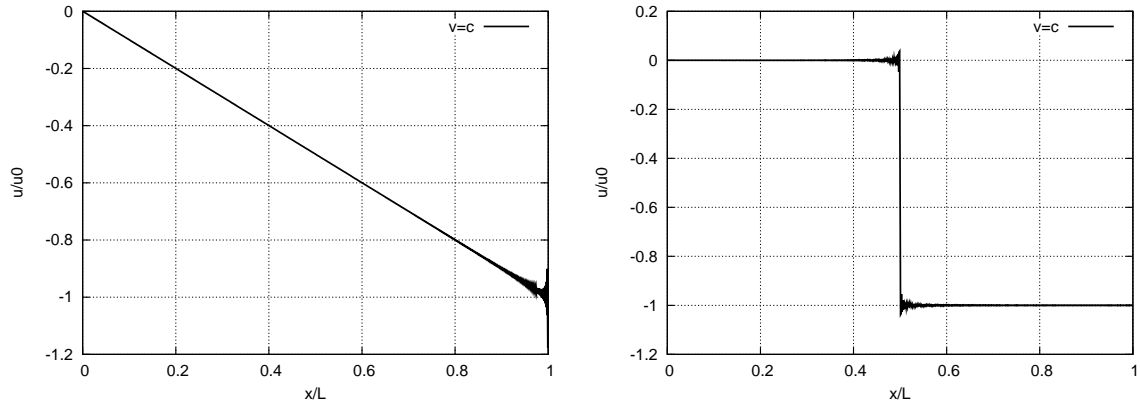
$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{Pl}{Nn^2\pi^2}. \quad (3.36)$$

Po uwzględnieniu stałych, otrzymujemy

$$T(t) = \frac{P}{Nn\pi} \left( \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi ct}{l} - ct \cos \frac{n\pi ct}{l} \right). \quad (3.37)$$

Ostatecznie, zgodnie z (3.4) i (3.9) otrzymujemy przemieszczenia struny pod ruchomym obciążeniem grawitacyjnym, poruszającym się ze stałą prędkością równą prędkości fali  $c = \sqrt{N/\rho A}$

$$u(x, t) = \frac{P}{N\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi ct}{l} - ct \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.38)$$



**Rysunek 3.3:** Ruchoma siła grawitacyjna (prędkość przejazdu równa prędkości fali): trajektoria ruchomej siły (rysunek lewy) i środek struny (rysunek prawy).

## 3.2. Inercyjna struna pod działaniem ruchomej stałej siły – transformacja całkowa

Prezentowana metoda jest metodą szybszą i bardziej elegancką. Równanie ruchu, podobnie jak równanie (3.1) ma następującą postać

$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt) P. \quad (3.39)$$

Przyjmujemy te same założenia co w poprzednim paragrafie.

Aby równanie różniczkowe cząstkowe przekształcić do równania różniczkowego zwyczajnego stosujemy sinusową transformację całkową Fouriera

$$V(j, t) = \int_0^l u(x, t) \sin \frac{j\pi x}{l} dx, \quad (3.40)$$

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j, t) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (3.41)$$

Dokonujemy sinusowej transformacji Fouriera równania (3.39)

$$\ddot{V}(j, t) + \omega_j^2 V(j, t) = \frac{P}{\rho A} \sin \omega t, \quad (3.42)$$

gdzie

$$\omega = \frac{j\pi v}{l}, \quad \omega_j^2 = \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \frac{N}{\rho A}. \quad (3.43)$$

Aby rozwiązać równanie różniczkowe (3.42) stosujemy transformację całkową Laplace'a-Carsona [15] i po przekształceniu otrzymujemy

$$V^*(j, p) = \frac{P \omega}{\rho A} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^2 + \omega_j^2}. \quad (3.44)$$

Powracamy do przestrzeni rzeczywistej dokonując odwrotnej transformaty Laplace'a-Carsona równania (3.44):

$$V(j, t) = \frac{P}{\rho A} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_j} \sin \omega_j t \right). \quad (3.45)$$

Ostatecznie przemieszczenia struny są następujące

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P}{\rho A l} \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (3.46)$$

Równanie (3.46) na podstawie (3.6) i (3.43) możemy przekształcić do postaci otrzymanej z rozwiązania klasycznego (3.31) gdy  $v \neq c$

$$u(x, t) = \frac{2Pl}{N} \frac{c}{\pi^2(c^2 - v^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( c \sin \frac{n\pi vt}{l} - v \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.47)$$

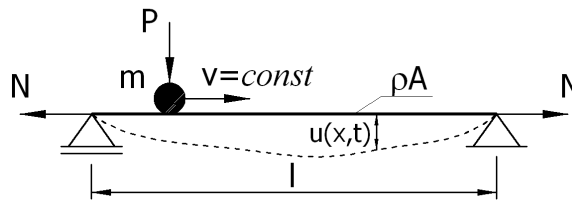
W przypadku  $v = c$  powyższe rozwiązanie przemieszczeń przyjmuje wartość nieoznaczoną  $[0/0]$ . Stosując metodę de l'Hospitala

$$\lim_{v \rightarrow c} u(x, t) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{2Pl}{N} \frac{1}{-2v\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( c^2 \frac{n\pi t}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} - c \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.48)$$

Po przekształceniach z uwzględnieniem (3.6) dochodzimy do znanego nam rozwiązania (3.38).

### 3.3. Bezmasowa struna pod ruchomym obciążeniem inercyjnym

Przyjmując  $\rho = 0$  równanie ruchu struny pod ruchomym obciążeniem masowym (Rys. 3.4) uzyskuje następującą postać



Rysunek 3.4: Ruchome obciążenie masowe.

$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \delta(x - vt) P - \delta(x - vt) m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2}. \quad (3.49)$$

Aby rozwiązać powyższe równanie korzystamy z własności splotu

$$u(x, t) = G(x, s) * p(s, t) = \int_0^l G(x, s) p(s, t) ds, \quad (3.50)$$

gdzie  $G(x, s)$  jest funkcją Greena, którą otrzymujemy rozwiązując tzw. równanie podstawowe zastępując prawą stronę (3.49) deltą Diraca  $\delta(x - s)$ . Ostatecznie przemieszczenia bezmasowej struny zgodnie z (3.50) są splotem  $G(x, s)$  i niejednorodności (3.49):

$$p(x, t) = \delta(x - vt) \left( P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right). \quad (3.51)$$

Z prostego całkowania, na podstawie założonych warunków brzegowych (3.2) oraz przyjmując następujące oznaczenia

$$x = vt \quad i \quad u_1(t) = u(vt, t) \quad (3.52)$$

otrzymujemy zgodnie z (3.50), (3.51) i (3.52) różniczkowe równanie ruchu struny bezmasowej pod ruchomym obciążeniem inercyjnym

$$u_1(t) = \left( P - m \frac{\partial^2 u_1(t)}{\partial t^2} \right) \left[ \frac{1}{N} \left( 1 - \frac{vt}{l} \right) vt \right]. \quad (3.53)$$

Przyjmujemy bezwymiarowe przemieszczenia struny  $y$  oraz bezwymiarowy czas  $\tau$

$$y(\tau) = \frac{u_1(t)}{u_0} \quad i \quad \tau = \frac{vt}{l}, \quad (3.54)$$

gdzie

$$u_0 = \frac{Pl}{4N} \quad (3.55)$$

jest ugięciem statycznym w środku struny. Podstawiając (3.54) do (3.53) otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne, niejednorodne o zmiennych współczynnikach

$$\tau(1 - \tau) \ddot{y}(\tau) + 2\alpha y(\tau) = 8\alpha \tau(1 - \tau), \quad (3.56)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{Nl}{2mc^2}. \quad (3.57)$$

### 3.3.1. Przypadek gdy $\alpha \neq 1$

Przyjmujemy równanie będące rozwiązaniem równania (3.56)

$$y(\tau) = \tau(1 - \tau)\nu(\tau). \quad (3.58)$$

Podstawiając (3.58) i jego drugą pochodną do (3.56) otrzymujemy:

$$\tau(1 - \tau) \ddot{\nu}(\tau) + (2 - 4\tau) \dot{\nu}(\tau) - 2(1 - \alpha)\nu(\tau) = 8\alpha. \quad (3.59)$$

Jednorodna część (3.59) jest równaniem hipergeometrycznym [67] o ogólnej postaci przedstawionej poniżej

$$\tau(1 - \tau) \ddot{\nu}(\tau) + [c - (a + b + 1)\tau] \dot{\nu}(\tau) - ab\nu(\tau) = 0. \quad (3.60)$$

W pierwszym kroku rozwiązujemy część jednorodną (3.59) gdzie współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$  mają następującą postać

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + 8\alpha}}{2}, \quad b_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{1 + 8\alpha}}{2}, \quad c = 2. \quad (3.61)$$

Rozwiązanie równania hipergeometrycznego gdy liczba  $c$  jest liczbą naturalną postaci  $c = 1 + m$  oraz  $a \neq m$ ,  $b \neq m$  przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \nu_1(\tau) &= F(a, b, c, \tau), \\ \nu_2(\tau) &= F(a, b, c, \tau) \ln \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(a_k)(b_k)}{(c_k)} [h(k) - h(0)] \frac{\tau^k}{k!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-a)(1-b)\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

gdzie  $F(a, b, c, \tau)$  jest szeregiem hipergeometrycznym

$$F(a, b, c, \tau) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k)(b_k)}{(c_k)} \frac{\tau^k}{k!}, \quad (3.63)$$

a  $(a_k)$ ,  $(b_k)$  i  $(c_k)$  są tzw. symbolami Pochhamera

$$\begin{aligned} (a_k) &= a(a+1)\dots(a+k-1), \\ (b_k) &= b(b+1)\dots(b+k-1), \\ (c_k) &= c(c+1)\dots(c+k-1). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Rozwiązanie szczególne (3.59) na podstawie jego niejednorodności przyjmuje postać

$$\nu_s(\tau) = \frac{4\alpha}{\alpha - 1}. \quad (3.65)$$

Zgodnie z (3.58) dla  $\alpha \neq 1$  równanie (3.56) jest następujące

$$y(\tau) = [A_1 \nu_1(\tau) + A_2 \nu_2(\tau) + \nu_s(\tau)] \tau(1 - \tau). \quad (3.66)$$

Na podstawie warunków początkowych (3.3) obliczamy stałe  $A_1$  i  $A_2$

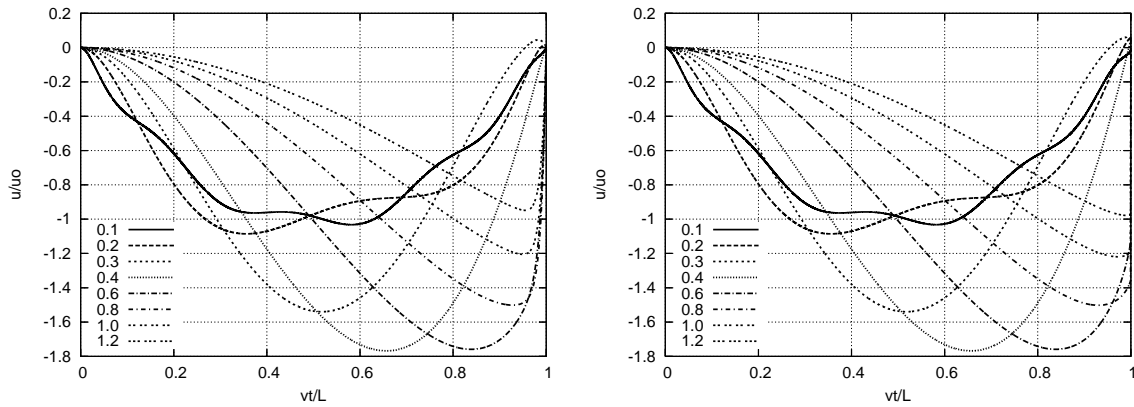
$$A_1 = \frac{-4\alpha}{\alpha - 1}, \quad A_2 = 0. \quad (3.67)$$

Stała  $A_2 = 0$  znacznie upraszcza formułę (3.66). Ostatecznie przemieszczenia struny pod ruchomym obciążeniem dla  $\alpha \neq 1$  są następującej postaci

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \frac{4\alpha}{\alpha - 1} \tau(1 - \tau) [1 - \nu_1(\tau)] \\ &= \frac{4\alpha}{\alpha - 1} \tau(1 - \tau) [1 - F(a, b, c, \tau)], \end{aligned} \quad (3.68)$$

gdzie  $F(a, b, c, \tau)$  dane jest wzorem (3.63). Na wykresie możemy zaobserwować wpływ dokładności na rozwiązanie blisko końcowej podpory.





**Rysunek 3.5:** Trajektoria ruchomej masy poruszającej się po bezmasowej strunie: mniejsza dokładność rozwiązania (lewy rysunek) i większa dokładność rozwiązania (prawy rysunek).

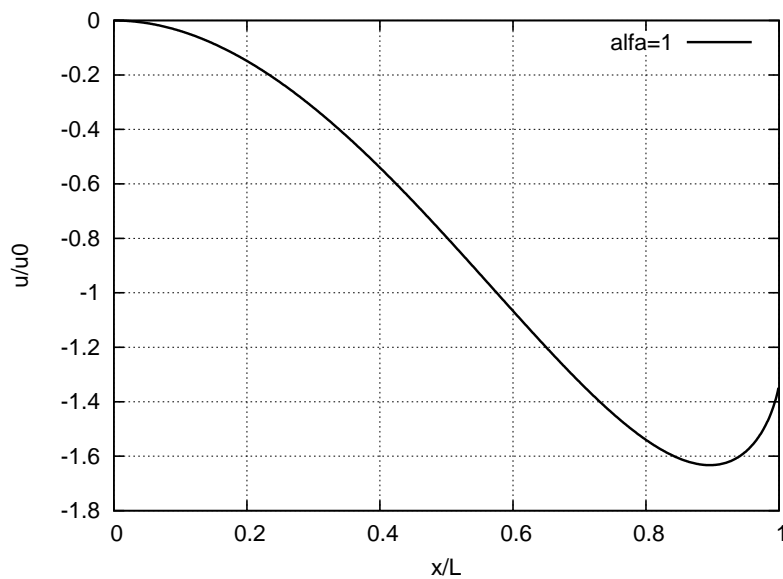
### 3.3.2. Przypadek gdy $\alpha = 1$

W tym przypadku równanie (3.56) przyjmuje następującą postać

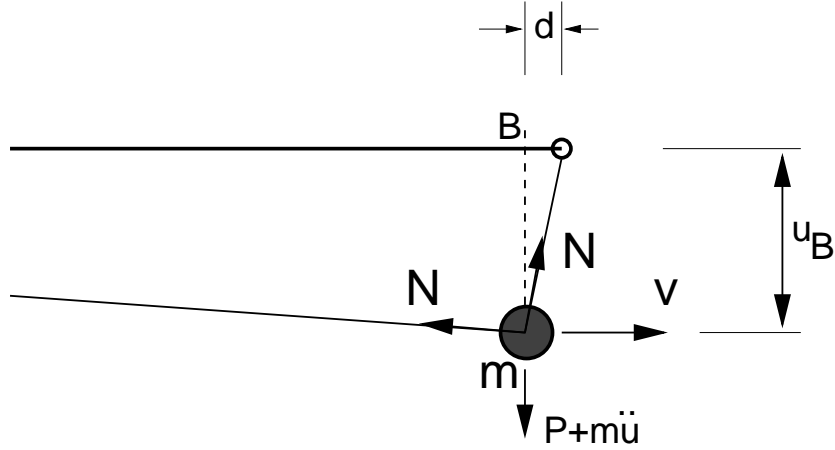
$$\tau(1 - \tau)\ddot{y}(\tau) + 2y(\tau) = 8\tau(1 - \tau). \quad (3.69)$$

Równanie (3.69) posiada rozwiązanie analityczne w zamkniętej formie. Ostatecznie przemieszczenia struny pod ruchomym obciążeniem dla  $\alpha = 1$  przy założonych warunkach brzegowych (3.2) i początkowych (3.3) są przedstawione poniżej

$$y(\tau) = \frac{4}{3}\tau(1 - \tau) - \frac{4}{3}\tau(1 + 2\tau \ln(1 - \tau) - 2\ln(1 - \tau)). \quad (3.70)$$



**Rysunek 3.6:** Trajektoria masy w przypadku bezmasowej struny (przypadek  $\alpha = 1$ )



Rysunek 3.7: Ruch masy przy końcowej podporze.

### 3.4. Nieciągłość rozwiązania w przypadku struny bezmasowej

Doskonała, zaawansowana metoda obliczeniowa zaproponowana przez Smitha[68] pozwala nam przedstawić ciekawe własności rozwiązania blisko końcowej podpory. Prezentowane wyniki przedstawiają skok przemieszczeń pod masą w czasie. Rozpatrzmy fizyczną naturę tego skoku. Najprostsze wyjaśnienie polega na prześledzeniu równowagi sił przedstawionych na Rys. 3.7. Musimy pamiętać że, głównym założeniem tego zadania jest stała wartość naciągu struny  $N$  oraz stała wartość prędkości  $v$  przejazdu masy  $m$ . Na Rys. 3.7 pozioma siła pcha masę, aby utrzymać stałą wartość jej prędkości. Końcowy dystans struny  $d$  musi być pokonany przez masę w czasie  $d/v$ . Po tym czasie masa musi znaleźć się na końcowej podporze, zgodnie z założonymi warunkami brzegowymi. Jeśli przemieszczenie  $u_B$  jest wystarczająco duże w porównaniu z innymi parametrami, przyspieszenie działające na masę, powoduje dużą siłę oddziaływującą na strunę  $F \sim umv^2/d^2$ . Gdy  $d$  dąży do zera, siła  $F$  dąży do nieskończoności. W naszym przypadku  $F$  jest większa od  $N$ , jeżeli  $m$  lub  $v$  jest wystarczająco duże. Ten fakt narusza nasze założenia i warunki stosowalności małych przemieszczeń  $(\partial u/\partial x)^2 \ll 1$ .

W przypadku gdy  $\alpha = 1$ , struna bezmasowa ma pełne, zamknięte rozwiązanie analityczne (3.70)

$$y(\tau) = \frac{4}{3}\tau(1 - \tau) - \frac{4}{3}\tau(1 + 2\tau \ln(1 - \tau) - 2\ln(1 - \tau)) , \quad (3.71)$$

a zatem dowód nieciągłości przy końcowej podporze jest bardzo prosty

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} y(\tau) = \frac{4}{3} . \quad (3.72)$$

Teraz zajmiemy się przypadkiem  $\alpha \neq 1$ . Rozwiązanie dane jest w postaci sumy (3.68)

$$y(\tau) = \frac{4\alpha}{\alpha - 1} \tau(\tau - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{(a+i-1)(b+i-1)}{c+i-1} \frac{\tau^k}{k!} , \quad (3.73)$$

gdzie  $\tau = vt/l > 0$  jest bezwymiarowym parametrem czasu. Zastanówmy się nad rozwiązaniem równania (3.73), a szczególnie nad jego wartością przy  $\tau = 1$ . Pierwszy składnik  $\tau(\tau - 1)$  równa się zero, natomiast pozostała część dąży do nieskończoności

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{(a+i-1)(b+i-1)}{c+i-1} \frac{\tau^k}{k!}. \quad (3.74)$$

Mamy więc nieokreślone rozwiązanie  $[0 \cdot \infty]$  przy  $\tau = 1^-$ .

Ten sam wynik otrzymamy na podstawie twierdzenia Abela. Szereg potęgowy możemy zapisać w następującej formie

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \tau^k, \quad A_k = \prod_{i=1}^k \frac{(a+i-1)(b+i-1)}{(c+i-1)i}. \quad (3.75)$$

W tym przypadku  $\lim_{\tau \rightarrow 1^-} A_k \tau^k = \infty$  i  $y(1^-) = 0 \cdot \infty$ .

Aby pozbyć się nieoznaczoności w rozwiązaniu Smitha, przedstawiono inny schemat postępowania polegający na włączeniu składnika  $\tau(\tau - 1)$  do sumy. W ten sposób równanie (3.73) zostało przekształcone do następującej formy

$$(1-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k)(b_k)}{(c_k)} \frac{\tau^k}{k!} = \frac{ab\tau}{c} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(a_{k-1})(b_{k-1})}{(c_{k-1})} \left( \frac{(a+k-1)(b+k-1)}{k(c+k-1)} - 1 \right) \frac{\tau^k}{(k-1)!}, \quad (3.76)$$

gdzie

$$\begin{aligned} (a_k) &= a(a+1)\dots(a+k-1), \\ (b_k) &= b(b+1)\dots(b+k-1), \\ (c_k) &= c(c+1)\dots(c+k-1). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Zgodnie z kryterium Rabbego dla  $a+b < c+2$  granica

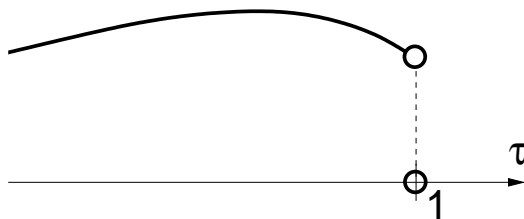
$$\lim_{\tau \rightarrow 1} \left[ (1-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k \frac{(a+i-1)(b+i-1)}{c+i-1} \frac{\tau^k}{k!} \right]$$

jest skończona. Teraz możemy oszacować wartość sumy (3.76). Suma pierwszych trzech składników wraz z  $ab\tau/c$  jest dodatnia. Następne składniki sumy są także dodatnie. Dowodzi to, że suma (3.76) jest skończona i większa od zera. Nieciągłość funkcji została przedstawiona na Rys. 3.8.

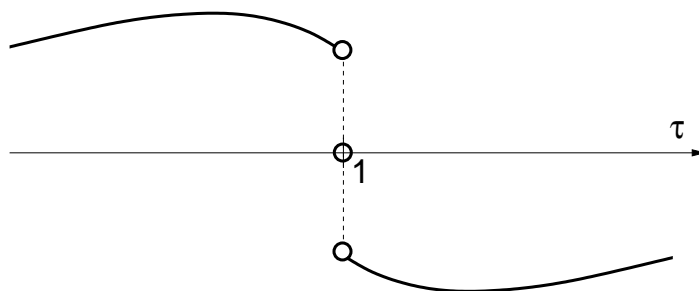
Przyjrzyjmy się warunkom brzegowym dla  $\tau = 1$ . Możemy wyobrazić sobie symetryczne zadanie z masą poruszającą się z  $\tau = 2$  do  $\tau = 1$  (z siłą  $P$  o przeciwnym znaku). Otrzymamy wtedy dwa analogiczne problemy przy  $\tau = 1$ . Suma tych dwóch granic dla  $\tau = 1$  równa się zero

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{\tau \rightarrow 1^-} y(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow 1^+} y(\tau) \right) = 0.$$

Potrąfimy również obliczyć pochodną  $dy/d\tau$ . Jej granica przy  $\tau \rightarrow 1^-$  jest wskaźni-



**Rysunek 3.8:** Nieciągłość funkcji (3.73) w punkcie  $\tau = 1$ .



**Rysunek 3.9:** Lewa i prawa granica w przypadku gdy  $\tau = 1$ .

kiem nachylenia końcowego fragmentu struny względem osi poziomej. W przypadku ruchomej siły  $P$  przyjętej ze znakiem minus otrzymujemy następującą granicę

$$\lim_{\tau \rightarrow 1^-} \frac{dy}{d\tau} = \infty. \quad (3.78)$$

Potwierdza ona ostatecznie nieciągłość trajektorii ruchomej masy poruszającej się po bezmasowej strunie.

## Rozwiązania analityczne równania drgań belek

W przypadku belki Bernoulliego–Eulera jak i Timoshenki zastosowano znaną z poprzednich rozdziałów transformację Fouriera. Dzięki temu redukuje się cząstkowe równania ruchu do równania różniczkowego zwyczajnego. Otrzymane równanie rozwiązano w obu przypadkach przy pomocy całkowitej transformacji Laplace’a–Carsona.

### 4.1. Belka Bernoulliego-Eulera pod ruchomą, stałą siłą

Równanie ruchu belki Bernoulliego-Eulera wygląda następująco:

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P . \quad (4.1)$$

Zakładamy następujące warunki brzegowe

$$u(0, t) = 0 , \quad u(l, t) = 0 , \quad \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 , \quad \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 , \quad (4.2)$$

oraz warunki początkowe

$$u(x, 0) = 0 , \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 . \quad (4.3)$$

Stosujemy sinusową transformację Fouriera w przedziale  $\langle 0; l \rangle$  (3.40), w której rozwinięcie przemieszczeń w nieskończony szereg (3.41) realizuje założone warunki brzegowe (4.2)

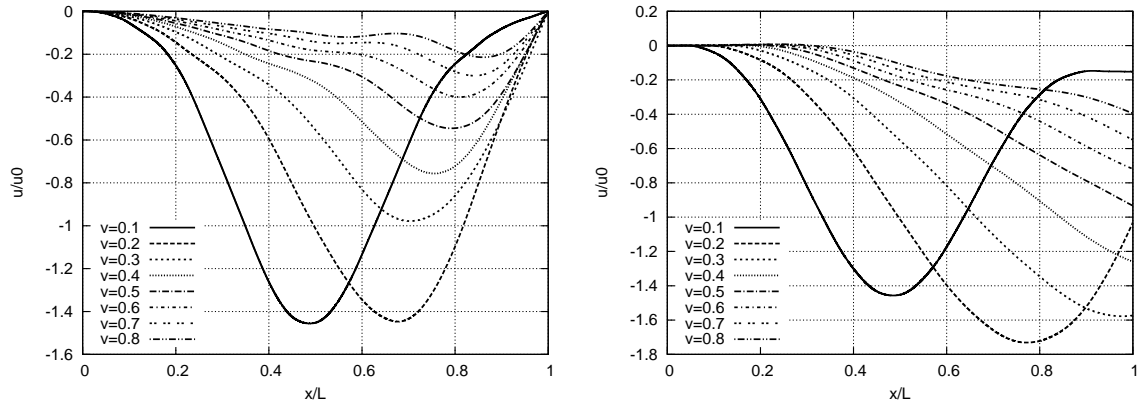
$$EI \frac{j^4 \pi^4}{l^4} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) = P \sin \frac{j\pi vt}{l} . \quad (4.4)$$

Równanie (4.4) można zapisać następująco

$$\ddot{V}(j, t) + \Omega_j^2 V(j, t) = \frac{P}{\rho A} \sin \omega_j t , \quad (4.5)$$

gdzie

$$\omega_j = \frac{j\pi v}{l} , \quad \Omega_j^2 = \frac{EI}{\rho A} \frac{j^4 \pi^4}{l^4} . \quad (4.6)$$



**Rysunek 4.1:** Belka Eulera pod ruchomym obciążeniem grawitacyjnym: trajektoria ruchomej siły (rysunek lewy) oraz ugięcia w środku belki (rysunek prawy).

Stosujemy transformację Laplacea-Carsona równania (4.5), uwzględniającą założone warunki początkowe

$$p^2 \hat{V}^*(j, p) + \Omega_j^2 \hat{V}^*(j, p) = \frac{P}{\rho A} \frac{\omega_j p}{p^2 + \omega_j^2}. \quad (4.7)$$

Po uporządkowaniu równanie przedstawiamy w następującej postaci

$$\hat{V}^*(j, p) = \frac{P \omega_j}{\rho A} \frac{p}{p^2 + \omega_j^2} \frac{1}{p^2 + \Omega_j^2}. \quad (4.8)$$

Następnym krokiem jest zastosowanie odwrotnej transformacji Laplacea-Carsona

$$V(j, t) = \frac{P}{\rho A} \frac{1}{\Omega_j^2 - \omega_j^2} \left( \sin \omega_j t - \frac{\omega_j}{\Omega_j} \sin \Omega_j t \right). \quad (4.9)$$

Z kolei odwrotna transformacja Fouriera w skończonym przedziale  $\langle 0 : l \rangle$  daje następujący wynik

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2P}{\rho A l} \frac{1}{\Omega_j^2 - \omega_j^2} \left( \sin \omega_j t - \frac{\omega_j}{\Omega_j} \sin \Omega_j t \right) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (4.10)$$

## 4.2. Belka Timoshenki pod ruchomą, stałą siłą

Postępujemy podobnie jak w przypadku belki Bernoulliego-Eulera. Równanie ruchu belki Timoshenki ma następującą postać

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho^2 k \frac{I}{G} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \\ = q(x, t) - k \frac{EI}{GA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + \rho k \frac{I}{GA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Przyjmujemy warunki brzegowe

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (4.12)$$

oraz warunki początkowe

$$u(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (4.13)$$

Zewnętrzne obciążenie opisujemy jako siłę skupioną działającą w przemieszczającym się punkcie  $x = vt$

$$q(x,t) = \delta(x - vt)P. \quad (4.14)$$

Wyznaczamy drugą pochodną tego wyrażenia względem  $x$

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} = \delta''(x - vt)P, \quad (4.15)$$

oraz drugą pochodną względem  $t$

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \delta''(x - vt)Pv^2. \quad (4.16)$$

Po zastosowaniu sinusowej transformacji Fouriera w przedziale  $\langle 0; l \rangle$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} EI \frac{j^4 \pi^4}{l^4} V(j,t) + \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right) \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \ddot{V}(j,t) + \rho^2 k \frac{I}{G} \ddot{\ddot{V}}(j,t) + \rho A \ddot{V}(j,t) = \\ = P \sin \frac{j\pi vt}{l} + k \frac{EI}{GA} P \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{j\pi vt}{l} - \rho k \frac{I}{GA} P v^2 \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{j\pi vt}{l}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Powyższe równanie możemy zapisać w skróconej postaci

$$\ddot{\ddot{V}}(j,t) + \hat{b} \ddot{V}(j,t) + \hat{c} V(j,t) = \hat{d} \sin \frac{j\pi vt}{l}, \quad (4.18)$$

gdzie

$$\hat{b} = \frac{b}{a} \quad \hat{c} = \frac{c}{a} \quad \hat{d} = \frac{d}{a}, \quad (4.19)$$

oraz

$$a = \rho^2 k \frac{I}{G} \quad b = \rho A + \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right), \quad (4.20)$$

i

$$c = EI \frac{j^4 \pi^4}{l^4} \quad d = P + k \frac{EI}{GA} P \frac{j^2 \pi^2}{l^2} - \rho k \frac{I}{GA} P v^2 \frac{j^2 \pi^2}{l^2}. \quad (4.21)$$

Rozpatrując część jednorodną równania (4.18) oraz stosując podstawienie  $V(j,t) = e^{rt}$  otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$r^4 + \hat{b}(j)r^2 + \hat{c}(j) = 0. \quad (4.22)$$

Równanie to, w zależności od współczynników  $\hat{b}(j)$  i  $\hat{c}(j)$  ma trzy wersje rozwiązań. W pierwszym ma dwa podwójne pierwiastki rzeczywiste  $r_{1,2} = \pm a_1$  i  $r_{3,4} = \pm a_2$ . W drugim dwa pierwiastki zespolone  $r_{1,2} = a_3 \pm ib_1$  i  $r_{3,4} = -a_3 \pm ib_1$ . Trzecim wariantem

są pierwiastki urojone  $r_{1,2} = \pm ib_2$  i  $r_{3,4} = \pm ib_3$ . W związku z tym rozwiązanie ogólne (4.18) może mieć trzy różne postaci:

$$V_o(j, t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{-a_1 t} + C_3 e^{a_2 t} + C_4 e^{-a_2 t} , \quad (4.23)$$

lub

$$V_o(j, t) = e^{a_3 t} (C_1 \sin b_1 t + C_2 \cos b_1 t) + e^{-a_3 t} (C_3 \sin b_1 t + C_4 \cos b_1 t) \quad (4.24)$$

lub

$$V_o(j, t) = C_1 \sin b_2 t + C_2 \cos b_2 t + C_3 \sin b_3 t + C_4 \cos b_3 t . \quad (4.25)$$

Jedynie trzeci przypadek ma sens fizyczny. Wraz ze wzrostem  $j$  pojawiają się części rzeczywiste  $a_1$  i  $a_2$  lub  $a_3$  w rozwiązaniach równania charakterystycznego (4.22). Zatem w przypadku pierwszym i drugim przy kolejnych  $j$  rosną potęgi funkcji wykładniczej, a wraz z nimi przemieszczenia belki. Świadczy to o rozbieżności będącego rozwiązaniem szeregu (3.41).

Stosujemy teraz transformację Laplacea-Carsona (L-C) do równania (4.17)

$$p^4 \hat{V}^*(j, p) + \hat{b} p^2 \hat{V}^*(j, p) + \hat{c} \hat{V}^*(j, p) = \hat{d} \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} , \quad (4.26)$$

gdzie

$$\omega = \frac{j\pi v}{l} . \quad (4.27)$$

Po uporządkowaniu równanie (4.26) przyjmuje poniższą postać

$$\hat{V}^*(j, p) = \hat{d} \omega \frac{p}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{p^4 + \hat{b} p^2 + \hat{c}} . \quad (4.28)$$

Aby odwrócić transformatę L-C, musimy rozłożyć prawą stronę równania (4.28) na ułamki proste. W tym celu należy rozwiązać poniższe równanie

$$p^4 + \hat{b} p^2 + \hat{c} = 0 . \quad (4.29)$$

Pierwiastkami tego równania są

$$p_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-2\hat{b} + 2\sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}} , \quad (4.30)$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{-2\hat{b} + 2\sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}} = -p_1 , \quad (4.31)$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \sqrt{-2\hat{b} - 2\sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}} , \quad (4.32)$$

$$p_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{-2\hat{b} - 2\sqrt{\hat{b}^2 - 4\hat{c}}} = -p_3 . \quad (4.33)$$

Na podstawie powyższych rozwiązań możemy napisać

$$\frac{\hat{d}\omega}{(p^2 + \omega^2)(p^4 + \hat{b}p^2 + \hat{c})} \equiv \frac{A}{p - i\omega} + \frac{B}{p + i\omega} + \frac{C}{p - p_1} + \frac{D}{p + p_1} + \frac{E}{p - p_3} + \frac{F}{p + p_3} . \quad (4.34)$$



Stałe A, B, C, D, E i F obliczamy z układu równań

$$\begin{cases} A + B + C + D + E + F = 0 \\ iA\omega - iA\omega + p_1C - p_1D + p_3E - p_3F = 0 \\ -Ap_3^2 - Ap_1^2 - Bp_3^2 - Bp_1^2 - Cp_3^2 + C\omega^2 - Dp_3^2 + D\omega^2 - Ep_1^2 + E\omega^2 - Fp_1^2 + F\omega^2 = 0 \\ -iAp_3^2\omega - iAp_1^2\omega + iBp_3^2\omega + iBp_1^2\omega - Cp_1p_3^2 + Cp_1\omega^2 + Dp_1p_3^2 - Dp_1\omega^2 - Ep_1^2p_3 + \\ \quad + E\omega^2p_3 + Fp_1^2p_3 - Fp_3\omega^2 = 0 \\ Ap_1^2p_3^2 + Bp_1^2p_3^2 - Cp_3^2\omega^2 - Dp_3^2\omega^2 - Ep_1^2\omega^2 - Fp_1^2\omega^2 = 0 \\ iA\omega p_3^2p_1^2 - iB\omega p_3^2p_1^2 - Cp_1p_3^2\omega^2 + Dp_1p_3^2\omega^2 - Ep_3p_1^2\omega^2 + Fp_3p_1^2\omega^2 = \hat{d}\omega \end{cases} \quad (4.35)$$

Po rozwiązaniu układu (4.35) równanie (4.34) zapisujemy w postaci następującej

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}\omega}{(p^2 + \omega^2)(p^4 + \hat{b}p^2 + \hat{c})} &= \frac{-\frac{1}{2}i \frac{\hat{d}}{(p_3^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)}}{p - i\omega} + \frac{\frac{1}{2}i \frac{\hat{d}}{(p_3^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)}}{p + i\omega} + \frac{-\frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{(\omega^2 + p_1^2)p_1(p_3^2 - p_1^2)}}{p - p_1} + \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{(\omega^2 + p_1^2)p_1(p_3^2 - p_1^2)}}{p + p_1} + \frac{\frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{p_3(\omega^2 p_3^2 + p_3^4 - p_1^2 p_3^2 - \omega^2 p_1^2)}}{p - p_3} + \\ &+ \frac{-\frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{p_3(\omega^2 p_3^2 + p_3^4 - p_1^2 p_3^2 - \omega^2 p_1^2)}}{p + p_3} . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Zgodnie z podstawami transformacji Laplace'a piszemy

$$\frac{1}{p - a} \rightarrow e^{at} . \quad (4.37)$$

Stosujemy teraz odwrotną transformację Laplace'a-Carsona równania (4.28)

$$\begin{aligned} V(j, t) &= \frac{1}{2}i \frac{\hat{d}}{(p_3^2 + \omega^2)(p_1^2 + \omega^2)} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) + \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{(\omega^2 + p_1^2)p_1(p_3^2 - p_1^2)} (e^{-p_1 t} - e^{p_1 t}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{p_3(\omega^2 p_3^2 + p_3^4 - p_1^2 p_3^2 - \omega^2 p_1^2)} (e^{p_3 t} - e^{-p_3 t}) . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Równanie (4.38) możemy zapisać w postaci

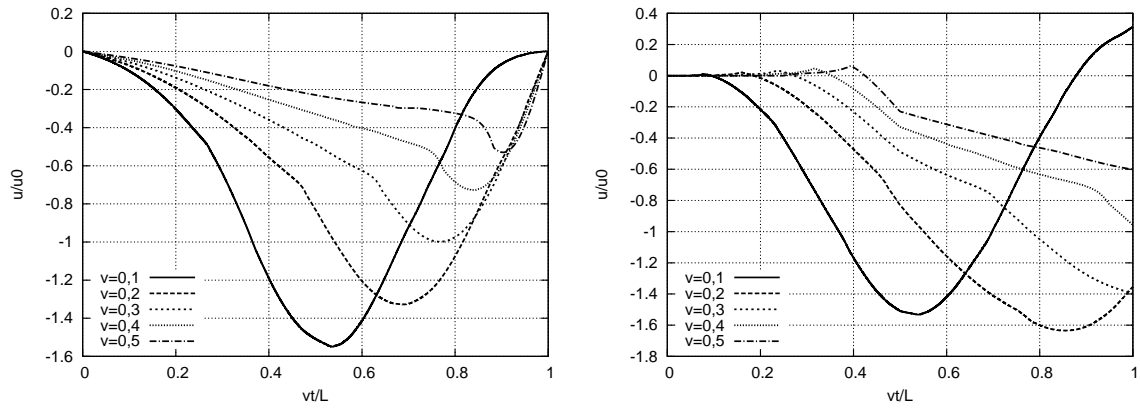
$$\begin{aligned} V(j, t) &= \frac{1}{2i} \frac{\hat{d}}{(p_1^2 + \omega^2)(p_3^2 + \omega^2)} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) - \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{(\omega^2 + p_1^2)p_1(p_3^2 - p_1^2)} (e^{p_1 t} - e^{-p_1 t}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\hat{d}\omega}{p_3(\omega^2 p_3^2 + p_3^4 - p_1^2 p_3^2 - \omega^2 p_1^2)} (e^{p_3 t} - e^{-p_3 t}) . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ponieważ

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} , \quad (4.40)$$

oraz

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} . \quad (4.41)$$



**Rysunek 4.2:** Belka Timoshenki pod ruchomym obciążeniem grawitacyjnym: trajektoria ruchomej siły (rysunek lewy) oraz ugięcia w środku belki (rysunek prawy).

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 V(j, t) = & \frac{\hat{d}}{(p_1^2 + \omega^2)(p_3^2 + \omega^2)} \sin \omega t - \frac{\hat{d}\omega}{(\omega^2 + p_1^2)p_1(p_3^2 - p_1^2)} \sinh p_1 t + \\
 & + \frac{\hat{d}\omega}{p_3(\omega^2 p_3^2 + p_3^4 - p_1^2 p_3^2 - \omega^2 p_1^2)} \sinh p_3 t .
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Powrót do rzeczywistych przemieszczeń z sinusowej transformacji Fouriera pozwala uzyskać końcowy wynik

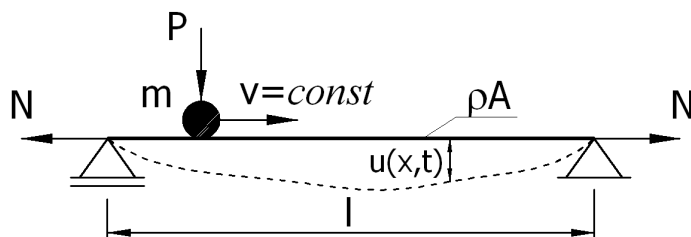
$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j, t) \sin \frac{j\pi x}{l} . \tag{4.43}$$

## Rozwiązania półanalityczne struny

Rozwiązania analityczno–numeryczne dotyczą struny pod ruchomym obciążeniem inercyjnym. Uwzględnienie ruchomego obciążenia bezwładnościowego pociąga za sobą bardzo poważne matematyczne konsekwencje. Różniczkowe równanie ruchu, otrzymane w rozdziale 2, po odpowiednich całkowych przekształceniach, w ostatniej fazie musi być, ze względu na swoją postać, obliczane numerycznie. Dystrybucja pod postacią delty Diraca może budzić wśród czytelników wiele kontrowersji. Jako powód nieciągłości rozwiązania upatrywano właśnie jej obecność. Z tego względu też zastosowano odmienny sposób podejścia do problemu. Zastosowano równanie Lagrange’a drugiego rodzaju. Ta energetyczna metoda do zapisu energii badanego układu nie wymaga stosowania delty Diraca.

### 5.1. Inercyjna struna pod ruchomym obciążeniem inercyjnym

Rozpatrzmy strunę przedstawioną w poprzednim rozdziale. Dodajmy do stałej, ruchomej siły  $P$  poruszającą się wraz z nią masę  $m$  (rys. 5.1). Równanie ruchu opisujące



Rysunek 5.1: Poruszające się obciążenie inercyjne.

strunę pod działaniem ruchomego obciążenia inercyjnego jadącego ze stałą prędkością  $v$  ma następująca postać

$$-N \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt) P - \delta(x - vt) m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

Przyjmujemy te same co wcześniej warunki brzegowe (3.2) i początkowe (3.3). Podobnie jak w poprzednim rozdziale stosujemy transformację Fouriera (3.40) i (3.41) i zastępujemy równanie cząstkowe równaniem zwyczajnym. Możemy rozwinąć przyspieszenie poprzeczne ruchomej masy w nieskończony szereg z odpowiednimi współczynnikami

$$\frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} + \frac{2k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} - \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \right]. \quad (5.2)$$

Całkowa transformacja (3.40) równania (5.1) została zapisana poniżej

$$N \frac{j^2 \pi^2}{l^2} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) = P \sin \frac{j\pi ct}{l} - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \int_0^l \delta(x - vt) \sin \frac{j\pi x}{l} dx, \quad (5.3)$$

gdzie całkę zawierającą deltę Diraca zapisuje się w prostej postaci

$$\int_0^l \delta(x - vt) \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \sin \frac{j\pi vt}{l}. \quad (5.4)$$

Uwzględniając (5.2) i (5.4) możemy zapisać (5.3) w sposób następujący

$$\begin{aligned} N \frac{j^2 \pi^2}{l^2} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) &= P \sin \frac{j\pi vt}{l} - \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} - \\ &- \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} + \\ &+ \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ostatecznie równanie ruchu po transformacji Fouriera przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{V}(j, t) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k, t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \dot{V}(k, t) \cos \omega_k t \sin \omega_j t + \\ + \Omega^2 V(j, t) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 V(k, t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t = P \sin \omega_j t, \end{aligned} \quad (5.6)$$

gdzie

$$\omega_k = \frac{k\pi v}{l}, \quad \omega_j = \frac{j\pi v}{l}, \quad \Omega^2 = N \frac{j^2 \pi^2}{l^2}, \quad \alpha = \frac{2m}{l}. \quad (5.7)$$

Ponieważ nie potrafimy kontynuować obliczeń analitycznie, musimy rozwiązać równanie (5.6) numerycznie. Zapisujemy (5.6) w postaci macierzowej, gdzie macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$  są macierzami kwadratowymi ( $j, k = 1 \dots n$ )

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{V}(1, t) \\ \ddot{V}(2, t) \\ \vdots \\ \ddot{V}(n, t) \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{V}(1, t) \\ \dot{V}(2, t) \\ \vdots \\ \dot{V}(n, t) \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} V(1, t) \\ V(2, t) \\ \vdots \\ V(n, t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}, \quad (5.8)$$

lub krócej

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P}, \quad (5.9)$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho A \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{n\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{C} = 2\alpha \begin{bmatrix} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1^2\pi^2}{l^2} N & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2^2\pi^2}{l^2} N & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n^2\pi^2}{l^2} N \end{bmatrix} - \quad (5.12)$$

$$- \alpha \begin{bmatrix} \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix},$$

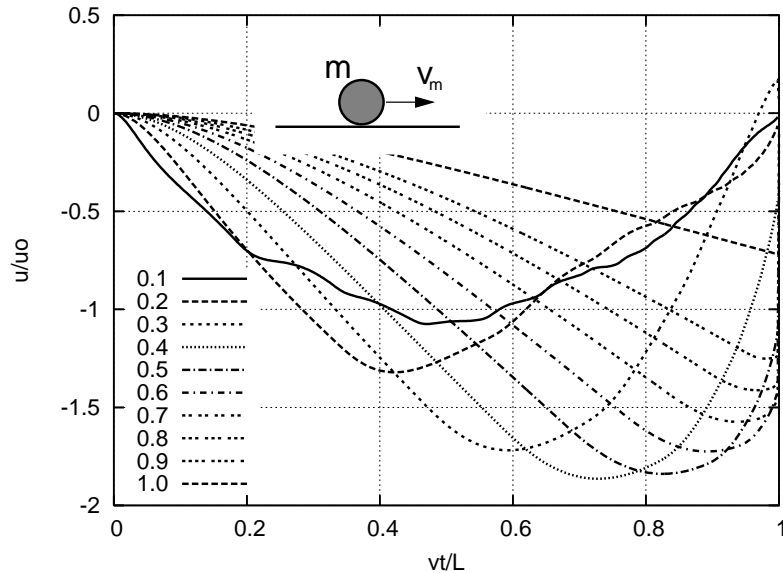
$$\mathbf{P} = P \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \\ \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Współczynniki  $V(j, t)$  wyznaczone numerycznie podstawiamy do szeregu opisującego przemieszczenia struny

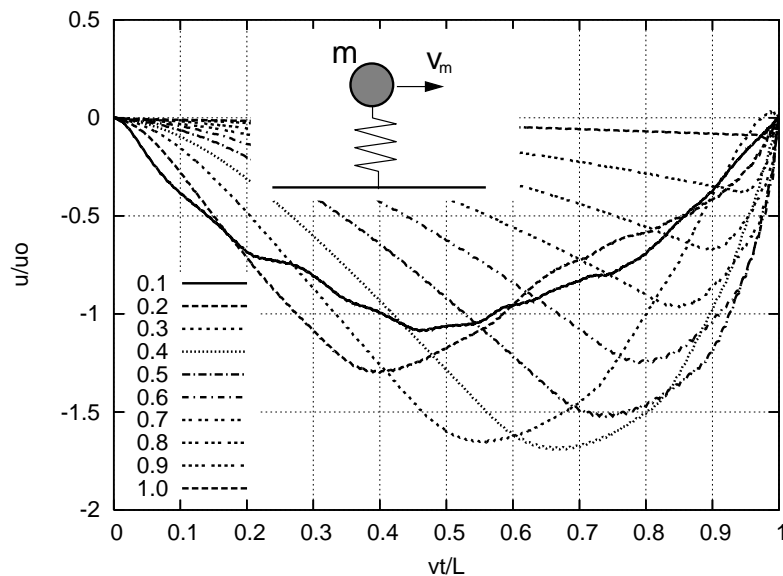
$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j, t) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (5.14)$$

W ten sposób uzyskujemy rozwiązanie w całym rozpatrywanym obszarze przestrzennym. Możemy wyznaczyć przemieszczenia w dowolnym miejscu struny oraz wykreślić oś odkształconą struny w pełnym zakresie prędkości masy  $v$ . W punkcie  $x = l$  obserwujemy nieciągłość trajektorii. Rys. 5.2 przedstawia przemieszczenia struny w czasie przy wybranych prędkościach ruchu masy  $v$ . Rys. 5.3 pokazuje rozwiązanie analogicznego zadania, w którym obciążenie struny realizowane jest w postaci oscylatora, którego sztywność zmierza do nieskończoności. Obliczenia wykonano metodą elementów skończonych, przyjmując sztywność sprężyny oscylatora ok. 8 rzędów większą od sztywności

poprzecznej struny. Wyższe zakresy sztywności powodowały rozbieganie się iteracyjnych rozwiązań. Na rys. 5.4 uwidoczniło w pełni przemieszczenia punktów struny w czasie. Dostrzec można też nieciągłość opisaną wcześniej, zwłaszcza przy prędkości  $v = 0,5c$ .

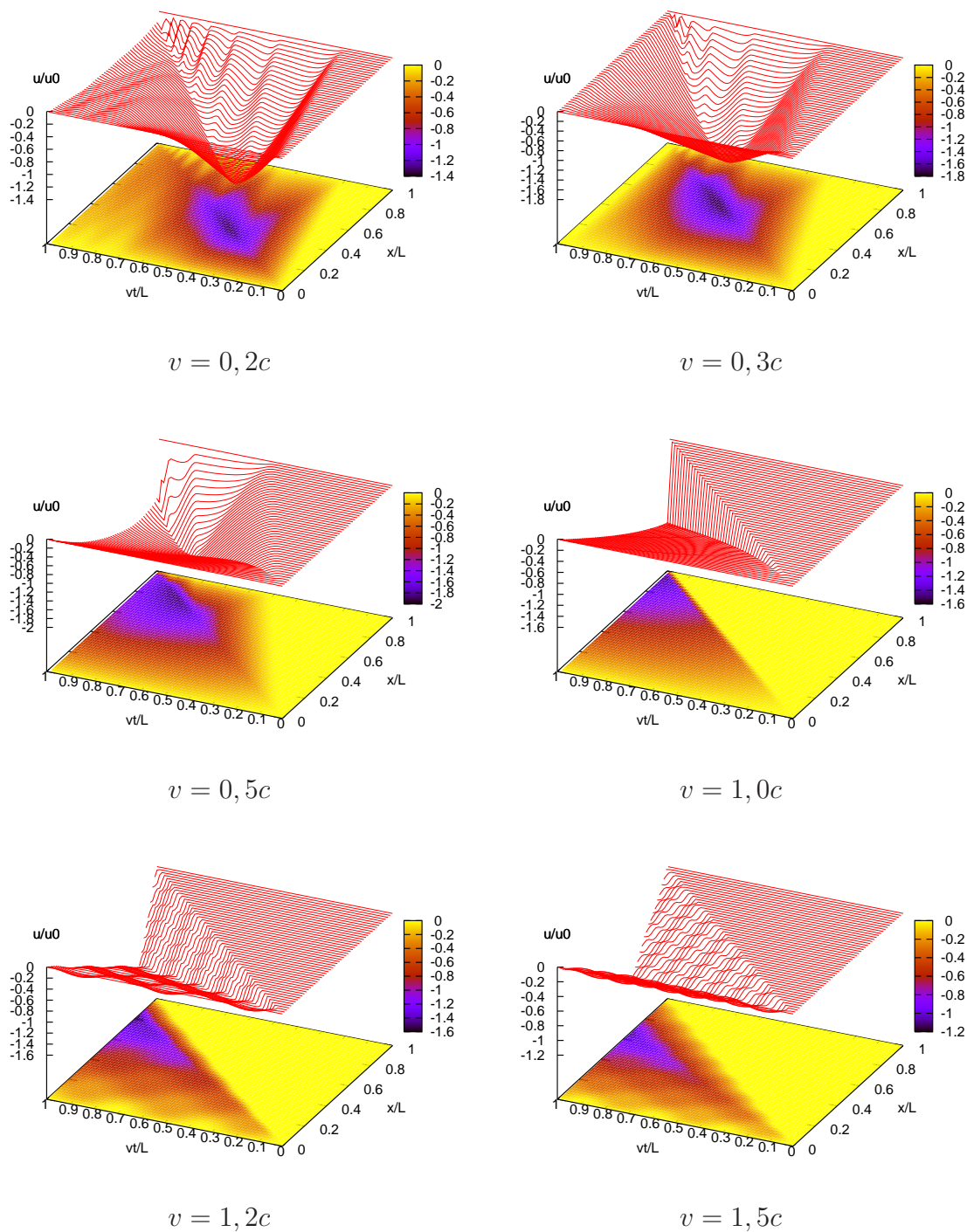


**Rysunek 5.2:** Trajektorie ruchu masy przy różnej prędkości  $v$ .

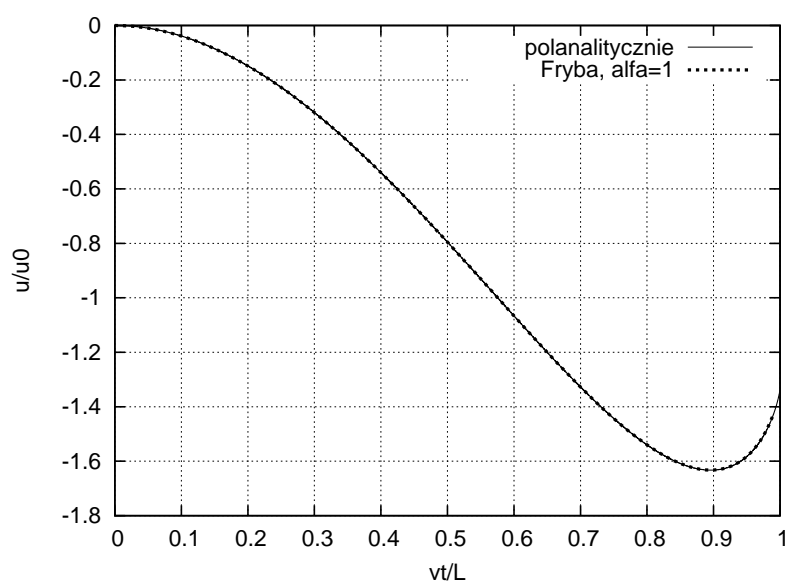


**Rysunek 5.3:** Trajektorie ruchu masy przy różnej prędkości  $v$  — obciążenie ruchomym oscylatorem.

Przyjmując w szczególnym przypadku  $\rho = 0$  w (5.10) otrzymujemy rozwiązanie zadania ruchu struny bezmasowej (rozdział 3.3). Rozwiązanie to przedstawiono na rys. 5.5. Obie krzywe pokrywają się.



**Rysunek 5.4:** Symulacja drgań struny obciążonej inercyjnie, przy prędkości  $v_m = 0,2c, 0,3c, 0,5c, 1,0c, 1,2c$  i  $1,5c$ .



**Rysunek 5.5:** Rozwiązanie półanalityczne struny bezmasowej oraz analityczne opisane przez Frybę.



## 5.2. Równanie Lagrange'a 2-go rodzaju w przypadku struny pod jadącą masą

Dzięki energetycznemu podejściu do problemu nie musimy posługiwać się deltą Diraca w opisie ruchomego obciążenia [17]. Energia kinetyczna struny oraz ruchomej masy przedstawia się następująco:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx + E_{km} , \quad (5.15)$$

gdzie

$$E_{km} = \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \right]^2 . \quad (5.16)$$

Energia potencjalna struny i ruchomej siły grawitacyjnej opisana jest następująco

$$E_p = \frac{1}{2} N \int_0^l \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx - P u(vt, t) . \quad (5.17)$$

Rozwijamy przemieszczenia struny w nieskończony szereg

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(x) \xi_i(t) . \quad (5.18)$$

Z kolei przemieszczenie struny w punkcie styku z ruchomą masą oraz jej pierwszą pochodną po czasie zapisujemy wzorami

$$u(vt, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j(vt) \xi_j(t) , \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} = v \sum_{j=1}^{\infty} U_j'(x) \xi_j(t) \Big|_{x=vt} + \sum_{j=1}^{\infty} U_j(x) \dot{\xi}_j(t) \Big|_{x=vt} = f(\xi_i, \dot{\xi}_i) . \quad (5.20)$$

Całkowitą energię badanego układu (5.15), zgodnie z (5.18), po przekształceniach możemy przedstawić w następującej formie

$$E_k = \frac{1}{2} \rho A \sum_{i,j=1}^{\infty} \dot{\xi}_i(t) \dot{\xi}_j(t) \int_0^l U_i(x) U_j(x) dx + \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \right]^2 . \quad (5.21)$$

Przyjmujemy ortogonalną funkcję  $U_i(x)$ , która w sposób naturalny realizuje założone warunki brzegowe (3.2)

$$U_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l} . \quad (5.22)$$

Ma ona następującą własność

$$\int_0^l U_i(x) U_j(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} l & \text{jeżeli } i = j, \\ 0 & \text{jeżeli } i \neq j. \end{cases} \quad (5.23)$$

Zgodnie z (5.22) energia kinetyczna układu przyjmuje postać

$$E_k = \frac{1}{4} \rho A l \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i^2(t) + \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \right]^2 . \quad (5.24)$$

W przypadku energii potencjalnej równanie (5.17), na podstawie (5.18) i (5.19) oraz po całkowaniu przez części, możemy zapisać w następującej formie

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} N \sum_{i,j=1}^{\infty} \xi_i(t) \xi_j(t) \int_0^l U_i'(x) U_j'(x) dx - P u(vt, t) = \\ &= -\frac{1}{2} N \sum_{i,j=1}^{\infty} \xi_i(t) \xi_j(t) \int_0^l U_i''(x) U_j(x) dx - P \sum_{i=1}^{\infty} U_i(vt) \xi_i(t) , \end{aligned} \quad (5.25)$$

gdzie zgodnie z (5.22)

$$U_i''(x) = -\frac{i^2 \pi^2}{l^2} U_i(x) . \quad (5.26)$$

Dzięki temu równanie (5.25) przedstawiamy według następującego wzoru

$$E_p = \frac{1}{2} N \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \xi_i(t) \xi_j(t) \int_0^l U_i(x) U_j(x) dx - P \sum_{i=1}^{\infty} U_i(vt) \xi_i(t) . \quad (5.27)$$

Ostatecznie energię potencjalną struny możemy przedstawić następująco

$$E_p = \frac{1}{4} N l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \xi_i^2(t) - P \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t) \sin \frac{i \pi v t}{l} . \quad (5.28)$$

Teraz, kiedy mamy już energię kinetyczną i potencjalną przedstawioną we współrzędnych uogólnionych, będących funkcjami czasu, możemy zająć się sformułowaniem równania ruchu przy użyciu równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Jego postać ogólna dana jest wzorem

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \xi_i} + \frac{\partial E_p}{\partial \xi_i} = H_i(t) . \quad (5.29)$$

W tym przypadku obciążenie zewnętrzne  $H_i(t) = 0$ . Na podstawie (5.16) i (5.20) otrzymujemy

$$\frac{\partial E_{km}}{\partial \xi_i} = m \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \frac{d}{d \xi_i} \left( \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \right) , \quad (5.30)$$

oraz

$$\frac{\partial E_{km}}{\partial \dot{\xi}_i} = m \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \frac{d}{d \dot{\xi}_i} \left( \frac{\partial u(vt, t)}{\partial t} \right) . \quad (5.31)$$

W równaniu (5.29) uwzględniamy (5.30) i (5.31) oraz obliczamy pochodną energii kinetycznej (5.24) względem uogólnionego przemieszczenia  $\xi_i$  oraz prędkości  $\dot{\xi}_i$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \xi_i} = \frac{\partial E_{km}}{\partial \xi_i} = m \left[ v^2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{i j \pi^2}{l^2} \cos \frac{i \pi v t}{l} \cos \frac{j \pi v t}{l} \xi_j(t) + v \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{i \pi}{l} \cos \frac{i \pi v t}{l} \sin \frac{j \pi v t}{l} \dot{\xi}_j(t) \right] \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{1}{2} \rho A l \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i(t) + \frac{\partial E_{km}}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{1}{2} \rho A l \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\xi}_i(t) + m \left[ v \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{j\pi}{l} \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} \xi_j(t) + \sum_{i,j=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} \dot{\xi}_j(t) \right]. \quad (5.33)$$

Następnie obliczamy pochodną energii potencjalnej (5.28) względem uogólnionych przemieszczeń  $\xi_i$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2} N l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \xi_i(t) - P \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi vt}{l}. \quad (5.34)$$

Pochodna (5.33) względem  $t$  ma następującą postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = \frac{1}{2} \rho A l \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i(t) + m \left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{j\pi v}{l} \frac{d}{dt} \left[ \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} \xi_j(t) \right] + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} \dot{\xi}_j(t) \right] \right\}. \quad (5.35)$$

Ostatecznie równanie Lagrange'a 2-go rodzaju (5.29), opisujące strunę z ruchomym obciążeniem inercyjnym przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho A l \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\xi}_i(t) + m \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{j\pi v}{l} \frac{d}{dt} \left[ \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} \right] \xi_j(t) + m \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{j\pi v}{l} \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} \dot{\xi}_j(t) + \\ & + m \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} \right] \dot{\xi}_j(t) + m \sum_{i,j=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} \ddot{\xi}_j(t) + \frac{1}{2} N l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \xi_i(t) - \\ & - m \left[ v^2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{i j \pi^2}{l^2} \cos \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} \xi_j(t) + v \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{i\pi}{l} \cos \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} \dot{\xi}_j(t) \right] = P \sin \frac{i\pi vt}{l}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

gdzie

$$\frac{d}{dt} \left[ \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} \right] = \frac{i\pi v}{l} \cos \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} - \frac{j\pi v}{l} \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l}, \quad (5.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} \right] = \frac{i\pi v}{l} \cos \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} + \frac{j\pi v}{l} \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l}. \quad (5.38)$$

Jest to równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach z dwiema niewiadomymi. Ostatecznie równanie (5.36) możemy zapisać prościej

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}_i(t) + \frac{2m}{\rho A l} \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{\xi}_j(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} + \frac{4m}{\rho A l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j\pi v}{l} \dot{\xi}_j(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} \cos \frac{j\pi vt}{l} + \\ & + \frac{N}{\rho A} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \xi_i(t) - \frac{2m}{\rho A l} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 \pi^2 v^2}{l^2} \xi_j(t) \sin \frac{i\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} = \frac{2P}{\rho A l} \sin \frac{i\pi vt}{l}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Łatwo zauważyć, że równanie (5.39) ma bardzo podobną budowę do równania (5.6) z poprzedniego rozdziału. Oba różnią się tylko postacią prawych stron, a dokładnie

mnożnikiem  $2/l$ . Ostateczne rozwiązania przemieszczeń  $u(x, t)$  będą identyczne w obu przypadkach, ponieważ przemieszczenia (5.18) i (5.14) różnią się tylko tym mnożnikiem.

Oczywiście do rozwiązania (5.39) dojdziemy także traktując ruchome obciążenie w równaniu Lagrange'a (5.29) jako obciążenie zewnętrzne  $H_i(t)$

$$H_i(t) = \int_0^l q(x, t) \sin \frac{i\pi vt}{l} dx, \quad (5.40)$$

gdzie funkcja  $q(x, t)$  dana jest wzorem

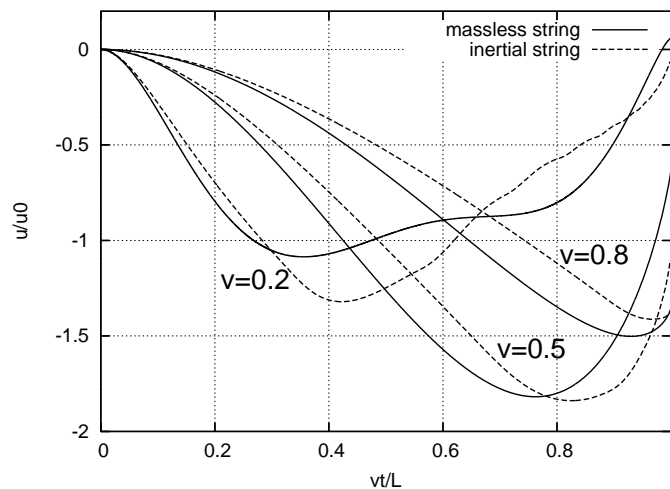
$$q(x, t) = \delta(x - vt) \left[ P - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right]. \quad (5.41)$$

Nie uwzględniamy wówczas, w zapisie energii kinetycznej i potencjalnej układu, ruchomej siły grawitacyjnej i bezwładnościowej.

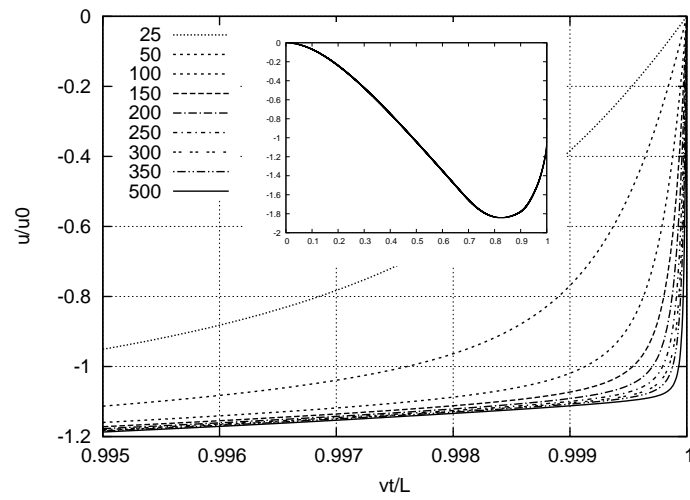
### 5.3. Nieciągłość rozwiązania struny masowej pod obciążeniem inercyjnym

W przypadku struny masowej również obserwujemy efekt nieciągłości trajektorii masy przy końcowej podporze. Z uwagi na konieczność numerycznego całkowania macierzowego układu równań w końcowej fazie rozwiązania, nie potrafimy przedstawić analitycznego dowodu tej nieciągłości, jak to przeprowadzono w rozdziale 3 w przypadku struny bezmasowej. Na Rys. 5.6 przedstawiono porównanie obu rozwiązań. Gdy stosunek  $m/\rho Al$  maleje, krzywe rozwiązań coraz bardziej się zbiegają.

Rys. 5.7 pokazuje zbieżność końcowej fazy trajektorii ruchomej masy przy prędkości  $v = 0,5$ , przy rosnącej liczbie wyrazów szeregu wynikowego. Przy rosnącej dokładności obliczeń rozwiązanie coraz bardziej przybliża się do rozwiązania nieciągłego. Nie obserwuje się przy tym pasożytniczych oscylacji w pobliżu punktu końcowego.



**Rysunek 5.6:** Porównanie trajektorii ruchu cząstki materialnej poruszającej się po strunie bezmasowej i masowej.



**Rysunek 5.7:** Zbieżność trajektorii ruchomej masy dla rosnącej ilości wyrazów szeregu wy-nikowego ( $v = 0,5$ ).

## Rozwiązania półanalityczne drgań belek

Analityczno–numeryczną metodę macierzową z rozdziału 4 zastosowano również z powodzeniem do belki Bernoulliego–Eulera oraz belki Timoshenki.

### 6.1. Belka Bernoulliego-Eulera pod działaniem ruchomego obciążenia inercyjnego

Napiszmy równanie różniczkowe ruchu belki Bernoulliego-Eulera (B-E) obciążonej m.in. ruchomą masą

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P - \delta(x - vt)m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2}. \quad (6.1)$$

Przyjmujemy warunki brzegowe

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (6.2)$$

oraz warunki początkowe

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (6.3)$$

Zgodnie z definicją sinusowej transformacji Fouriera w przedziale  $\langle 0; l \rangle$  piszemy

$$V(j, t) = \int_0^l u(x, t) \sin \frac{j\pi x}{l} dx, \quad (6.4)$$

gdzie

$$u(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{j=1}^{\infty} V(j, t) \sin \frac{j\pi x}{l}. \quad (6.5)$$

Na podstawie równania (6.5), w punkcie  $x = vt$  możemy wyznaczyć przyspieszenie

$$\frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} + \frac{2k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} - \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \right]. \quad (6.6)$$

Transformacja Fouriera równania (6.1) pozwala napisać

$$EI \frac{j^4 \pi^4}{l^4} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) = P \sin \frac{j\pi vt}{l} - m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \int_0^l \delta(x-vt) \sin \frac{j\pi x}{l} dx \quad (6.7)$$

i

$$\int_0^l \delta(x-vt) \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \sin \frac{j\pi vt}{l} . \quad (6.8)$$

Uwzględniając sumę (6.6) równanie (6.7) zapisujemy w następującej postaci

$$\begin{aligned} EI \frac{j^4 \pi^4}{l^4} V(j, t) + \rho A \ddot{V}(j, t) &= P \sin \frac{j\pi vt}{l} - \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} - \\ &- \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} + \\ &+ \frac{2m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \pi^2 v^2}{l^2} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \sin \frac{j\pi vt}{l} . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Po uporządkowaniu powyższego równania możemy uzyskać prostszą postać

$$\begin{aligned} \ddot{V}(j, t) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(k, t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \dot{V}(k, t) \cos \omega_k t \sin \omega_j t + \\ + \Omega^2 V(j, t) - \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 V(k, t) \sin \omega_k t \sin \omega_j t = \frac{P}{\rho A} \sin \omega_j t , \end{aligned} \quad (6.10)$$

gdzie

$$\omega_k = \frac{k\pi v}{l} , \quad \omega_j = \frac{j\pi v}{l} , \quad \Omega^2 = \frac{EI j^4 \pi^4}{\rho A l^4} , \quad \alpha = \frac{2m}{\rho A l} . \quad (6.11)$$

Również równania (6.10) nie potrafimy rozwiązać analitycznie. W dalszym etapie całkujemy je numerycznie. W tym celu zapisujemy końcowe równanie w postaci macierzowej

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{V}(1, t) \\ \ddot{V}(2, t) \\ \vdots \\ \ddot{V}(n, t) \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{V}(1, t) \\ \dot{V}(2, t) \\ \vdots \\ \dot{V}(n, t) \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} V(1, t) \\ V(2, t) \\ \vdots \\ V(n, t) \end{bmatrix} = \mathbf{P} , \quad (6.12)$$

lub w skrócie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{P} , \quad (6.13)$$

gdzie

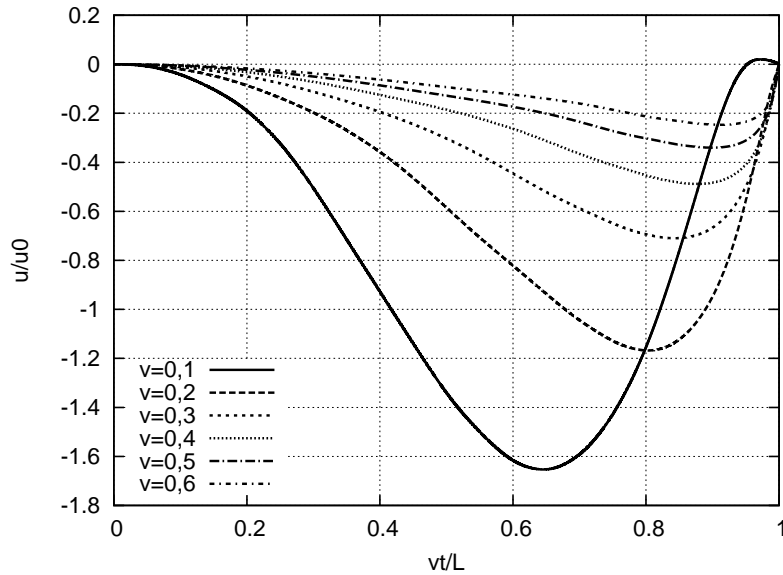
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix} , \quad (6.14)$$

$$\mathbf{C} = 2\alpha \begin{bmatrix} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1^4 \pi^4 EI}{l^4 \rho A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2^4 \pi^4 EI}{l^4 \rho A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n^4 \pi^4 EI}{l^4 \rho A} \end{bmatrix} - \quad (6.16)$$

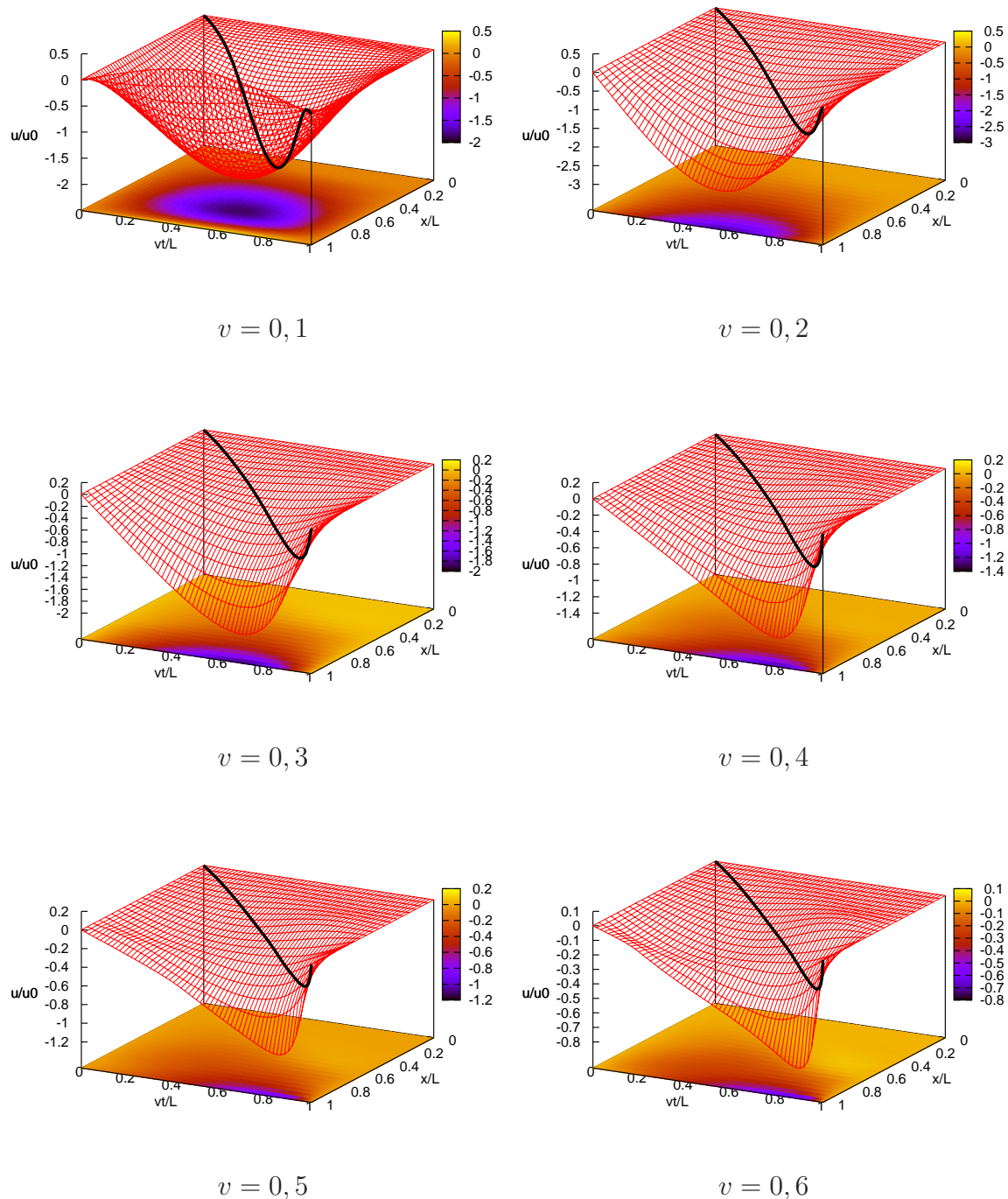
$$- \alpha \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2 \pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \frac{P}{\rho A} \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \\ \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$



**Rysunek 6.1:** Trajektorie ruchu masy poruszającej się po belce B-E przy różnych prędkościach  $v$ .





**Rysunek 6.2:** Symulacja drgań belki Bernoulliego–Eulera obciążonej inercyjnie, przy prędkości  $v_m=0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$  i  $0,6$ .

## 6.2. Belka Timoshenki pod działaniem ruchomej masy

Równanie ruchu belki Timoshenki pod działaniem ruchomego obciążenia przedstawia poniższy wzór

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho^2 k \frac{I}{G} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \\ = q(x, t) - k \frac{EI}{GA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + \rho k \frac{I}{GA} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

gdzie obciążenie zewnętrzne (siła + masa), czyli obciążenie grawitacyjne i bezwładnościowe opisane jest następującą zależnością:

$$q(x, t) = \delta(x - vt)P - \delta(x - vt)m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2}. \quad (6.19)$$

Druga pochodna (6.19) po  $x$  i  $t$

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} = \delta''(x - vt)P - \delta''(x - vt)m \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2}, \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = \delta''(x - vt)Pv^2 - \delta''(x - vt)mv^2 \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} + \\ + 2\delta'(x - vt)mv \frac{\partial^3 u(vt, t)}{\partial t^3} - \delta(x - vt)m \frac{\partial^4 u(vt, t)}{\partial t^4}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Na podstawie (6.6) obliczamy czwartą pochodną przemieszczeń po  $t$  w punkcie  $x = vt$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u(vt, t)}{\partial t^4} = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} + \frac{4k\pi v}{l} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} - \frac{6k^2\pi^2 v^2}{l^2} \ddot{V}(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} - \right. \\ \left. - \frac{4k^3\pi^3 v^3}{l^3} \dot{V}(k, t) \cos \frac{k\pi vt}{l} + \frac{k^4\pi^4 v^4}{l^4} V(k, t) \sin \frac{k\pi vt}{l} \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Podstawiając (6.20) i (6.21) do (6.18), i uporządkowaniu względem pochodnych otrzymujemy

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} - \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right) \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \left( \rho^2 k \frac{I}{G} + \delta(x - vt)\rho km \frac{I}{GA} \right) \frac{\partial^4 u(vt, t)}{\partial t^4} - \\ - \delta'(x - vt)\rho kmv \frac{2I}{GA} \frac{\partial^3 u(vt, t)}{\partial t^3} + \left( \rho A + \delta(x - vt)m - \delta''(x - vt)km \frac{EI}{GA} + \right. \\ \left. + \delta''(x - vt)\rho kmv^2 \frac{I}{GA} \right) \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P - \delta''(x - vt)Pk \frac{EI}{GA} + \\ + \delta''(x - vt)P\rho kv^2 \frac{I}{GA}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Dokonujemy transformaty Fouriera (6.4) równania (6.23)

$$\begin{aligned}
& EI \frac{j^4 \pi^4}{l^4} V(j, t) + \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \left( \rho I + \rho k \frac{EI}{G} \right) \ddot{V}(j, t) + \rho^2 k \frac{I}{G} \ddot{\ddot{V}}(j, t) + \rho k m \frac{I}{GA} \sin \frac{j \pi v t}{l} \frac{\partial^4 u(vt, t)}{\partial t^4} + \\
& + \rho k m v \frac{2I}{GA} \frac{j \pi}{l} \cos \frac{j \pi v t}{l} \frac{\partial^3 u(vt, t)}{\partial t^3} + \rho A \ddot{V}(j, t) + \left( m \sin \frac{j \pi v t}{l} + k m \frac{EI}{GA} \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{j \pi v t}{l} - \right. \\
& - \left. \rho k m v^2 \frac{I}{GA} \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{j \pi v t}{l} \right) \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} = P \sin \frac{j \pi v t}{l} + P k \frac{EI}{GA} \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{j \pi v t}{l} - \\
& - P \rho k v^2 \frac{I}{GA} \frac{j^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{j \pi v t}{l} ,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

gdzie

$$\int_0^l \delta^{(n)}(x - \xi) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(\xi) . \tag{6.25}$$

Uwzględniając (6.6) i (6.22) równanie (6.24) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\ddot{V}}(j, t) + \beta \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\ddot{V}}(k, t) \sin \omega_k t + 2\beta \omega_j \cos \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\ddot{V}}(k, t) \sin \omega_k t + \\
& + 4\beta \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\ddot{V}}(k, t) \cos \omega_k t + \frac{A}{I} c_1^2 \ddot{\ddot{V}}(j, t) + \gamma^2 (c_1^2 + c_2^2) \ddot{\ddot{V}}(j, t) + \\
& + \left( \frac{A\beta}{I} c_1^2 + \beta c_2^2 \gamma^2 - \beta \omega_j^2 \right) \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\ddot{V}}(k, t) \sin \omega_k t + 6\beta \omega_j \cos \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \ddot{\ddot{V}}(k, t) \cos \omega_k t - \\
& - 6\beta \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \ddot{\ddot{V}}(k, t) \sin \omega_k t + 2 \left( \frac{A\beta}{I} c_1^2 + \beta c_2^2 \gamma^2 - \beta \omega_j^2 \right) \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \dot{\ddot{V}}(k, t) \cos \omega_k t - \\
& - 6\beta \omega_j \cos \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \dot{\ddot{V}}(k, t) \sin \omega_k t - 4\beta \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^3 \dot{\ddot{V}}(k, t) \cos \omega_k t + \gamma^4 c_1^2 c_2^2 V(j, t) - \\
& - \left( \frac{A\beta}{I} c_1^2 + \beta c_2^2 \gamma^2 - \beta \omega_j^2 \right) \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 V(k, t) \sin \omega_k t - 2\beta \omega_j \cos \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^3 V(k, t) \cos \omega_k t + \\
& + \beta \sin \omega_j t \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^4 V(k, t) \sin \omega_k t = \frac{P}{\rho I} c_1^2 \sin \omega_j t + \frac{P}{\rho A} c_2^2 \gamma^2 \sin \omega_j t - \frac{P}{\rho A} \omega_j^2 \sin \omega_j t ,
\end{aligned} \tag{6.26}$$

gdzie

$$\gamma = \frac{j \pi}{l} , \quad c_1 = \sqrt{\frac{G}{k \rho}} , \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} , \quad \beta = \frac{2m}{\rho A l} , \quad \omega_k = \frac{k \pi v}{l} , \quad \omega_j = \frac{j \pi v}{l} . \tag{6.27}$$

$c_1$  i  $c_2$  są odpowiednio prędkościami fali ścinania i fali giętej w belce Timoshenki. Równanie (6.26) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach, którego nie potrafimy rozwiązać analitycznie, dlatego dalsze obliczenia kontynuujemy numerycznie metodą Rungego–Kutty czwartego rzędu. Równanie (6.26) w skrócie możemy zapisać następująco

$$\mathbf{\Gamma \ddot{\ddot{V}}} + \mathbf{U \dot{\ddot{V}}} + \mathbf{M \ddot{\ddot{V}}} + \mathbf{C \dot{\ddot{V}}} + \mathbf{K V} = \mathbf{P} , \tag{6.28}$$

$$\ddot{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{U}}\dot{\mathbf{V}} - \hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{V}} - \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{V}} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{V}, \quad (6.29)$$

gdzie

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{n\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{U} = 2\beta \begin{bmatrix} \frac{1\pi v}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{1\pi v}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{1\pi v}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{2\pi v}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{2\pi v}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n\pi v}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{n\pi v}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix} + \quad (6.31)$$

$$+ 4\beta \begin{bmatrix} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \frac{A}{I} c_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + (c_1^2 + c_2^2) \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{l^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2^2 \pi^2}{l^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \end{bmatrix} + \quad (6.32)$$

$$+ \frac{A\beta}{I} c_1^2 \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix} +$$

$$+ (\beta c_2^2 - \beta v^2) \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix} +$$

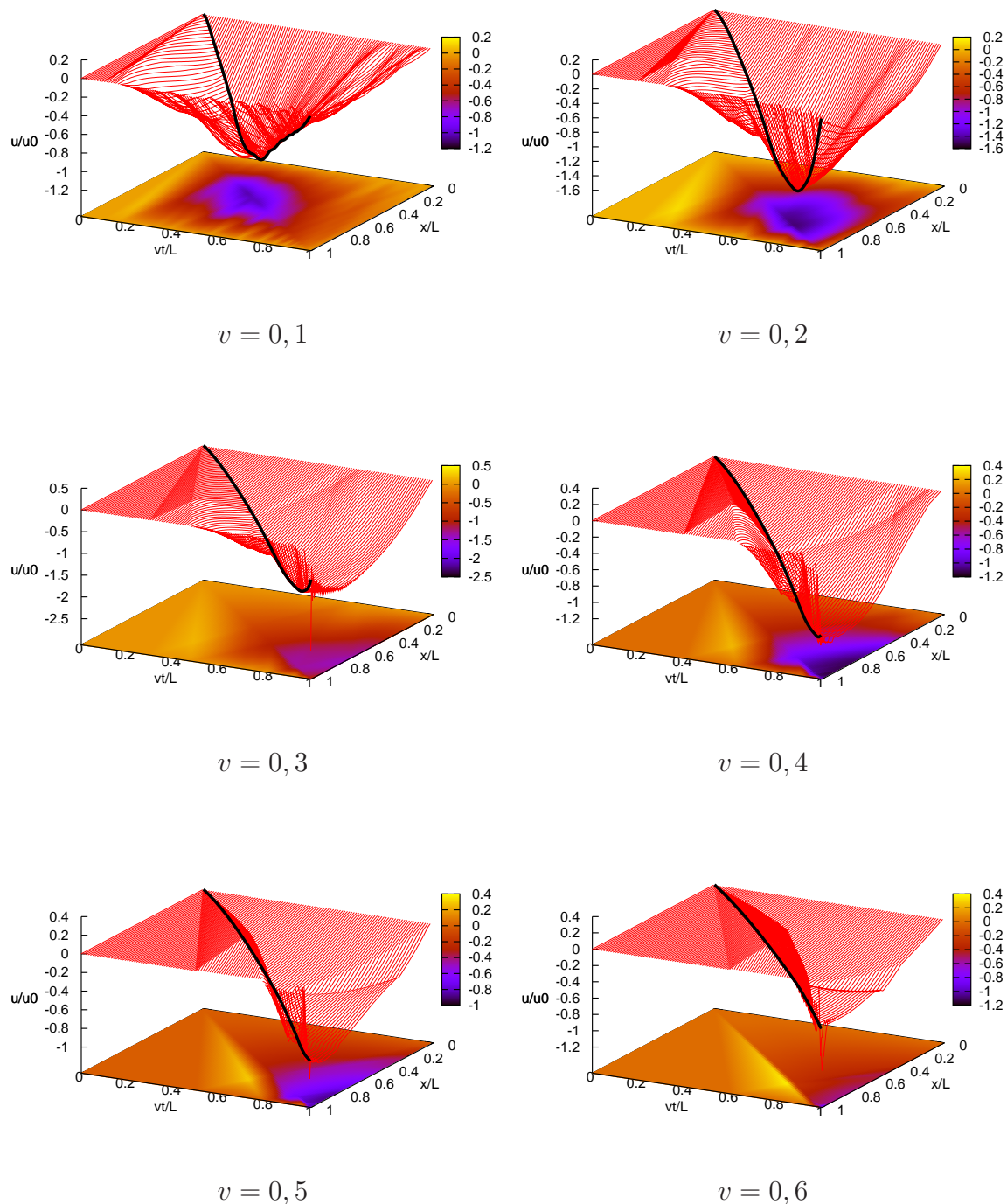
$$+ 6\beta v^2 \begin{bmatrix} \frac{1\pi}{l} \frac{1\pi}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{1\pi}{l} \frac{2\pi}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{1\pi}{l} \frac{n\pi}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{2\pi}{l} \frac{1\pi}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi}{l} \frac{2\pi}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{2\pi}{l} \frac{n\pi}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n\pi}{l} \frac{1\pi}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{n\pi}{l} \frac{2\pi}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n\pi}{l} \frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix} -$$

$$- 6\beta v^2 \begin{bmatrix} \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \cdots & \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} = & \frac{2A\beta}{I}c_1^2 \begin{bmatrix} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix} + \\
& + 2(\beta c_2^2 - \beta v^2) \begin{bmatrix} \frac{1^2\pi^2}{l^2} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{1^2\pi^2}{l^2} \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{2^2\pi^2}{l^2} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{2^2\pi^2}{l^2} \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{1\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{1\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2}{l^2} \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \cos \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \tag{6.33}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = c_1^2 c_2^2 \begin{bmatrix} \frac{1^4\pi^4}{l^4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2^4\pi^4}{l^4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{n^4\pi^4}{l^4} \end{bmatrix} - \tag{6.34}$$

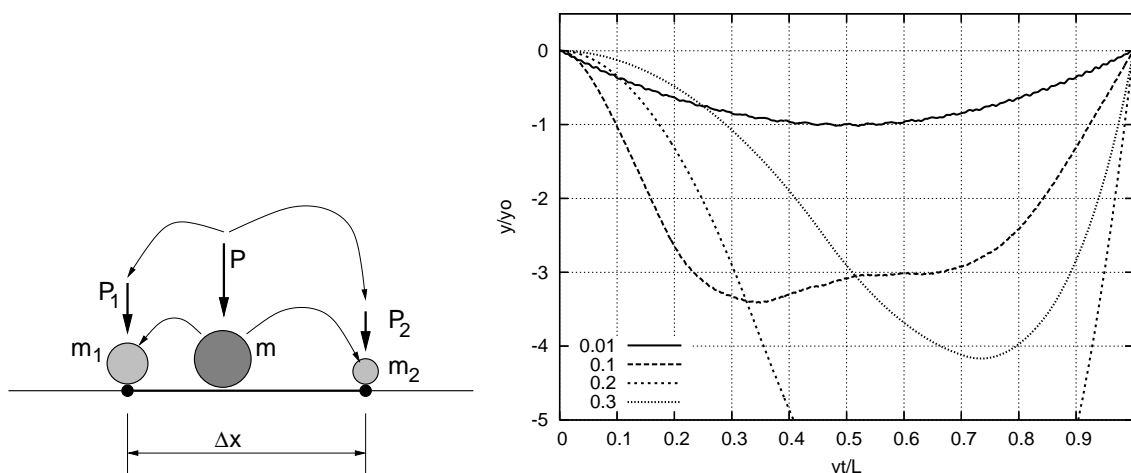
$$\begin{aligned}
& - \beta c_1^2 c_2^2 \begin{bmatrix} \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{1\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{2\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{1\pi vt}{l} & \frac{2^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{2\pi vt}{l} & \dots & \frac{n^2\pi^2 v^2}{l^2} \sin \frac{n\pi vt}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{P} = & \frac{P}{EI} c_1^2 c_2^2 \begin{bmatrix} \sin \frac{1\pi vt}{l} \\ \sin \frac{2\pi vt}{l} \\ \vdots \\ \sin \frac{n\pi vt}{l} \end{bmatrix}. \tag{6.35}
\end{aligned}$$



**Rysunek 6.3:** Symulacja drgań belki Timoshenki obciążonej inercyjnie, przy prędkości  $v_m=0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$  i  $0,6$ .

## Metoda elementów czasoprzestrzennych (wariant prędkościowy)

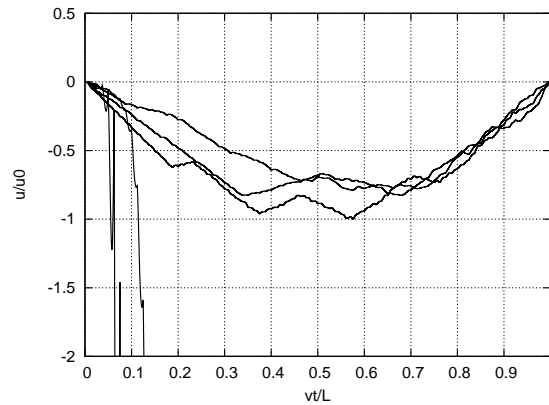
W rozdziale tym zajmiemy się numerycznym podejściem do problemu ruchomej masy, wykorzystując prędkościową metodę elementów czasoprzestrzennych. Klasyczna metoda elementów skończonych, mimo swoich niezaprzeczalnych zalet, wynikających głównie z możliwości doboru najskuteczniejszych narzędzi do całkowania równań ruchu w czasie, wykorzystuje dwuetapową aproksymację: oddzielnie względem zmiennej przestrzennej i oddzielnie względem czasu. Mimo intensywnych prac, nie udało się jej wykorzystać do rozwiązywania problemów ruchomej masy, poruszającej się z dużymi prędkościami. Bezpośrednia modyfikacja macierzy bezwładności (Rys. 7.1) nie przynosi zadowalających rezultatów. Także próba podjęta przez Filho [20], uwzględniająca



**Rysunek 7.1:** Metoda polegająca na prostej modyfikacji globalnej macierzy bezwładności.

dodatkowy wpływ przyspieszenia Coriolisa oraz przyspieszenia odśrodkowego, wykorzystująca klasyczną metodę elementów skończonych, jest błędna (Rys. 7.2).

Zasadniczym elementem różniącym metodę elementów czasoprzestrzennych od klasycznych podejść do rozwiązania problemu początkowo-brzegowego jest sposób dyskretyzacji różniczkowego równania ruchu. W prezentowanej metodzie dyskretyzujemy rozpatrywane równanie jednocześnie względem zmiennych przestrzennych oraz czasu. Mo-



**Rysunek 7.2:** Klasyczna metoda Filho zastosowana do struny.

zemy zatem postulować równowagę pewnych wielkości fizycznych, np. energii, w przedziale czasu, a nie jedynie w wybranych chwilach. Rozwiązanie problemu sprowadza się do numerycznego rozwiązania układu równań. Takie podejście zakłada ciągły rozkład charakterystycznych funkcji prędkości w całym obszarze czasoprzestrzennym  $\Omega$ , w którym konstrukcja jest rozpatrywana. Metoda elementów czasoprzestrzennych jest uogólnieniem metody elementów skończonych.

## 7.1. Dyskretyzacja struny metodą elementów czasoprzestrzennych

Wykorzystamy tu prędkościowy wariant metody do dyskretyzacji struny. Rozpatrzmy równanie ruchu struny w zbiorze czasoprzestrzennym  $\Omega = \{(x, t): 0 \leq x \leq b, 0 \leq t \leq h\}$ . Równanie mocy wirtualnej otrzymujemy mnożąc równanie ruchu przez prędkość wirtualną  $v^*(x, t)$ . Całkując całość zarówno względem czasu jak i przestrzeni otrzymujemy równanie pracy wirtualnej. Całkowitą pracę wirtualną w zbiorze  $\Omega$  przedstawia wzór

$$\int_0^h \int_0^b v^*(x, t) \left( \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = 0, \quad (7.1)$$

gdzie  $\eta$  jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego. W wyniku całkowania przez części względem  $x$  otrzymujemy

$$\rho A \iint_{\Omega} v^* \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + N \iint_{\Omega} \frac{\partial v^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial v^*}{\partial x} \varepsilon_0 d\Omega - \eta \iint_{\Omega} v^* v d\Omega = 0. \quad (7.2)$$

Przyjmujemy liniowy rozkład prędkości  $v = \partial u / \partial t$  w przestrzeni  $x$  i w czasie  $t$ :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, t) v_i. \quad (7.3)$$

W przestrzeni  $\Omega$  macierzowa funkcja kształtu  $\mathbf{N} = [N_1, \dots, N_4]$  ma następującą formę

$$\mathbf{N} = \left[ \frac{1}{bh}(x-b)(t-h), -\frac{1}{bh}x(t-h), -\frac{1}{bh}(x-b)t, \frac{1}{bh}xt \right]. \quad (7.4)$$



Przemieszczenia obliczamy całkując prędkości (7.3) i pamiętając o przemieszczeniach początkowych  $u(x, 0)$

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t (N_1 v_1 + \dots + N_4 v_4) dt = u(x, 0) + \int_0^t \mathbf{N}^* \mathbf{v} dt . \quad (7.5)$$

Ostatecznie otrzymujemy przemieszczenia zapisane za pomocą prędkości węzłowych

$$u(x, t) = u(x, 0) + \frac{xt^2}{2bh}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \frac{xt}{b}(-v_1 + v_2) + \frac{t^2}{2h}(-v_1 + v_3) + v_1 t , \quad (7.6)$$

oraz ich pochodną względem zmiennej przestrzennej  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t^2}{2bh}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \frac{t}{b}(-v_1 + v_2) + \frac{du}{dx}|_{t=0} . \quad (7.7)$$

Właściwy dobór funkcji wirtualnych  $v^*$  ma podstawowe znaczenie w metodzie elementów czasoprzestrzennych. Różne funkcje wirtualne zastosowane w obliczeniach, w wyniku dają lepsze lub gorsze poziomy zbieżności i stabilności. W tym przypadku zastosowano kapeluszną funkcję prędkości wirtualnych, o stałej wartości w czasie

$$v^*(x, t) = \left(1 - \frac{x}{b}\right)v_3 + \frac{x}{b}v_4 . \quad (7.8)$$

Wymagane pochodne funkcji wirtualnej  $v^*$  oraz rzeczywistej funkcji  $v$ , na podstawie (7.8) i (7.3) zostały przedstawione poniżej:

$$\frac{\partial v^*}{\partial x} = \frac{1}{b}(-v_3 + v_4) , \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{x}{bh}(v_1 - v_2 - v_3 + v_4) + \frac{1}{h}(-v_1 + v_3) . \quad (7.10)$$

Ostatecznie równanie (7.2) może zostać zapisane w macierzowej postaci

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^h \int_0^b \left[ -\left(\frac{x}{b} - 1\right) \right] \left[ \frac{x}{bh} - \frac{1}{h}, -\frac{x}{bh}, -\frac{x}{bh} + \frac{1}{h}, \frac{x}{bh} \right] dx dt + \\ & + N \int_0^h \int_0^b \left[ -\frac{1}{b} \right] \left[ \frac{t^2}{2bh} - \frac{t}{b}, -\frac{t^2}{2bh} + \frac{t}{b}, -\frac{t^2}{2bh}, \frac{t^2}{2bh} \right] dx dt - \\ & - \eta \int_0^h \int_0^b \left[ -\left(\frac{x}{b} - 1\right) \right] \left[ \frac{(x-b)(t-h)}{bh}, -\frac{x(t-h)}{bh}, -\frac{(x-b)t}{bh}, \frac{xt}{bh} \right] dx dt = 0 . \end{aligned} \quad (7.11)$$

Na podstawie macierzowego równania (7.11) otrzymujemy trzy wynikowe macierze dotyczące struny

$$\mathbf{M} = \frac{\rho b}{h} \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = \rho b [-\mathbf{M}_s \mid \mathbf{M}_s] , \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{Nh}{b} \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right] = \\ &= \frac{Nh^2}{b} \left[ \frac{1}{3} \mathbf{K}_s \mid \frac{1}{6} \mathbf{K}_s \right] , \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{C} = \eta b \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right] = \eta b \left[ \frac{1}{2} \mathbf{C}_s \mid \frac{1}{2} \mathbf{C}_s \right] . \quad (7.14)$$

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ , i  $\mathbf{C}$  są czasoprzestrzennymi macierzami bezwładności, sztywności i wiskotycznego tłumienia. Możemy zaobserwować, że każda z macierzy zbudowana jest z dwóch macierzy kwadratowych, których wymiar równa się liczbie stopni swobody w przestrzennym elemencie skończonym. Macierze  $\mathbf{M}_s$ ,  $\mathbf{K}_s$  i  $\mathbf{C}_s$  mają podobne formy do macierzy otrzymanych tradycyjnie w klasycznej metodzie elementów skończonych. Najczęściej różnią się jedynie odpowiednimi mnożnikami. Ostateczną formę zdyskretyzowanego równania ruchu, zakładającego równowagę sił na brzegach elementu w zbiorze  $\Omega$ , przedstawiono w postaci macierzowej

$$(\mathbf{M} + \mathbf{C} + \mathbf{K}) \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_{i+1} \end{Bmatrix} + \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \text{lub} \quad \mathbf{K}^* \mathbf{v} + \mathbf{e} = \mathbf{0} . \quad (7.15)$$

Wektor  $\mathbf{v}$  zawiera zarówno prędkości węzłowe  $\mathbf{v}_i$  w początkowym czasie  $t = t_i$  jak i  $\mathbf{v}_{i+1}$  w końcowym czasie  $t = t_i + h$  rozpatrywanego przedziału czasu.  $h$  jest założonym krokiem czasowym. Wektor prędkości  $\mathbf{v}_{i+1}$  jest jedynym nieznanym wektorem w powyższym równaniu, obliczanym krok po kroku. Ostatecznie musimy obliczyć przemieszczenia  $\mathbf{q}_{i+1}$ . W tym celu używamy następującej formuły

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h[\beta \mathbf{v}_i + (1 - \beta) \mathbf{v}_{i+1}] . \quad (7.16)$$

Stabilne rozwiązania uzyskujemy przy  $\beta \in < 0.5; 1.0 >$ .

## 7.2. Elementy odpowiedzialne za ruchomą masę w przypadku struny

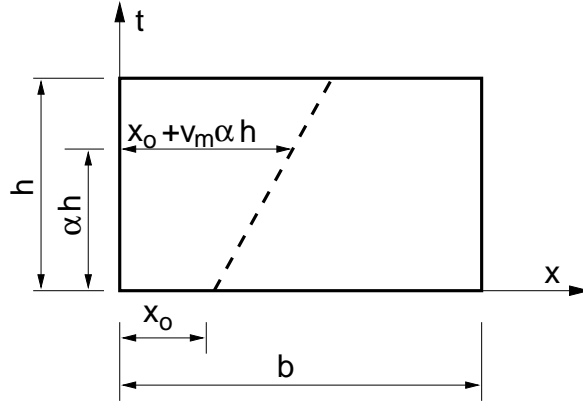
Ostatni człon  $\delta(x - v_m t) m \partial^2 u(v_m t, t) / \partial t^2$  równania ruchu (5.1) opisuje ruchomą siłę bezwładnościową. Wyrażenie  $\partial^2 u(v_m t, t) / \partial t^2$  jest przyspieszeniem ruchomej masy i jednocześnie przyspieszeniem punktu struny, w którym ta masa się znajduje ( $x = x_0 + v_m t$ ). Zgodnie ze wzorem Renaudota przyspieszenie ruchomej masy poruszającej się ze stałą prędkością  $v_m$ , zgodnie z zasadami różniczkowania funkcji złożonej, składa się z trzech następujących członów:

$$\frac{\partial^2 u(v_m t, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=v_m t} + 2v_m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Big|_{x=v_m t} + v_m^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=v_m t} . \quad (7.17)$$

We wzorze tym możemy zauważyć przyspieszenie poprzeczne, przyspieszenie Coriolisa oraz przyspieszenie odśrodkowe. W przypadku struny zachodzi potrzeba zapisu przyspieszenia ruchomej masy  $\frac{\partial^2 u(v_m t, t)}{\partial t^2}$  za pomocą prędkości

$$\frac{\partial^2 u(v_m t, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=v_m t} + v_m \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=v_m t} + v_m \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=v_m t} + \frac{du_0}{dx} \right] . \quad (7.18)$$

Po przemnożeniu równania (7.18) przez wartość masy  $m$  pierwszy składnik reprezentuje bezwładność, a drugi i trzeci człon podobne są do tłumienia i sztywności. Ostatni człon z kolei odpowiada za siły węzłowe w chwili początkowej przedziału czasu.



**Rysunek 7.3:** Trajektoria ruchu masy w czasoprzestrzeni.

W celu dyskretyzacji członu zawierającego ruchomą masę, stosujemy te same co w przypadku struny matematyczne podejście, polegające na budowie równania pracy wirtualnej

$$\int_0^h \int_0^b \mathbf{N}^* m \delta(x - x_0 - v_m t) \frac{\partial^2 u(x_0 + v_m t, t)}{\partial t^2} dx dt . \quad (7.19)$$

Na początek zajmiemy się pierwszym członem równania (7.18). Przyjmiemy tę samą liniową funkcję interpolującą (7.3) i (7.4) oraz prędkość wirtualną

$$v^*(x) = \mathbf{N}^* \dot{\mathbf{q}}_p = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_p . \quad (7.20)$$

Konsekwentne całkowanie prowadzi do otrzymania macierzy bezwładności ruchomej masy  $M_m$

$$\mathbf{M}_m = \frac{m}{h} \begin{bmatrix} -(1 - \kappa)^2 & -\kappa(1 - \kappa) & (1 - \kappa)^2 & \kappa(1 - \kappa) \\ -\kappa(1 - \kappa) & -\kappa^2 & \kappa(1 - \kappa) & \kappa^2 \end{bmatrix} , \quad (7.21)$$

gdzie  $\kappa = (x_0 + 0.5v_m h)/b$ .  $x_0$  jest początkową pozycją masy w elemencie czasoprzestrzennym (przy  $t = t_0$ ) (Rys. 7.3). Macierz tłumienia ruchomej masy  $\mathbf{C}_m$  przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{C}_m = \frac{mv}{b} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \kappa) & \frac{1}{2}(1 - \kappa) & -\frac{1}{2}(1 - \kappa) & \frac{1}{2}(1 - \kappa) \\ -\frac{1}{2}\kappa & \frac{1}{2}\kappa & -\frac{1}{2}\kappa & \frac{1}{2}\kappa \end{bmatrix} . \quad (7.22)$$

Zajmijmy się teraz wpływem przemieszczeń  $u(x, t)$  i przemieszczeń początkowych  $u(x, 0)$  na wynikowe macierze opisujące ruchomą masę. W wyniku całkowania przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_m \int_0^h \int_0^b \delta(x - x_0 - v_m t) \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=v_m t} + \frac{du_0}{dx} \right] v^*(x) dx dt = \\ = -v_m^2 \int_0^h \int_0^b \delta'(x - x_0 - v_m t) \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=v_m t} + \frac{du_0}{dx} \right] v^*(x) dx dt . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Macierz  $K_m$  jest macierzą sztywności ruchomej masy

$$\mathbf{K}_m = \frac{mhv_m^2}{6b^2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right]. \quad (7.24)$$

Z uwagi na liniową funkcję kształtu przy  $t = 0$  przemieszczenia początkowe zapisujemy w postaci

$$u_0 = \left(1 - \frac{x}{b}\right) u_3 + \frac{x}{b} u_4, \quad (7.25)$$

a ich pochodną jako

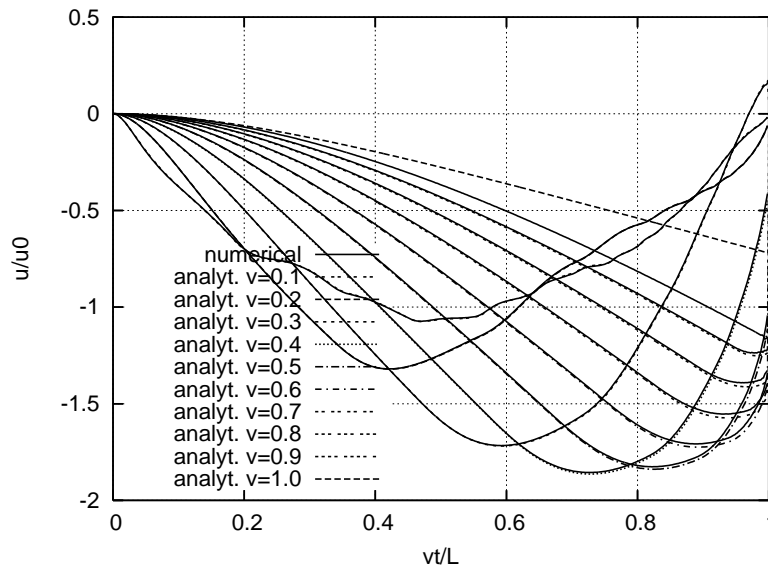
$$\frac{du_0}{dx} = -\frac{1}{b} u_3 + \frac{1}{b} u_4. \quad (7.26)$$

Ostatnim składnikiem odpowiedzialnym za opis ruchomej masy są siły węzłowe  $\mathbf{e}_m$

$$\mathbf{e}_m = \frac{mv_m^2}{b^2} \left[ \begin{array}{c} u_L - u_P \\ -u_L + u_P \end{array} \right]. \quad (7.27)$$

Komplet trzech macierzy  $\mathbf{M}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$  i  $\mathbf{K}_m$  oraz wektor sił węzłowych  $\mathbf{e}_m$  stanowią pełny opis wpływu ruchomej siły bezwładnościowej w metodzie elementów czasoprzestrzennych. Są one zapisane w prędkościach [7].

Przeprowadzono obliczenia drgań struny z poruszającą się masą  $m$ . Uzyskane wyniki przy różnej prędkości z przedziału  $0 < v \leq 1,0c$  porównano z wynikami metody półanalitycznej i przedstawiono na Rys. 7.4. Przedstawione na wykresie krzywe niemal pokrywają się z wynikami obliczeń półanalitycznych. Należy zaznaczyć, że zbieżność zachodzi także przy dużych prędkościach  $v > 0,8c$ .



**Rysunek 7.4:** Trajektorie ruchu masy przy różnej prędkości  $v$ , uzyskane numerycznie z zastosowaniem kapeluszkowych funkcji wirtualnych.

### 7.3. Elementy opisujące ruchomą masę w belce Bernoulliego–Eulera

Dyskretny element belki, zarówno w klasycznej metodzie elementów skończonych, jak i metodzie elementów czasoprzestrzennych jest dużo bardziej złożony niż element struny. Wynika to choćby z dwukrotnie większej liczby stopni swobody elementu belki. Pamiętajmy, że kapeluszowa funkcja wirtualna jest stała w czasie i w przypadku belki Bernoulliego–Eulera (B-E) zapisuje się ją w następujący sposób

$$v_m^*(x, t) = \left(1 - 3\frac{x^2}{b^2} + 2\frac{x^3}{b^3}\right) v_3 + \dots \dot{\varphi}_3 + \dots v_4 + \dots \dot{\varphi}_4 . \quad (7.28)$$

Rozpoznajemy tu użycie funkcji kształtu do opis przemieszczeń (lub prędkości) za pomocą zarówno węzłowych prędkości liniowych oraz węzłowych prędkości obrotowych. Poniżej przedstawiono obliczenia prowadzące do wyznaczenia pierwszego elementu macierzy bezwładności ruchomej masy  $M_m$  dla belki B-E:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_m)_{11} &= -\frac{m}{h} \int_0^h \int_0^b \delta(x - x_0 - vt) \left(1 - 3\frac{x^2}{b^2} + 2\frac{x^3}{b^3}\right)^2 dx dt = \\ &= -\frac{m}{h} \int_0^h \int_0^b \left[1 - 3\frac{(x_0 + vt)^2}{b^2} + 2\frac{(x_0 + vt)^3}{b^3}\right]^2 dx dt . \end{aligned} \quad (7.29)$$

Wprowadzamy podstawienie

$$s = \frac{x_0 + vt}{b} \quad \text{i} \quad ds = \frac{v}{b} dt , \quad (7.30)$$

$$(\mathbf{M}_m)_{11} = -\frac{m}{h} \int_0^h (1 - 3s^2 + 2s^3)^2 ds = -\frac{m b}{h v} \left(\frac{4}{7}s^7 - 2s^6 + \frac{9}{5}s^5 + s^4 - 2s^3 + s\right) \Big|_0^h . \quad (7.31)$$

Po scałkowaniu powracamy do zmiennej  $t$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_m)_{11} &= -\frac{m b}{h v} \left[ \frac{4}{7} \left(\frac{x_0 + vt}{b}\right)^7 - 2 \left(\frac{x_0 + vt}{b}\right)^6 + \frac{9}{5} \left(\frac{x_0 + vt}{b}\right)^5 + \left(\frac{x_0 + vt}{b}\right)^4 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{x_0 + vt}{b}\right)^3 + \frac{x_0 + vt}{b} \right] \Big|_0^h . \end{aligned} \quad (7.32)$$

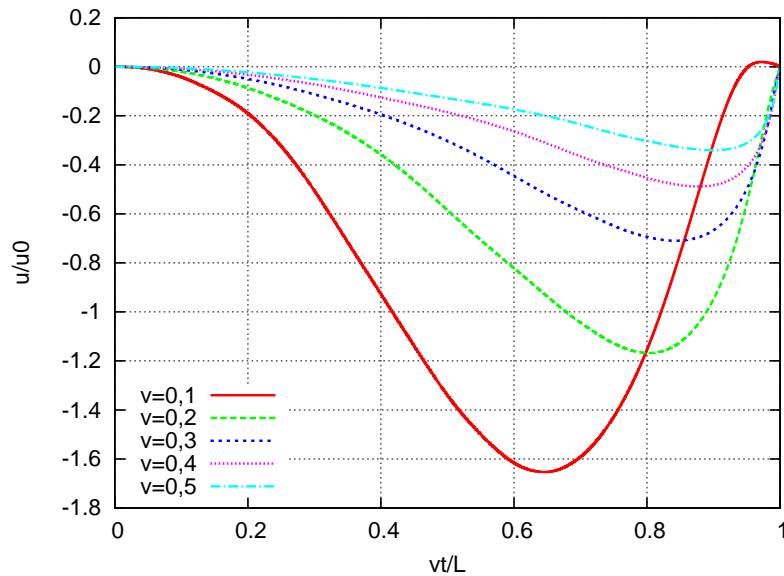
Uwzględniając granice całkowania, otrzymujemy jeden z elementów macierzy bezwładności ruchomej masy  $M_m$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_m)_{11} &= -\frac{m}{560b^6} \left[ 560b^6 (4\kappa^6 - 12\kappa^5 + 9\kappa^4 + 4\kappa^3 - 6\kappa^2 + 1) + 280b^4 v^2 h^2 (10\kappa^4 - \right. \\ &\quad \left. - 20\kappa^3 + 9\kappa^2 + 2\kappa - 1) + 21b^2 v^4 h^4 (20\kappa^2 - 20\kappa + 3) + 5v^6 h^6 \right] , \end{aligned} \quad (7.33)$$

gdzie

$$\kappa = \frac{x_0 + v h / 2}{b} . \quad (7.34)$$

Postać macierzy  $\mathbf{M}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$  i  $\mathbf{K}_m$  odpowiedzialnych za opis ruchomej masy zostały zamieszczone w dodatku do pracy. Musimy pamiętać, że trzy pierwsze macierze łączą wektory prędkości w dwóch następujących po sobie chwilach. Składają się one z dwóch kwadratowych podmacierzy: lewej i prawej. Mają one wymiar  $s \times 2s$ , gdzie  $s$  jest liczbą stopni swobody w węźle badanej struktury. Macierz  $E_m$  ma wymiar  $s \times s$ . Wszystkie macierze przedstawione w dodatku dotyczą masy  $m = 1$ , więc muszą być mnożone przez rzeczywistą masę  $m$ . Wprowadzono również oznaczenia  $\xi = vh/b$  i  $\kappa$  dane wzorem (7.34). Otrzymane rozwiązania numeryczne (Rys. 7.5) są identyczne z wynikami podejścia półanalitycznego z rozdziału 4 (Rys. 6.1).



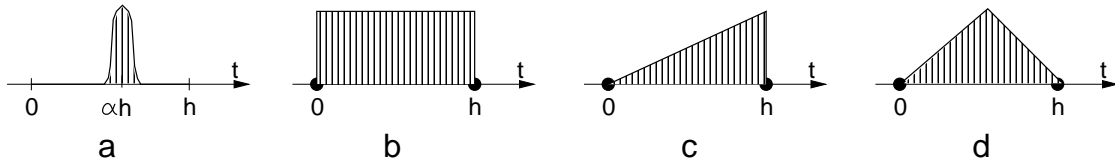
**Rysunek 7.5:** Trajektorie ruchu masy poruszającej się po belce B-E przy różnych prędkościach  $v$ , uzyskane numerycznie z zastosowaniem kapeluszowych funkcji wirtualnych.

## 7.4. O rozwiązaniu belki Timoshenki

Różniczkowe równanie ruchu belki Timoshenki w przypadku jednorównaniowym (2.26) ma bardzo poważną wadę, ze względu na numeryczne podejście metodą czasoprzezienną. Wadą tą jest czwarta pochodna względem czasu  $t$ . Ponieważ czas w rzeczywistej funkcji kształtu ma rozkład liniowy, nie mamy możliwości dyskretnego przedstawienia tej pochodnej. Konieczne jest przeprowadzenie analizy belki Timoshenki w przypadku, gdy równanie ruchu przedstawione jest w postaci dwóch równań sprzężonych ze sobą względem przemieszczeń i kątów. Zagadnienie ruchomego obciążenia bezwładnościowego poruszającego się po belce Timoshenki jest problemem samym w sobie. Ze względu na swą złożoność nie zostanie przedstawiony w niniejszej pracy.

## 7.5. Przykłady funkcji wirtualnych

Właściwy dobór wirtualnej funkcji  $v^*$  jest podstawowym zadaniem metody elementów czasoprzestrzennych. Każda z prezentowanych na rys. 7.6 funkcji ma różny kształt, a przez to inne własności. W pierwszym przypadku zachodzi równowaga punktowa, w kolejnych trzech mamy do czynienia z równowagą globalną, dla pewnego zakresu charakterystycznego parametru. Aby porównać przedstawione funkcje wirtualne, po-



**Rysunek 7.6:** Funkcje wirtualne: a - delta Diraca, b - kapeluszowa, c - trójkątna, d - daszkowa.

damy wyprowadzone przy ich udziale macierze bezwładności i sztywności drgającego osiowo pręta. Na koniec oszacujemy błąd metody numerycznej w przypadku równowagi punktowej. Wykorzystamy zapis przejścia do następnego kroku w formie macierzy przeniesienia (wzmocnienia)  $\mathbf{T}$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{i+1} \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{q}_{i-1} \end{Bmatrix}. \quad (7.35)$$

Powyższy schemat dotyczy zadania drgań swobodnych, nietłumionych. Macierz  $\mathbf{T}$  ma wymiar  $2 \times 2$ .  $\mathbf{v}$  jest prędkością, a  $\mathbf{q}$  przemieszczeniem. W dalszej części zastanowimy się nad możliwością zastosowania innych kształtów funkcji wirtualnych. Rozpatrzmy dwa zadania składowe: ruch przy zerowej prędkości początkowej oraz ruch przy zerowym przemieszczeniu początkowym na kroku. Z tych dwóch przypadków możemy złożyć przypadek dowolnego kroku, przy dowolnych warunkach początkowych. Czynimy tak, gdyż wówczas jeden z dwóch komponentów wektora z prawej strony ma wartość zero i badamy jedynie dwa elementy macierzy przeniesienia. Rozwinimy elementy tej macierzy w szereg Taylora. Będziemy mogli z tym rozwinięciem porównać rozwinięcia funkcji sinus i cosinus.

### Pseudofunkcja Diraca

Zajmijmy się prostą formą dystrybucji  $\delta$  (rys. 7.6a). Wirtualna funkcja kształtu przyjmuje wtedy następującą postać

$$v^*(x, t) = \delta(t - \alpha h) \left[ \left(1 - \frac{x}{b}\right)v_3 + \frac{x}{b}v_4 \right]. \quad (7.36)$$

Z podstaw całkowania dystrybucji wiadomo, że całka z iloczynu funkcji i delty Diraca równa jest wartości rozpatrywanej funkcji w punkcie wyznaczonym przez tą deltę. W rozpatrywanym przez nas przypadku całkowanie w czasie polega na zamianie  $t$  na  $\alpha h$ . Na podstawie rzeczywistej, liniowej funkcji kształtu (7.3) oraz powyższej prędkości

wirtualnej otrzymujemy następujące macierze bezwładności i sztywności

$$\mathbf{M} = \frac{\rho b}{h} \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right] = \frac{1}{h} [-\mathbf{M}_s \mid \mathbf{M}_s] , \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{Nh}{b} \left[ \begin{array}{cc|cc} \alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & -\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & \frac{\alpha^2}{2} & -\frac{\alpha^2}{2} \\ -\alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & \alpha(1 - \frac{\alpha}{2}) & -\frac{\alpha^2}{2} & \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= h \left[ \alpha(1 - \frac{\alpha}{2})\mathbf{K}_s \mid \frac{\alpha^2}{2}\mathbf{K}_s \right] . \end{aligned} \quad (7.38)$$

Gdy obliczymy już prędkości w następnej chwili czasu zgodnie z (7.15), możemy wyznaczyć na ich podstawie przemieszczenia

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + h[\beta \mathbf{v}_i + (1 - \beta) \mathbf{v}_{i+1}] , \quad (7.39)$$

gdzie współczynnik  $\beta = 1 - \alpha$  odpowiada za stabilność rozwiązania. Przyjrzyjmy się w identyczny sposób, własnościom innych wirtualnych funkcji kształtu.

### Funkcja kapeluszowa

Postulujemy równowagę globalną w przedziale  $[0, h]$ . Zgodnie z rys. 7.6b otrzymujemy

$$v^*(x, t) = (1 - \frac{x}{b})v_3 + \frac{x}{b}v_4 . \quad (7.40)$$

Powyższa funkcja ma stałą wartość równą jedności, na brzegach natomiast równa jest zero. Po całkowaniu równania ruchu pręta, na podstawie kapeluszowej funkcji wirtualnej otrzymujemy następujące macierze sztywności i bezwładności

$$\mathbf{K} = \frac{EAh}{b} \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array} \right] , \quad (7.41)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Ab}{h} \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right] . \quad (7.42)$$

Przemieszczenia w chwili następnej wyznaczamy na podstawie wzoru (7.39), gdzie współczynnik  $\beta$  dla prezentowanej funkcji wirtualnej, aby zachowana była stabilność rozwiązania musi być z przedziału  $1/2 \leq \beta \leq 1$ .

### Funkcja trójkątna

W przypadku wirtualnej funkcji trójkątnej (rys. 7.6c)

$$v^*(x, t) = (1 - \frac{x}{b})\frac{t}{h}v_3 + \frac{x}{b}\frac{t}{h}v_4 . \quad (7.43)$$

Na tej podstawie macierze sztywności i bezwładności uzyskują następującą postać

$$\mathbf{K} = \frac{EAh}{b} \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{5}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{5}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right] , \quad (7.44)$$



$$\mathbf{M} = \frac{\rho Ab}{h} \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right]. \quad (7.45)$$

Z warunku stabilności otrzymujemy zakres stosowalności parametru  $\beta$ :  $2/3 \leq \beta \leq 1$ .

### Funkcja daszkowa

Przyjmujemy trójkątny rozkład funkcji wirtualnej w czasie (rys. 7.6)

$$v^*(x, t) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{b})\frac{2t}{h} v_3 + \frac{x}{b}\frac{2t}{h} v_4, & \text{przy } 0 \leq t \leq t/2 \\ (1 - \frac{x}{b})(-\frac{2t}{h} + 2) v_3 + \frac{x}{b}(-\frac{2t}{h} + 2) v_4 & \text{przy } t/2 < t \leq h. \end{cases} \quad (7.46)$$

Taka postać funkcji  $v^*$  prowadzi do następującej postaci macierzy sztywności i bezwładności

$$\mathbf{K} = \frac{EAh}{b} \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{17}{96} & -\frac{17}{96} & \frac{7}{96} & -\frac{7}{96} \\ -\frac{17}{96} & \frac{17}{96} & -\frac{7}{96} & \frac{7}{96} \end{array} \right], \quad (7.47)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho Ab}{h} \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array} \right]. \quad (7.48)$$

Z warunku stabilności otrzymujemy parametr  $3/4 \leq \beta \leq 1$ .

Aby określić błąd prezentowanej metody numerycznej w przypadku równowagi punktowej przeanalizujemy proces opisany równaniem (7.36). Rozwinięcie prędkości i przemieszczenia w szereg Taylora przedstawiamy poniżej

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= \left(1 - \alpha\omega^2 h^2 + \frac{1}{2}\alpha^3\omega^4 h^4 + \mathcal{O}(h^6)\right) v_i + \\ &+ \left(-\omega^2 h + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^4 h^3 + \mathcal{O}(h^5)\right) u_i, \\ u_{i+1} &= \left(h - \omega^2 h^3 \alpha(1 - \alpha) + \mathcal{O}(h^5)\right) v_i + \\ &+ \left(1 - \omega^2 h^2(1 - \alpha) + \frac{1}{2}\omega^4 h^4 \alpha^2(1 - \alpha) + \mathcal{O}(h^6)\right) u_i. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Pamiętając o rozwinięciach funkcji trygonometrycznych możemy oszacować błąd metody. W tym celu należy rozpatrzyć dwa przypadki:  $v(0) = 0$ ,  $u(0) = 1$  oraz  $v(0) = 1$ ,  $u(0) = 0$  i przyrównać wyniki (7.49) do rozwinięć rozwiązań ścisłych. Otrzymamy wówczas błąd prędkości  $\epsilon^v$

$$\epsilon_{11}^v = \omega^2 h^2 \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \omega^4 h^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{\alpha^3}{2}\right) + \mathcal{O}(h^6), \quad (7.50)$$

$$\epsilon_{12}^v = \omega^4 h^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (7.51)$$

oraz błąd przemieszczeń  $\epsilon^u$

$$\epsilon_{21}^u = \omega^2 h^3 \left(\alpha(1 - \alpha) - \frac{1}{6}\right) + \mathcal{O}(h^5), \quad (7.52)$$

$$\epsilon_{22}^u = \omega^2 h^2 \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) + \omega^4 h^4 \left( \frac{1}{24} - \frac{\alpha^2}{2} (1 - \alpha) \right) + \mathcal{O}(h^6) . \quad (7.53)$$

Dolne indeksy oznaczają element macierzy przejścia (7.35). Widzimy, że przy  $\alpha = 1/2$  znikają człony drugiego stopnia. Błąd wynosi w tym przypadku  $1/12 h^3 + \mathcal{O}(h^4)$ .

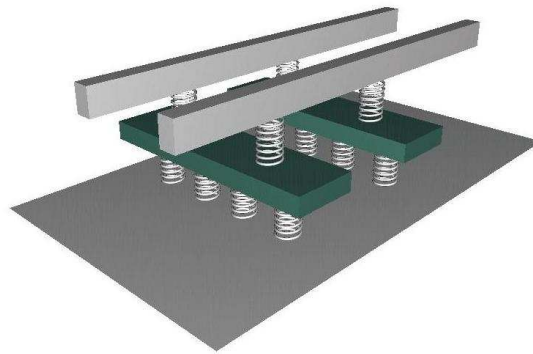
## Przykłady zastosowań

Jak już wspomniano we wstępie, ruchome obciążenia mają wiele praktycznych zastosowań inżynierskich. W rozdziale tym przedstawimy na podstawie zestawu wózków kolejowych, jeden z typowych przykładów występowania ruchomych sił grawitacyjnych i bezwładnościowych. Na koniec zaprezentujemy nowe, szybko rozwijające się, numeryczne podejście bezsiatkkowe. Rozpatrzono w tym przypadku stałą, ruchomą siłę grawitacyjną.

### 8.1. Dynamika toru kolejowego

Rozwój szybkich kolei wymaga dostosowania torów do wyższych prędkości oraz większych obciążeń. To z kolei musi być poprzedzone intensywnymi pracami projektowymi i badawczymi. O ile budowa próbnych odcinków eksploatacyjnych jest droga, a badania czasochłonne, to symulacje komputerowe można wykonać szybko. Są wartościowe wówczas, gdy model numeryczny odpowiada możliwie wiernie modelowi fizycznemu. Przy jego opracowywaniu zakładamy, że koło kolejowe będące w kontakcie z szyną powiększa jej masę i zmienia lokalne własności dynamiczne. W związku z tym stosowanie obciążenia jedynie siłami bezmasowymi jest niewystarczające. Podstawowe parametry modelu można stosunkowo dobrze dobrać na podstawie dokumentacji technicznej. Pewne jest, że przy dużych prędkościach jazdy nie należy obciążać toru jedynie elementem sprężystym, nieinercyjnym, a należy uwzględnić masę, na której można następnie ulokować złożony nawet model pojazdu.

Zadanie przejazdu pojazdu szynowego po torze klasycznym podzielono na dwa odrębne etapy. W pierwszym badano tor złożony z szyn, podkładów, lepkosprężystych przekładek oraz lepkosprężystego podłoża gruntowego (rys. 8.1). Drugi etap dotyczył pojazdu szynowego, zbudowanego w prosty sposób z czterech oscylatorów, połączonych odkształcalną ramą. Przyjmujemy, że drgania obu szyn sprzęgane są przez zestawy kołowe, a elementem sprzęgającym drgania propagujące się wzdłuż szyny jest rama wózka pojazdu szynowego. Szyny, podkłady oraz ramy wózka przyjęto jako elementy rusztu, o trzech stopniach swobody w węźle. Przekładki przyjęto jako elementy skończone pręta. Podłoże gruntowe przyjęto jako inercyjne podłoże Winklera. Odpowiednio dobrano sztywności ramy oraz bezwładność poszczególnych elementów. Poniższy przykład zastosowań ma cel poglądowy i z tego powodu nie skupiamy się na precyzyjnym doborze danych liczbowych. Zaznaczamy jedynie, że koło toczące się po szynie zobra-



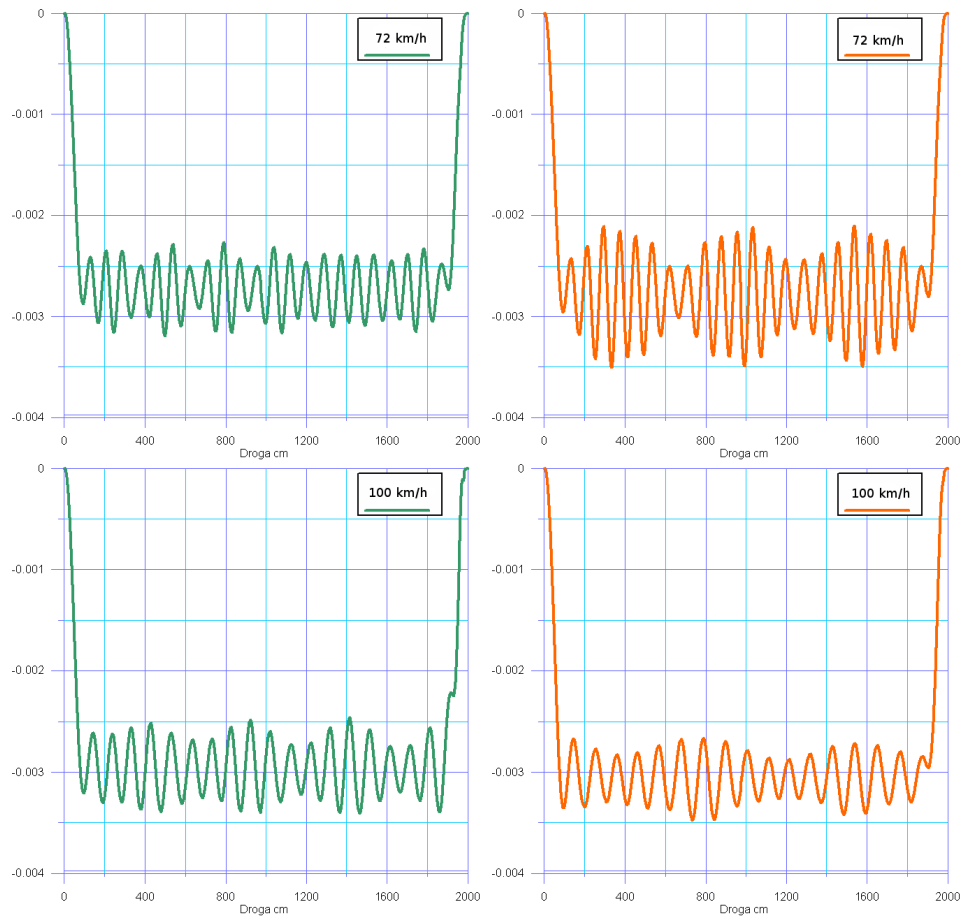
**Rysunek 8.1:** Model toru przyjęty w obliczeniach numerycznych.

zowano jako poruszającą się masę skupioną, stowarzyszoną z siłą odpowiadającą sile kontaktu, wywołaną m.in. obciążeniem wózka i pudła wagonu.

Oba układy dynamiczne rozwiązywano niezależnie, budując i rozwiązując odpowiednie wynikowe układy równań algebraicznych. Siatki węzłów obu układów dyskretnych przemieszczały się względem siebie i w związku z tym zastosowano prostą procedurę iteracyjną równoważenia sił w obu układach. W pierwszym etapie tor obciążano w punktach kontaktu kół z szynami, siłami odpowiadającymi naciskowi dynamicznemu kół wózka. W wyniku otrzymano przemieszczenia węzłów siatki dyskretny szyny. To pozwalało wyznaczyć przemieszczenia pionowe szyn w miejscach ich kontaktu z kołami. Przemieszczenia przyjmowano jako warunki brzegowe w rozwiązaniu układu wózka obciążonego siłami zewnętrznymi, m.in. ciężarem własnym i ciężarem pudła wagonu. Wynikiem rozwiązania tego etapu były reakcje w miejscach kontaktu z szynami. Reakcje te, z przeciwnymi znakami służyły ponownie do obciążenia toru. Powtarzana iteracyjnie procedura prowadziła w kilku krokach do zrównoważenia układu statycznego i następnie pozwalała przejść do następnej chwili w procesie dynamicznym. Procedura działa poprawnie w pewnych zakresach parametrów. W naszym przypadku w praktyce nie dochodziło do utraty stabilności rozwiązania, o ile krok czasowy nie był zbyt duży.

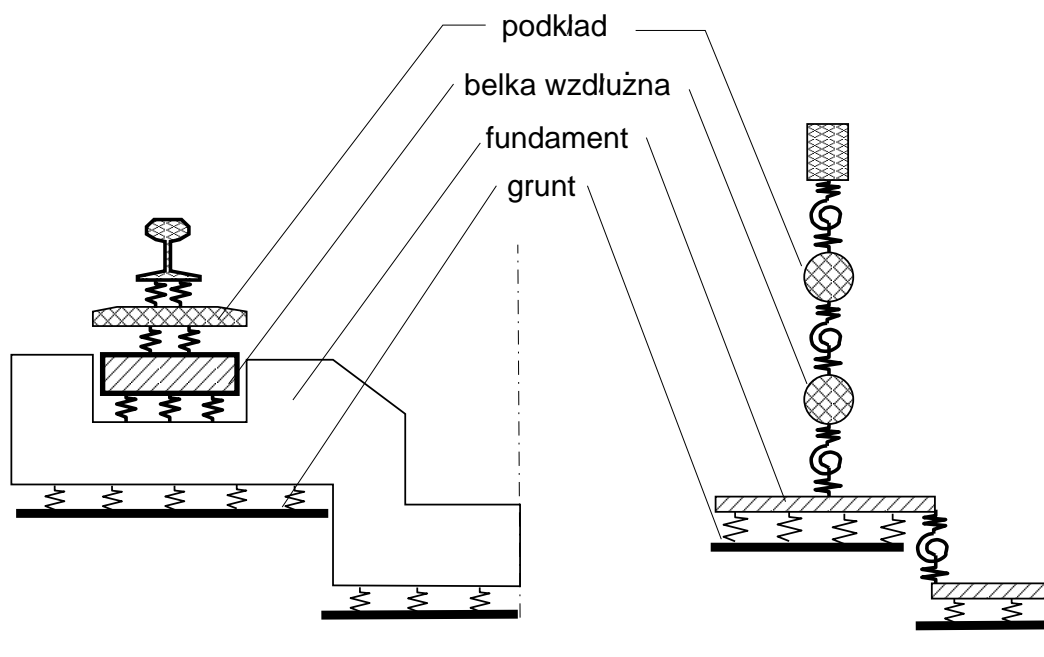
Rys. 8.2 pokazuje porównanie przemieszczeń pionowych w czasie przy przejeździe zestawu kołowego z różną prędkością. Wyniki uzyskane metodą elementów czasoprzestrzennych porównano z wynikami programu Medyna. Mimo różniącego się podejścia przy tworzeniu modelu numerycznego w programie Medyna oraz MECz, uzyskano podobieństwo wyników. Jednym z odstępstw jest zaobserwowane przy prędkości 72 km/h i wyższej, dudnienie. Można spodziewać się wystąpienia tego zjawiska w wynikach Medyny przy nieco innej prędkości jazdy. Ta różnica może wynikać z nieuwzględnienia w programie Medyna masy kół, stowarzyszonej w ruchu poprzecznym z szynami.

Bardziej precyzyjny model rzeczywistego toru pokazano na rys. 8.3. Jest on jedną z propozycji izolacji drgań przekazywanych z układu tor–pojazd szynowy na otoczenie. Wibroizolacja w tym przypadku umieszczona jest pod wzdłużną betonową belką, umieszczoną we wrębie fundamentu. Belka ta ma za zadanie zwiększyć masę układu poddanego obciążeniom ruchomym. Na belce tej ułożone są podkłady szynowe (rys. 8.4). Wyniki w wybranych punktach torowiska przedstawiono na rys. 8.5. Porównano przemieszczenia pionowe w przypadku zastosowania materiału izolującego dragania

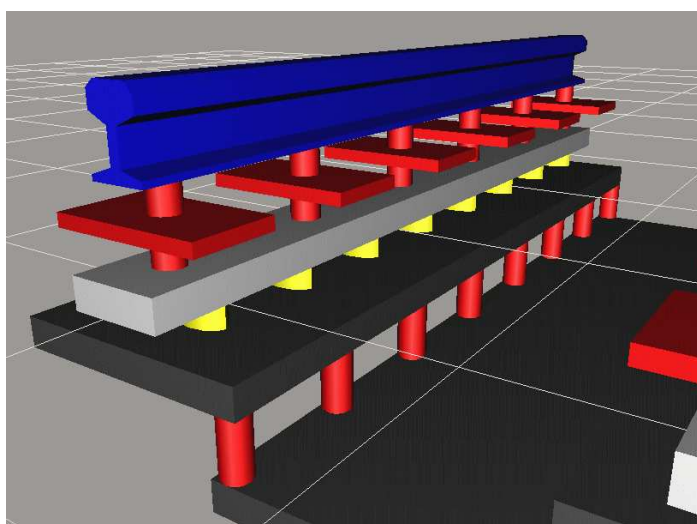


**Rysunek 8.2:** Przemieszczenia pionowe punktu kontaktu koła z szyną uzyskane programem Medyna (obliczenia wykonane przez P. Tokaja - lewa kolumna) oraz metodą MECz (prawa kolumna) przy prędkości 72 i 100 km/h.

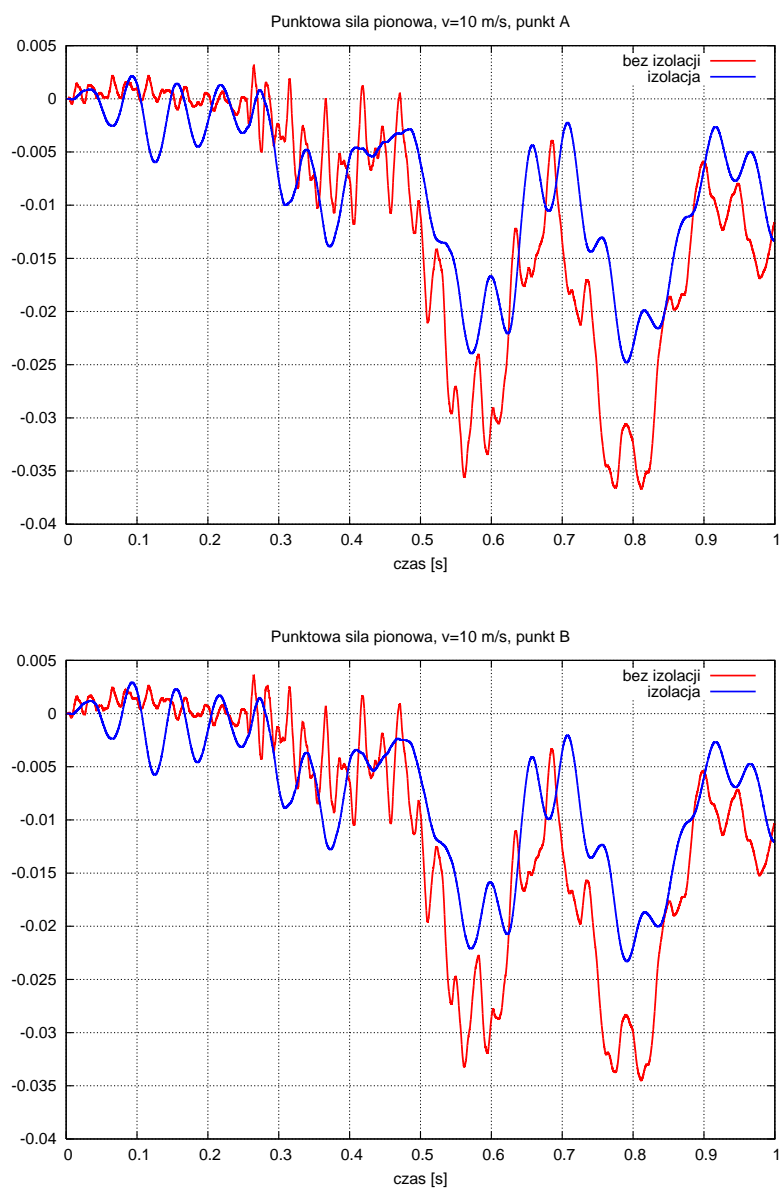
oraz bez zastosowania izolacji. Materiał izolujący uwzględniono przez zmianę parametrów sprężystych materiału między belką wzdłużną a fundamentem.



Rysunek 8.3: Schemat toru metra oraz jego model dyskretny.



Rysunek 8.4: Model fizyczny toru metra.



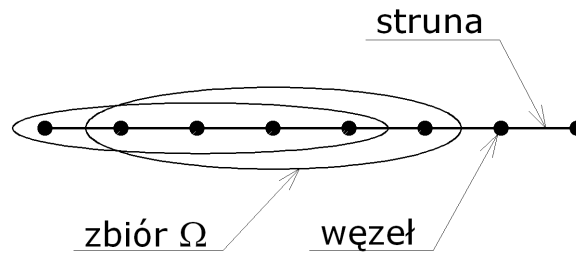
**Rysunek 8.5:** Przemieszczenia pionowe [cm] punktu fundamentu pod szyną (punkt A – rysunek górny) oraz w osi toru (punkt B – rysunek dolny).

## 8.2. Metody bezsiatkowe (Element Free Galerkin Method)

Idea metod bezsiatkowych polega na pozbyciu się jednej z głównych wad metody elementów skończonych (MES). Uważa się za nią konieczność tworzenia siatki elementów skończonych.

W metodzie bezsiatkowej siatkę MES zastępujemy niepowiązаныmi między sobą węzłami. Dzięki temu funkcja kształtu nie jest tworzona w elementach skończonych, a na podstawie niekoniecznie równo rozmieszczonych węzłów [16].

W niniejszym rozdziale rozpatrzono jedną z wielu metod tworzenia funkcji kształtu – metodę MLS<sup>1</sup>[8]. Postępujemy w następujący sposób. Rozpinamy funkcję kształtu na węzłach aktualnie znajdujących się w kroczącym zbiorze  $\Omega$  (Rys. refefg1). Odchylenie



Rysunek 8.6: Podzbiór  $\Omega$  poruszający się wzdłuż struny.

rozumiane jako błąd interpolacji w MLS zapisujemy następująco

$$J = \sum_{i=1}^n W(x - x_i) [u^h(x, x_i) - u_i]^2, \quad (8.1)$$

gdzie  $W(x - x_i)$  jest pewną funkcją wagową,  $u^h(x, x_i)$  jest wielomianem aproksymującym, a  $u_i$  wartościami węzłowymi. Przyjęto wykładniczą funkcję kształtu:

$$W(x - x_i) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-x_i}{\alpha}\right)^2} & \text{jeżeli } (x - x_i) \leq 1 \\ 0 & \text{jeżeli } (x - x_i) > 1. \end{cases} \quad (8.2)$$

Współczynnik  $\alpha$  zależy od wielkości zbioru  $\Omega$  oraz od liczby znajdujących się w nim węzłów. W przypadku jednowymiarowym będzie to:

$$u^h(x, x_i) = \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(x), \quad (8.3)$$

gdzie stopień wielomianu aproksymującego wynosi

$$\mathbf{p}^T = (1, x, x^2, \dots), \quad (8.4)$$

a współczynniki aproksymujące można zapisać następująco

$$\mathbf{a}^T(x) = (a_0(x), a_1(x), a_2(x), \dots). \quad (8.5)$$

<sup>1</sup>MLS - Moving Least Square



Dążymy do minimalizacji odchylenia interpolacji  $J$  względem współczynników aproksymujących  $a$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 . \quad (8.6)$$

Po zróżniczkowaniu (8.1) otrzymujemy

$$a(x) = A_1^{-1}(x) A_2(x) u_i , \quad (8.7)$$

gdzie

$$A_1 = P^T W(x - x_i) P , \quad A_2 = P^T W(x - x_i) , \quad (8.8)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

Na podstawie (8.3) i (8.7)

$$u^h(x, x_i) = \mathbf{p}^T(x_i) A_1^{-1}(x) A_2(x) u_i = \sum_{i=1}^n \phi_i^k(x) u_i . \quad (8.10)$$

Tutaj  $\phi_i^k(x)$  jest funkcja kształtu, a  $k$  stopniem wielomianu aproksymującego

$$\phi_i^k = \mathbf{p}^T(x_i) A_1^{-1}(x) A_2(x) = [\phi_1^k(x), \phi_2^k(x), \dots, \phi_n^k(x)] . \quad (8.11)$$

Ponieważ z praktycznego punktu widzenia niezwykle trudne jest odwrócenie w postaci ogólnej macierzy  $A$ , stosuje się aproksymację zerowego stopnia  $\mathbf{p}^T = 1$ . Na tej podstawie otrzymujemy tzw. funkcję Sheparda

$$\phi_i^0 = \frac{W(x - x_i)}{\sum_{i=1}^n W(x - x_i)} . \quad (8.12)$$

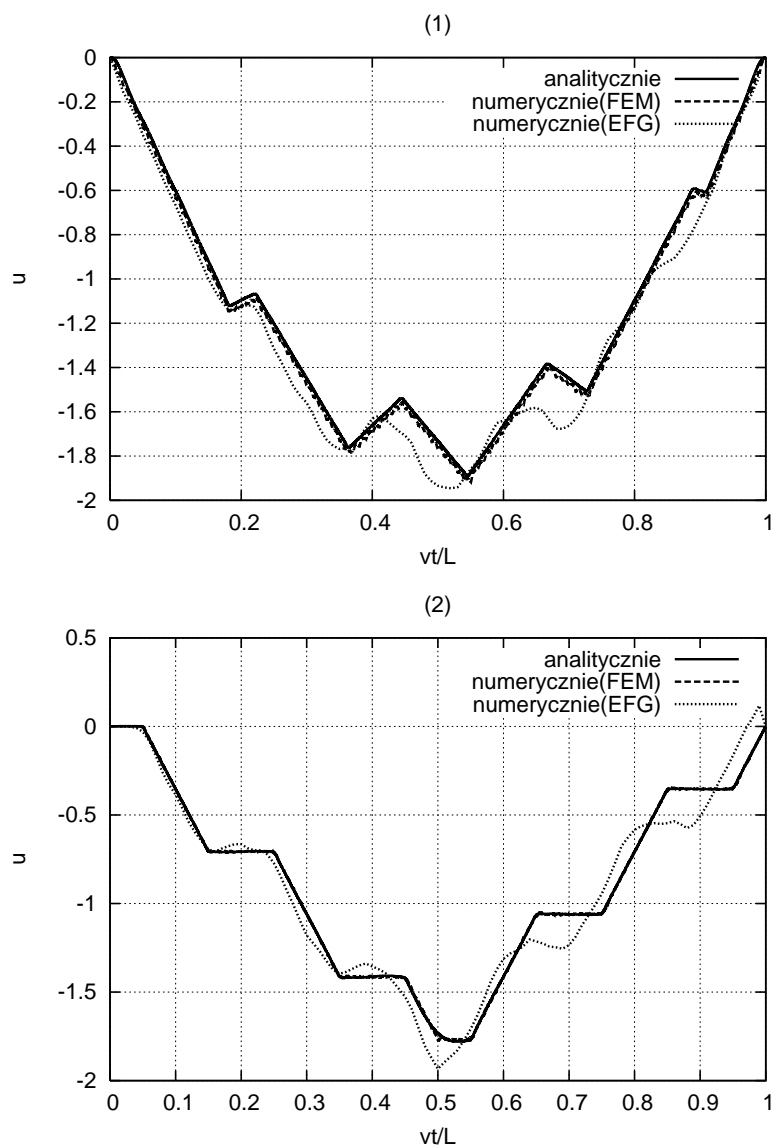
Na podstawie funkcji Sheparda oraz równania różniczkowego ruchu zapisujemy

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (8.13)$$

i w końcu otrzymujemy macierze sztywności i bezwładności następującej postaci

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{\Omega} B_i^T N B_j d\Omega , \\ m_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i^T \rho A \phi_j d\Omega . \end{aligned} \quad (8.14)$$

W równaniu tym  $B = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $N$  jest siłą naciągu struny, a  $\rho$  gęstością masy struny. Macierze  $k$  i  $m$ , które tworzymy w zbiorach  $\Omega$ , składamy w macierze globalne  $K$  i  $M$  zgodnie z poruszaniem się oczka  $\Omega$ . Kluczowym problemem jest dobór współczynnika  $\alpha$  (w równaniu 8.2). Ta krótka próba zastosowania metody bezsiatkowej do rozwiązywania problemów dynamiki konstrukcji, a zwłaszcza zadań z ruchomą masą pokazuje, że nie jest ona pozbawiona wad. Skuteczność jej stosowania można ocenić z umiarkowanym optymizmem. Już w przypadku zadań jednowymiarowych stwarza duży kłopot. W zadaniach o większej wymiarowości zastosowania, mimo bogatej literatury, wymagają dalszych intensywnych prac badawczych.



**Rysunek 8.7:** Ruchoma siła grawitacyjna ( $v = 0, 1$ ): trajektoria ruchomej siły (Rys. (1)) i środek struny (Rys. (2)).

## Wnioski

W pracy przedstawiono sposoby modelowania oraz rozwiązywania zagadnień dotyczących punktowych, ruchomych źródeł zaburzeń. Pomimo że ruchome obciążenia powszechnie występują w wielu podstawowych problemach dynamiki budowli czy budowy maszyn, nadal wiele spraw jest mylnych, niejasnych, opisanych błędnie lub po prostu nierozwiązanych. Niniejsza praca porządkuje dynamiczne zagadnienia jednowymiarowe. Bardzo często ruchome obciążenie bezwładnościowe świadomie lub nieświadomie mylone jest ze stałą siłą grawitacyjną. Wspomniana, poruszająca się masa jest źródłem bardzo poważnych komplikacji matematycznych. Również samo przyspieszenie ruchomej masy w wielu przypadkach jest źle interpretowane.

W pierwszej części pracy przedstawiono matematyczny model ruchomego obciążenia punktowego przy pomocy delty Diraca. Zaprezentowano prawidłowo zapisane cząstkowe, różniczkowe równania ruchu struny, belki Bernoulliego–Eulera oraz belki Timoshenki, uwzględniające poruszające się ze stałą prędkością obciążenie bezwładnościowe oraz obciążenie grawitacyjne.

W części poświęconej rozwiązaniom analitycznym przedstawiono głównie rozwiązania dotyczące struny oraz belki Bernoulliego–Eulera i Timoshenki pod ruchomym obciążeniem grawitacyjnym. Znane są ich pełne rozwiązania w formie nieskończonych szeregów. W przypadku obciążeń bezwładnościowych, jedyne pełne rozwiązanie omawianego problemu dotyczy struny bezmasowej. Jest to także zagadnienie dynamiki, pomimo zerowej masy struny. Wkład dynamiczny stanowi ruchome obciążenie bezwładnościowe. Rozwiązanie to, przedstawione w postaci nieskończonego szeregu opisuje tylko trajektorię ruchomej masy. W szczególnym przypadku znamy również pełne, zamknięte rozwiązanie tego problemu. Powyższe analityczne rozwiązanie dotyczące poruszającego się obciążenia inercyjnego po bezmasowej strunie pozwoliło nam przedstawić po raz pierwszy matematyczny dowód istnienia nieciągłości trajektorii masy blisko końcowej podpory. Efekt ten nie był dotąd znany, a dowód matematyczny jego istnienia nie był publikowany.

Kolejne rozdziały przedstawiają własne podejście półanalityczne do problemu ruchomej masy poruszającej się po inercyjnej strunie i obu typach belkach. W analityczny sposób przekształcono cząstkowe równanie ruchu do układu równań różniczkowych zwyczajnych, wykorzystując transformację Fouriera w skończonym przedziale  $\langle 0, l \rangle$ . Otrzymane równania są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi o zmiennych współczynnikach. Końcowa faza rozwiązania zadania wymaga obliczeń numerycz-

nych. W przypadku struny i belki Bernoulliego–Eulera otrzymana forma pozwala zastosować szybkie schematy numerycznego całkowania macierzowych równań ruchu np. metodą Newmarka. W przypadku belki Timoshenki wykorzystano metodę Rungego–Kutty czwartego rzędu. Prezentowane rozwiązania półanalityczne są rozwiązaniami w pełnym zakresie prędkości ruchomego obciążenia. Pozwalają opisywać przemieszczenia struny lub belki w czasie przy prędkościach podkrytycznych, krytycznej i nadkrytycznych. Możemy również obserwować dowolny punkt poruszającego się układu. Podobnie jak w przypadku struny bezmasowej, zaobserwowano nieciągłość trajektorii ruchomej masy przy końcowej podporze. Niestety, ze względu na brak pełnego rozwiązania analitycznego w przypadku masowej struny, możliwe jest tylko graficzne przedstawienie nieciągłości. Odkryta własność rozwiązania ma miejsce również w przypadku belki Timoshenki. Dystrybucja pod postacią delty Diraca może budzić u czytelników wiele kontrowersji. W jej obecności upatruje się powód nieciągłości rozwiązania. Z tego względu też zastosowano odmienny sposób podejścia do problemu — zastosowano równanie Lagrange’a drugiego rodzaju. Ta energetyczna metoda nie wymaga stosowania delty Diraca do zapisu energii badanego układu. Przedstawiona analiza prowadzi do identycznego, jak wcześniej, rozwiązania. Nieciągłość trajektorii masy jest nową, dotąd nieznaną własnością poruszających się zaburzeń wywołanych czynnikiem inercyjnym.

Rozwiązania analityczne i półanalityczne posłużyły do weryfikacji metod czysto numerycznych. Potwierdziły one poważne ograniczenia w stosowanych do tej pory procedurach. O ile w przypadku obciążenia grawitacyjnego rozwiązania klasyczną metodą elementów skończonych wykazują znakomitą zbieżność, to w zadaniach z ruchomą masą rozwiązania opisane w literaturze są całkowicie błędne i nieprzydatne. W przypadku bardzo małych prędkości przejazdu źródła zaburzenia, możliwa jest bezpośrednia modyfikacja macierzy bezwładności układu, wnosząca stosunkowo mały błąd w otrzymane rozwiązania. Większe prędkości wymagały nowego numerycznego podejścia. Do bezpośredniej dyskretyzacji cząstkowego równania ruchu najlepiej nadawała się metoda elementów przestrzennych, wyrażona w prędkościach. Jej idea polega na podobnym traktowaniu zmiennej czasowej i zmiennej przestrzennej. W pracy przedstawiono krótki zarys metody. Przede wszystkim jednak pokazano nowe, dotąd nieznanie rozwiązania macierzowe metody czasoprzestrzennej. Wyprowadzono macierze odpowiedzialne za opis ruchomej masy w przypadku struny oraz belki Bernoulliego–Eulera. Macierze te, przenoszące masę w postaci cząstki materialnej, uwzględniają zarówno przyspieszenie poprzeczne ruchomej masy, jak również przyspieszenie Coriolisa oraz przyspieszenie odśrodkowe. Przedstawione wyniki, w zależności od zastosowanej wirtualnej funkcji kształtu, dają rozwiązania o różnej dokładności, z punktu widzenia oszacowania rzędu błędu. Najważniejszą cechą jednak jest to, że otrzymane wyniki wykazują doskonałą zbieżność z wynikami analitycznymi i półanalitycznymi. Obrazują przy tym również wspomnianą nieciągłość trajektorii masy.

Prezentowane metody rozwiązania, szczególnie te numeryczne, mają ogromną wartość inżynierską. Dzięki nim możemy badać dużo bardziej złożone układy poddane pojedynczemu obciążeniu inercyjnemu, bądź układowi ruchomych obciążeń bezwładnościowych. W przypadku rozwiązań analitycznych i półanalitycznych doświadczenia zebrane przy badaniu układów jednowymiarowych pomogą w rozwiązywaniu problemów dwu i trójwymiarowych. Nadal pozostaje otwarta sprawa pełnego rozwiązania analitycznego problemu ruchomej masy poruszającej się po inercyjnej strunie czy belkach. Jest to jedno z wielu zagadnień dynamiki, związane z koniecznością ścisłego, peł-

nego rozwiązania równania różniczkowego o zmiennych współczynnikach. Prawidłowe rozwiązania zagadnień ruchomych obciążeń mają kolosalne znaczenie w zastosowaniach inżynierskich. Lepsza znajomość obciążeń dynamicznych działających na projektowany układ może przełożyć się na niższy koszt budowy konstrukcji, a przede wszystkim na zwiększenie bezpieczeństwa ich użytkowania.

## Macierze w elemencie belki

W dodatku prezentujemy macierze **M**, **C**, **K** oraz **E**, występujące w opisie elementu czasoprzestrzennego belki Bernoulliego-Eulera niosącego masę. Przyjęto oznaczenia:  $\kappa = (x_0 + vh)/b$ ,  $\xi = vh/b$ .

Tablica A.1: Matrix M (lewa połówka)

$  \begin{aligned}  & -4\kappa^6 + 12\kappa^5 - \\  & \kappa^4(5\xi^2 + 9) + \\  & 2\kappa^3(5\xi^2 - 2) - \\  & 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 8)/4 + \\  & \kappa\xi^2(3\xi^2 - 4)/4 - \\  & (5\xi^6 + 63\xi^4 - 280\xi^2 + 560)/560  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi - \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) + \\  & h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) - \\  & h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) + \\  & h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) - \\  & h\nu\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & 4\kappa^6 - 12\kappa^5 + \\  & \kappa^4(5\xi^2 + 9) + \\  & 2\kappa^3(1 - 5\xi^2) + \\  & 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 + \\  & \kappa\xi^2(2 - 3\xi^2)/4 + \\  & \xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi - \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + \\  & h\nu\kappa^3(25\xi^2 - 6)/(6\xi) - \\  & h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) + \\  & h\nu\kappa\xi(5\xi^2 - 4)/16 - \\  & h\nu\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360  \end{aligned}  $
$  \begin{aligned}  & -2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi - \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) + \\  & h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) - \\  & h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) + \\  & h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) - \\  & h\nu\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 4h^2v^2\kappa^5/\xi^2 - \\  & h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 24)/(4\xi^2) + \\  & 2h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 6)/(3\xi^2) - \\  & h^2v^2\kappa^2(3\xi^4 + 48\xi^2 + 16)/(16\xi^2) + \\  & h^2v^2\kappa(\xi^2 + 4)/4 - \\  & h^2v^2(15\xi^4 + 504\xi^2 + 560)/6720  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & 2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi + \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) - \\  & h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) + \\  & h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 - \\  & h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 + \\  & h\nu\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 - \\  & h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) + \\  & h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) - \\  & 3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 + \\  & h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 - \\  & h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240  \end{aligned}  $
$  \begin{aligned}  & 4\kappa^6 - 12\kappa^5 + \\  & \kappa^4(5\xi^2 + 9) + \\  & 2\kappa^3(1 - 5\xi^2) + \\  & 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 + \\  & \kappa\xi^2(2 - 3\xi^2)/4 + \\  & \xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & 2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi + \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) - \\  & h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) + \\  & h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 - \\  & h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 + \\  & h\nu\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -4\kappa^6 + 12\kappa^5 - \\  & \kappa^4(5\xi^2 + 9) + \\  & 10\kappa^3\xi^2 - \\  & 3\kappa^2\xi^2(\xi^2 + 6)/4 + \\  & 3\kappa\xi^4/4 - \\  & \xi^4(5\xi^2 + 63)/560  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & 2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi + \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) - \\  & 25h\nu\kappa^3\xi/6 + \\  & 3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 - \\  & 5h\nu\kappa\xi^3/16 + \\  & h\nu\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120  \end{aligned}  $
$  \begin{aligned}  & -2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi - \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + \\  & h\nu\kappa^3(25\xi^2 - 6)/(6\xi) - \\  & h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) + \\  & h\nu\kappa\xi(5\xi^2 - 4)/16 - \\  & h\nu\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 - \\  & h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) + \\  & h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) - \\  & 3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 + \\  & h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 - \\  & h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & 2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi + \\  & h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) - \\  & 25h\nu\kappa^3\xi/6 + \\  & 3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 - \\  & 5h\nu\kappa\xi^3/16 + \\  & h\nu\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120  \end{aligned}  $	$  \begin{aligned}  & -h^2v^2\kappa^6/\xi^2 + 2h^2v^2\kappa^5/\xi^2 - \\  & h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 4)/(4\xi^2) + \\  & 5h^2v^2\kappa^3/3 - \\  & h^2v^2\kappa^2(3\xi^2 + 8)/16 + \\  & h^2v^2\kappa\xi^2/8 - \\  & h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 28)/2240  \end{aligned}  $

Tablica A.2: Macierz M (prawa połówka)

$$4\kappa^6 - 12\kappa^5 + \kappa^4(5\xi^2 + 9) + 2\kappa^3(2 - 5\xi^2) + 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 8)/4 + \kappa\xi^2(4 - 3\xi^2)/4 + (5\xi^6 + 63\xi^4 - 280\xi^2 + 560)/560$$

$$2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) - h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) - h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) + hv\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360$$

$$-4\kappa^6 + 12\kappa^5 - \kappa^4(5\xi^2 + 9) + 2\kappa^3(5\xi^2 - 1) - 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 + \kappa\xi^2(3\xi^2 - 2)/4 - \xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560$$

$$2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(6 - 25\xi^2)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) + h\nu\kappa\xi(4 - 5\xi^2)/16 + hv\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360$$

$$2h\nu\kappa^6/\xi - 7h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) - h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 12)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 32\xi^2 - 16)/(8\xi) - h\nu\kappa(7\xi^4 + 8\xi^2 - 16)/(16\xi) + hv\xi(15\xi^4 + 336\xi^2 - 560)/3360$$

$$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 4h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 24)/(4\xi^2) - 2h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 6)/(3\xi^2) + h^2v^2\kappa^2(3\xi^4 + 48\xi^2 + 16)/(16\xi^2) - h^2v^2\kappa(\xi^2 + 4)/4 + h^2v^2(15\xi^4 + 504\xi^2 + 560)/6720$$

$$-2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) - h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 + h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 - hv\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120$$

$$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) - h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) + 3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 - h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 + h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240$$

$$-4\kappa^6 + 12\kappa^5 - \kappa^4(5\xi^2 + 9) + 2\kappa^3(5\xi^2 - 1) - 3\kappa^2(\xi^4 + 6\xi^2 - 4)/4 + \kappa\xi^2(3\xi^2 - 2)/4 - \xi^2(5\xi^4 + 63\xi^2 - 140)/560$$

$$-2h\nu\kappa^6/\xi + 7h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 16)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(35\xi^2 + 18)/(6\xi) - h\nu\kappa^2\xi(3\xi^2 + 32)/8 + h\nu\kappa\xi(7\xi^2 + 12)/16 - hv\xi^3(5\xi^2 + 112)/1120$$

$$4\kappa^6 - 12\kappa^5 + \kappa^4(5\xi^2 + 9) - 10\kappa^3\xi^2 + 3\kappa^2\xi^2(\xi^2 + 6)/4 - 3\kappa\xi^4/4 + \xi^4(5\xi^2 + 63)/560$$

$$-2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + 25h\nu\kappa^3\xi/6 - 3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 + 5h\nu\kappa\xi^3/16 - hv\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120$$

$$2h\nu\kappa^6/\xi - 5h\nu\kappa^5/\xi + h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + h\nu\kappa^3(6 - 25\xi^2)/(6\xi) + h\nu\kappa^2(3\xi^4 + 12\xi^2 - 8)/(8\xi) + h\nu\kappa\xi(4 - 5\xi^2)/16 + hv\xi(15\xi^4 + 126\xi^2 - 280)/3360$$

$$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 3h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 12)/(4\xi^2) - h^2v^2\kappa^3(5\xi^2 + 2)/(2\xi^2) + 3h^2v^2\kappa^2(\xi^2 + 8)/16 - h^2v^2\kappa(3\xi^2 + 4)/16 + h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 84)/2240$$

$$-2h\nu\kappa^6/\xi + 5h\nu\kappa^5/\xi - h\nu\kappa^4(5\xi^2 + 6)/(2\xi) + 25h\nu\kappa^3\xi/6 - 3h\nu\kappa^2\xi(\xi^2 + 4)/8 + 5h\nu\kappa\xi^3/16 - hv\xi^3(5\xi^2 + 42)/1120$$

$$h^2v^2\kappa^6/\xi^2 - 2h^2v^2\kappa^5/\xi^2 + h^2v^2\kappa^4(5\xi^2 + 4)/(4\xi^2) - 5h^2v^2\kappa^3/3 + h^2v^2\kappa^2(3\xi^2 + 8)/16 - h^2v^2\kappa\xi^2/8 + h^2v^2\xi^2(5\xi^2 + 28)/2240$$



**Tablica A.3:** Macierz C (lewa połówka)

$12\xi\kappa^5 - 10\xi\kappa^4(\xi + 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) - 3\xi\kappa^2(\xi^3 + 5\xi^2 + 3\xi - 2) + \xi\kappa(3\xi^4 + 12\xi^3 + 18\xi^2 - 8\xi - 24)/4 - \xi^2(15\xi^4 + 105\xi^3 + 126\xi^2 - 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 17) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 34\xi + 42)/3 - h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 + 17\xi + 14)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 + 68\xi^3 + 140\xi^2 - 160)/40 - h\nu(45\xi^5 + 357\xi^4 + 588\xi^3 - 1120\xi - 1680)/1680$	$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi + 3) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) + 3\xi\kappa^2(\xi^3 + 5\xi^2 + 3\xi - 2) - \xi\kappa(3\xi^4 + 12\xi^3 + 18\xi^2 - 8\xi - 24)/4 + \xi^2(15\xi^4 + 105\xi^3 + 126\xi^2 - 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 13) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 26\xi + 18)/3 - h\nu\kappa^2(3\xi^3 + 13\xi^2 + 6\xi - 6)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 + 52\xi^3 + 60\xi^2 - 40\xi - 80)/40 - h\xi\nu(45\xi^4 + 273\xi^3 + 252\xi^2 - 420\xi - 560)/1680$
$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 18) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 12\xi + 18) - 3h\nu\kappa^2(\xi^3 + 6\xi^2 + 6\xi + 4)/2 + h\xi\nu\kappa(15\xi^3 + 72\xi^2 + 180\xi + 80)/40 - h\xi^2\nu(15\xi^3 + 126\xi^2 + 252\xi + 280)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi - 5h^2\nu^2\kappa^4(\xi + 4)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 + 40\xi + 72)/(6\xi) - h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^3 + 20\xi^2 + 24\xi + 24)/(4\xi) + h^2\nu^2\kappa(3\xi^4 + 16\xi^3 + 48\xi^2 + 32\xi + 16)/(16\xi) - h^2\nu^2(45\xi^4 + 420\xi^3 + 1008\xi^2 + 1680\xi + 560)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 18) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 12\xi + 18) + 3h\nu\kappa^2(\xi^3 + 6\xi^2 + 6\xi + 4)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 + 72\xi^2 + 180\xi + 80)/40 + h\xi^2\nu(15\xi^3 + 126\xi^2 + 252\xi + 280)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi - h^2\nu^2\kappa^4(5\xi + 16)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 + 32\xi + 42)/(6\xi) - h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^3 + 16\xi^2 + 14\xi + 8)/(4\xi) + h^2\nu^2\kappa(45\xi^3 + 192\xi^2 + 420\xi + 160)/240 - h^2\xi\nu^2(45\xi^3 + 336\xi^2 + 588\xi + 560)/3360$
$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi + 3) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) + 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 + 5\xi + 3) - 3\xi^3\kappa(\xi^2 + 4\xi + 6)/4 + 3\xi^4(5\xi^2 + 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 17) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 34\xi + 42)/3 + h\nu\kappa^2(3\xi^3 + 17\xi^2 + 14\xi + 6)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 + 68\xi^2 + 140\xi + 40)/40 + h\xi^2\nu(15\xi^3 + 119\xi^2 + 196\xi + 140)/560$	$12\xi\kappa^5 - 10\xi\kappa^4(\xi + 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 + 10\xi + 9) - 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 + 5\xi + 3) + 3\xi^3\kappa(\xi^2 + 4\xi + 6)/4 - 3\xi^4(5\xi^2 + 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 13) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 + 26\xi + 18)/3 + h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 + 13\xi + 6)/2 - h\xi^2\nu\kappa(15\xi^2 + 52\xi + 60)/40 + h\xi^3\nu(15\xi^2 + 91\xi + 84)/560$
$6h\nu\kappa^5 - h\nu\kappa^4(5\xi + 12) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 8\xi + 6) - 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 + 4\xi + 2)/2 + 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 + 16\xi + 20)/40 - 3h\xi^3\nu(5\xi^2 + 28\xi + 28)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi - h^2\nu^2\kappa^4(5\xi + 14)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 + 28\xi + 30)/(6\xi) - h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^3 + 14\xi^2 + 10\xi + 4)/(4\xi) + h^2\nu^2\kappa(45\xi^3 + 168\xi^2 + 300\xi + 80)/240 - h^2\xi\nu^2(45\xi^3 + 294\xi^2 + 420\xi + 280)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi + 12) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 + 8\xi + 6) + 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 + 4\xi + 2)/2 - 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 + 16\xi + 20)/40 + 3h\xi^3\nu(5\xi^2 + 28\xi + 28)/560$	$3h^2\nu^2\kappa^5/\xi - 5h^2\nu^2\kappa^4(\xi + 2)/(2\xi) + h^2\nu^2\kappa^3(15\xi^2 + 20\xi + 12)/(6\xi) - h^2\nu^2\kappa^2(3\xi^2 + 10\xi + 4)/4 + h^2\xi\nu^2\kappa(3\xi^2 + 8\xi + 8)/16 - h^2\xi^2\nu^2(15\xi^2 + 70\xi + 56)/1120$

Tablica A.4: Macierz C (prawa połówka)

$12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi - 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) + 3\xi\kappa^2(\xi^3 - 5\xi^2 + 3\xi + 2) + \xi\kappa(3\xi^4 - 12\xi^3 + 18\xi^2 + 8\xi - 24)/4 + \xi^2(15\xi^4 - 105\xi^3 + 126\xi^2 + 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 17) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 34\xi + 42)/3 + h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 - 17\xi + 14)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 - 68\xi^3 + 140\xi^2 - 160)/40 + h\nu(45\xi^5 - 357\xi^4 + 588\xi^3 - 1120\xi + 1680)/1680$	$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(3 - \xi) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) - 3\xi\kappa^2(\xi^3 - 5\xi^2 + 3\xi + 2) - \xi\kappa(3\xi^4 - 12\xi^3 + 18\xi^2 + 8\xi - 24)/4 - \xi^2(15\xi^4 - 105\xi^3 + 126\xi^2 + 140\xi - 280)/280$	$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 13) + h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 26\xi + 18)/3 + h\nu\kappa^2(3\xi^3 - 13\xi^2 + 6\xi + 6)/2 + h\nu\kappa(15\xi^4 - 52\xi^3 + 60\xi^2 + 40\xi - 80)/40 + h\xi\nu(45\xi^4 - 273\xi^3 + 252\xi^2 + 420\xi - 560)/1680$
$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 18) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 12\xi + 18) + 3h\nu\kappa^2(\xi^3 - 6\xi^2 + 6\xi - 4)/2 + h\xi\nu\kappa(15\xi^3 - 72\xi^2 + 180\xi - 80)/40 + h\xi^2\nu(15\xi^3 - 126\xi^2 + 252\xi - 280)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi + 5h^2v^2\kappa^4(\xi - 4)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 - 40\xi + 72)/(6\xi) + h^2v^2\kappa^2(3\xi^3 - 20\xi^2 + 24\xi - 24)/(4\xi) + h^2v^2\kappa(3\xi^4 - 16\xi^3 + 48\xi^2 - 32\xi + 16)/(16\xi) + h^2v^2(45\xi^4 - 420\xi^3 + 1008\xi^2 - 1680\xi + 560)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(18 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 12\xi + 18) - 3h\nu\kappa^2(\xi^3 - 6\xi^2 + 6\xi - 4)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 - 72\xi^2 + 180\xi - 80)/40 - h\xi^2\nu(15\xi^3 - 126\xi^2 + 252\xi - 280)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi + h^2v^2\kappa^4(5\xi - 16)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 - 32\xi + 42)/(6\xi) + h^2v^2\kappa^2 \cdot (3\xi^3 - 16\xi^2 + 14\xi - 8)/(4\xi) + h^2v^2\kappa(45\xi^3 - 192\xi^2 + 420\xi - 160)/240 + h^2\xi v^2(45\xi^3 - 336\xi^2 + 588\xi - 560)/3360$
$-12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(3 - \xi) - 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) - 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 - 5\xi + 3) - 3\xi^3\kappa(\xi^2 - 4\xi + 6)/4 - 3\xi^4(5\xi^2 - 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(17 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 34\xi + 42)/3 - h\nu\kappa^2(3\xi^3 - 17\xi^2 + 14\xi - 6)/2 - h\xi\nu\kappa(15\xi^3 - 68\xi^2 + 140\xi - 40)/40 - h\xi^2\nu(15\xi^3 - 119\xi^2 + 196\xi - 140)/560$	$12\xi\kappa^5 + 10\xi\kappa^4(\xi - 3) + 2\xi\kappa^3(5\xi^2 - 10\xi + 9) + 3\xi^2\kappa^2(\xi^2 - 5\xi + 3) + 3\xi^3\kappa(\xi^2 - 4\xi + 6)/4 + 3\xi^4(5\xi^2 - 35\xi + 42)/280$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(13 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(15\xi^2 - 26\xi + 18)/3 - h\xi\nu\kappa^2(3\xi^2 - 13\xi + 6)/2 - h\xi^2\nu\kappa(15\xi^2 - 52\xi + 60)/40 - h\xi^3\nu(15\xi^2 - 91\xi + 84)/560$
$6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(5\xi - 12) + h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 8\xi + 6) + 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 - 4\xi + 2)/2 + 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 - 16\xi + 20)/40 + 3h\xi^3\nu(5\xi^2 - 28\xi + 28)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi + h^2v^2\kappa^4(5\xi - 14)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 - 28\xi + 30)/(6\xi) + h^2v^2\kappa^2(3\xi^3 - 14\xi^2 + 10\xi - 4)/(4\xi) + h^2v^2\kappa(45\xi^3 - 168\xi^2 + 300\xi - 80)/240 + h^2\xi v^2(45\xi^3 - 294\xi^2 + 420\xi - 280)/3360$	$-6h\nu\kappa^5 + h\nu\kappa^4(12 - 5\xi) - h\nu\kappa^3(5\xi^2 - 8\xi + 6) - 3h\xi\nu\kappa^2(\xi^2 - 4\xi + 2)/2 - 3h\xi^2\nu\kappa(5\xi^2 - 16\xi + 20)/40 - 3h\xi^3\nu(5\xi^2 - 28\xi + 28)/560$	$3h^2v^2\kappa^5/\xi + 5h^2v^2\kappa^4(\xi - 2)/(2\xi) + h^2v^2\kappa^3(15\xi^2 - 20\xi + 12)/(6\xi) + h^2v^2\kappa^2(3\xi^2 - 10\xi + 4)/4 + h^2\xi v^2\kappa(3\xi^2 - 8\xi + 8)/16 + h^2\xi^2v^2(15\xi^2 - 70\xi + 56)/1120$

Tablica A.5: Macierz  $\mathbf{K}$  (lewa połówka)

$8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 4) + 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 + \xi^2\kappa(6\xi^3 - 36\xi^2 + 15\xi + 40)/10 + \xi^2(12\xi^4 - 42\xi^3 + 63\xi^2 + 70\xi - 280)/140$	$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(3\xi - 13)/3 + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 65\xi + 80)/20 + h\xi v\kappa(6\xi^3 - 39\xi^2 + 20\xi + 40)/20 + h\xi v(72\xi^4 - 273\xi^3 + 504\xi^2 + 420\xi - 2240)/1680$	$-8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(4 - \xi) - 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 - \xi^2\kappa(6\xi^3 - 36\xi^2 + 15\xi + 40)/10 - \xi^2(12\xi^4 - 42\xi^3 + 63\xi^2 + 70\xi - 280)/140$	$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(3\xi - 11)/3 + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 55\xi + 40)/20 + h\xi v\kappa(6\xi^3 - 33\xi^2 + 10\xi + 40)/20 + h\xi v(72\xi^4 - 231\xi^3 + 252\xi^2 + 420\xi - 1120)/1680$
$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(\xi - 5) + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 75\xi + 160)/20 + h\xi v\kappa(6\xi^3 - 45\xi^2 + 40\xi - 40)/20 + h\xi^2 v(24\xi^3 - 105\xi^2 + 336\xi - 140)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 16)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(27\xi^2 - 60\xi + 140)/30 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 72\xi^2 + 70\xi - 80)/60 + h^2 \xi v^2(9\xi^3 - 42\xi^2 + 147\xi - 70)/420$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(5 - \xi) - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 75\xi + 160)/20 - h\xi v\kappa(6\xi^3 - 45\xi^2 + 40\xi - 40)/20 - h\xi^2 v(24\xi^3 - 105\xi^2 + 336\xi - 140)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 14)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(54\xi^2 - 105\xi + 200)/60 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 63\xi^2 + 50\xi - 40)/60 + h^2 \xi v^2(36\xi^3 - 147\xi^2 + 420\xi - 140)/1680$
$-8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(4 - \xi) - 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 - 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 12\xi + 5)/10 - 3\xi^4(4\xi^2 - 14\xi + 21)/140$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(13 - 3\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 65\xi + 80)/20 - h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 39\xi + 20)/20 - h\xi^3 v(24\xi^2 - 91\xi + 168)/560$	$8\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 4) + 6\xi^2\kappa^2(3\xi^2 - 5\xi + 5)/5 + 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 12\xi + 5)/10 + 3\xi^4(4\xi^2 - 14\xi + 21)/140$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(11 - 3\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 55\xi + 40)/20 - h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 33\xi + 10)/20 - h\xi^3 v(24\xi^2 - 77\xi + 84)/560$
$4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(\xi - 3) + h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 45\xi + 40)/20 + h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 27\xi + 10)/20 + 3h\xi^3 v(8\xi^2 - 21\xi + 28)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 10)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(54\xi^2 - 75\xi + 80)/60 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 45\xi + 20)/60 + h^2 \xi^2 v^2(12\xi^2 - 35\xi + 56)/560$	$-4h\xi v\kappa^4 + 2h\xi v\kappa^3(3 - \xi) - h\xi v\kappa^2(36\xi^2 - 45\xi + 40)/20 - h\xi^2 v\kappa(6\xi^2 - 27\xi + 10)/20 - 3h\xi^3 v(8\xi^2 - 21\xi + 28)/560$	$2h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 8)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(27\xi^2 - 30\xi + 20)/30 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 36\xi + 10)/60 + h^2 \xi^2 v^2(3\xi^2 - 7\xi + 7)/140$

Tablica A.6: Macierz **K** (prawa połówka)

$4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 2) + 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 + \xi^2\kappa(6\xi^3 - 24\xi^2 + 15\xi + 20)/10 + \xi^2(9\xi^4 - 42\xi^3 + 42\xi^2 + 70\xi - 140)/140$	$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(6\xi - 13)/3 + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 65\xi + 40)/20 + h\xi v\kappa(3\xi^3 - 13\xi^2 + 10\xi + 10)/10 + h\xi v(54\xi^4 - 273\xi^3 + 336\xi^2 + 420\xi - 1120)/1680$	$-4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(2 - \xi) - 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 - \xi^2\kappa(6\xi^3 - 24\xi^2 + 15\xi + 20)/10 - \xi^2(9\xi^4 - 42\xi^3 + 42\xi^2 + 70\xi - 140)/140$	$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(6\xi - 11)/3 + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 55\xi + 20)/20 + h\xi v\kappa(3\xi^3 - 11\xi^2 + 5\xi + 10)/10 + h\xi v(54\xi^4 - 231\xi^3 + 168\xi^2 + 420\xi - 560)/1680$
$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(2\xi - 5) + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 75\xi + 80)/20 + h\xi v\kappa(3\xi^3 - 15\xi^2 + 20\xi - 10)/10 + h\xi^2 v(18\xi^3 - 105\xi^2 + 224\xi - 140)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 8)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(9\xi^2 - 30\xi + 35)/15 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 48\xi^2 + 70\xi - 40)/60 + h^2 \xi v^2(27\xi^3 - 168\xi^2 + 392\xi - 280)/1680$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(5 - 2\xi) - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 75\xi + 80)/20 - h\xi v\kappa(3\xi^3 - 15\xi^2 + 20\xi - 10)/10 - h\xi^2 v(18\xi^3 - 105\xi^2 + 224\xi - 140)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 7)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(36\xi^2 - 105\xi + 100)/60 + h^2 v^2 \kappa(9\xi^3 - 42\xi^2 + 50\xi - 20)/60 + h^2 \xi v^2(27\xi^3 - 147\xi^2 + 280\xi - 140)/1680$
$-4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(2 - \xi) - 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 - 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 8\xi + 5)/10 - 3\xi^4(3\xi^2 - 14\xi + 14)/140$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(13 - 6\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 65\xi + 40)/20 - h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 13\xi + 10)/10 - h\xi^3 v(18\xi^2 - 91\xi + 112)/560$	$4\xi^2\kappa^4 + 4\xi^2\kappa^3(\xi - 2) + 3\xi^2\kappa^2(4\xi^2 - 10\xi + 5)/5 + 3\xi^3\kappa(2\xi^2 - 8\xi + 5)/10 + 3\xi^4(3\xi^2 - 14\xi + 14)/140$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(11 - 6\xi)/3 - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 55\xi + 20)/20 - h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 11\xi + 5)/10 - h\xi^3 v(18\xi^2 - 77\xi + 56)/560$
$2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(2\xi - 3) + h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 45\xi + 20)/20 + h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 9\xi + 5)/10 + h\xi^3 v(18\xi^2 - 63\xi + 56)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 5)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(36\xi^2 - 75\xi + 40)/60 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 30\xi + 20)/60 + h^2 \xi^2 v^2(27\xi^2 - 105\xi + 112)/1680$	$-2h\xi v\kappa^4 + h\xi v\kappa^3(3 - 2\xi) - h\xi v\kappa^2(24\xi^2 - 45\xi + 20)/20 - h\xi^2 v\kappa(3\xi^2 - 9\xi + 5)/10 - h\xi^3 v(18\xi^2 - 63\xi + 56)/560$	$h^2 v^2 \kappa^4 + h^2 v^2 \kappa^3(3\xi - 4)/3 + h^2 v^2 \kappa^2(9\xi^2 - 15\xi + 5)/15 + h^2 \xi v^2 \kappa(9\xi^2 - 24\xi + 10)/60 + h^2 \xi^2 v^2(27\xi^2 - 84\xi + 56)/1680$

Tablica A.7: Macierz **E**

$24\xi^2\kappa^4/h-$ $48\xi^2\kappa^3/h+$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h+$ $12\xi^2\kappa(1-\xi^2)/h+$ $3\xi^2(\xi^4+5\xi^2-20)/(10h)$	$12\xi v\kappa^4-$ $26\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+2)+$ $\xi v\kappa(12-13\xi^2)/2+$ $\xi v(3\xi^4+20\xi^2-80)/20$	$-24\xi^2\kappa^4/h+$ $48\xi^2\kappa^3/h-$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h+$ $12\xi^2\kappa(\xi^2-1)/h-$ $3\xi^2(\xi^4+5\xi^2-20)/(10h)$	$12\xi v\kappa^4-$ $22\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)+$ $\xi v\kappa(12-11\xi^2)/2+$ $\xi v(3\xi^4+10\xi^2-40)/20$
$12\xi v\kappa^4-$ $30\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+4)-$ $3\xi v\kappa(5\xi^2+4)/2+$ $\xi^3 v(3\xi^2+40)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $16hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+14)-$ $4hv^2\kappa(\xi^2+1)+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+140)/120$	$-12\xi v\kappa^4+$ $30\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+4)+$ $3\xi v\kappa(5\xi^2+4)/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+40)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $14hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+10)-$ $hv^2\kappa(7\xi^2+4)/2+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+100)/120$
$-24\xi^2\kappa^4/h+$ $48\xi^2\kappa^3/h-$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h+$ $12\xi^4\kappa/h-$ $3\xi^4(\xi^2+5)/(10h)$	$-12\xi v\kappa^4+$ $26\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+2)+$ $13\xi^3 v\kappa/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+20)/20$	$24\xi^2\kappa^4/h-$ $48\xi^2\kappa^3/h+$ $6\xi^2\kappa^2(2\xi^2+3)/h-$ $12\xi^4\kappa/h+$ $3\xi^4(\xi^2+5)/(10h)$	$-12\xi v\kappa^4+$ $22\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)+$ $11\xi^3 v\kappa/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+10)/20$
$12\xi v\kappa^4-$ $18\xi v\kappa^3+$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)-$ $9\xi^3 v\kappa/2+$ $\xi^3 v(3\xi^2+10)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $10hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+4)-$ $5h\xi^2 v^2\kappa/2+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+40)/120$	$-12\xi v\kappa^4+$ $18\xi v\kappa^3-$ $6\xi v\kappa^2(\xi^2+1)+$ $9\xi^3 v\kappa/2-$ $\xi^3 v(3\xi^2+10)/20$	$6hv^2\kappa^4-$ $8hv^2\kappa^3+$ $hv^2\kappa^2(3\xi^2+2)-$ $2h\xi^2 v^2\kappa+$ $h\xi^2 v^2(9\xi^2+20)/120$

# Bibliografia

- [1] J.H. Argyris i A.S.L. Chan. Application of the finite elements in space and time. *Ing. Archiv*, 41:235–257, 1972.
- [2] J.H. Argyris i D.W. Scharpf. Finite elements in space and time. *Nucl. Engng Design*, 10:456–469, 1969.
- [3] J.H. Argyris i D.W. Scharpf. Finite elements in time and space. *Aeron. J. Roy. Aeron. Soc.*, 73:1041–1044, 1969.
- [4] C. Bajer i A. Podhorecki. Space–time element method in structural dynamics. *Arch. of Mech.*, 41:863–889, 1989.
- [5] C.I. Bajer. Notes on the stability of non–rectangular space–time finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24:1721–1739, 1987.
- [6] C.I. Bajer i C.G. Bonthoux. State–of–the–art in true space–time finite element method. *Shock Vibr. Dig.*, 20:3–11, 1988.
- [7] C.I. Bajer i B. Dyniewicz. Space-time approach to numerical analysis of a string with a moving mass. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2008. DOI: 10.1002/nme.2372.
- [8] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming i P. Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 139(1-4):3–47, July 1996.
- [9] R. Bogacz, T. Krzyzynski i K. Popp. On the generalization of mathew’s problem of the vibration of a beam on elastic foundation. *Z. angew. Math. Mech.*, 69:243–252, 1989.
- [10] W.W. Bolotin. On the influence of moving load on bridges (w j. ros.). *Reports of Moscow Univ. of Railway Transport MIIT*, 74:269–296, 1950.
- [11] W.W. Bolotin. Problems of bridge vibration under the action of the moving load (w j. ros.). *Izvestiya AN SSSR, Mekhanika i Mashinostroenie*, 4:109–115, 1961.
- [12] W. Cyganecki. Kryterium doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):389–397, 1979.
- [13] W. Cyganecki. O sposobach doboru wymiarów elementu czasoprzestrzennego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(4):717–726, 1980.

- [14] A.S. Dmitrijev. The analysis of solutions of problems with lateral oscillatory vibrations of various beam structures under the motion of non spring point load (w j. ros.). *Machine Dynamics Problems*, 24:18–28, 1985.
- [15] G. Doetsch. *Praktyka przekształcenia Laplace'a*. PWN, Warszawa, 1964.
- [16] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Moving loads – analytical and numerical approaches. W: W. Szcześniak, editor, *Theoretical Foundations in Civil Engineering*, pages 37–48. OWPW Warsaw, 2006.
- [17] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Discontinuous trajectory of the mass particle moving on a string or a beam. *Machine Dyn. Probl.*, 31(3), 2007.
- [18] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Inertial load moving on a string – discontinuous solution. W: W. Szcześniak, editor, *Theoretical Foundations in Civil Engineering*, pages 141–150. OWPW Warsaw, 2007.
- [19] B. Dyniewicz i C.I. Bajer. Paradox of the particle's trajectory moving on a string. *Arch. Appl. Mech.*, 2008. DOI: 10.1007/s00419-008-0222-9.
- [20] F.V. Filho. Finite element analysis of structures under moving loads. *The Shock and Vibration Digest*, 10(8):27–35, 1978.
- [21] M.A. Foda i Z. Abduljabbar. A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass. *J. Sound Vibr.*, 210:295–306, 1998.
- [22] I. Fried. Finite element analysis of time-dependent phenomena. *AIAA J.*, 7:1170–1173, 1989.
- [23] L. Fryba. *Vibrations of solids and structures under moving loads*. Academia, Prague, 1972.
- [24] M.E. Gurtin. Variational principles for linear elastodynamics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:34–50, 1964.
- [25] M.E. Gurtin. Variational principles for linear initial-value problems. *Quart. Appl. Math.*, 22:252–256, 1964.
- [26] I. Herrera i J. Bielak. A simplified version of Gurtin's variational principles. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 53:131–149, 1974.
- [27] M. Ichikawa, Y. Miyakawa i A. Matsuda. Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass. *J. Sound Vibr.*, 230:493–506, 2000.
- [28] C.E. Inglis. *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*. Cambridge University Press, 1934.
- [29] N.Z. Jakushev. Certain problems of dynamics of the beam under moving load (w j. ros.). *Publisher of the Kazan Univ.*, 12:199–220, 1974.
- [30] R.J. Jiang, F.T.K. Au i Y.K. Cheung. Identification of masses moving on multi-span beams based on a genetic algorithm. *Comput. and Struct.*, 81:2137–2148, 2003.

- [31] Z. Kacprzyk. Superelement czasoprzestrzenny. *Archiwum Inż. Ląd.*, 28(1–2):47–55, 1982.
- [32] Z. Kacprzyk. O zastosowaniu funkcji ważonych w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Prace Naukowe, budownictwo, Politechnika Warszawska*, (85):83–94, 1984.
- [33] Z. Kacprzyk i T. Lewiński. Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom. *Eng. Trans.*, 31(2):213–240, 1983.
- [34] M. Klasztorny. Dynamiczna stabilność konstrukcji mostowych poddanych działaniu inercyjnych obciążeń ruchomych. *Rozprawy Inżynierskie*, 34(3):215–231, 1986.
- [35] M. Klasztorny. Drgania jednotorowych mostów kolejowych wywołane ruchem pociągów z dużymi prędkościami. *Prace Naukowe Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocł.*, 13, 1987.
- [36] M. Kleiber. *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, pages 117–120. PWN, 1985.
- [37] A.V. Kononov i R. de Borst. Instability analysis of vibrations of a uniformly moving mass in one and two-dimensional elastic systems. *European J. Mech.*, 21:151–165, 2002.
- [38] A.N. Kriłow. Mathematical collection of papers of the academy of sciences. *Matematicheskii sbornik Akademii Nauk*, 61, 1905.
- [39] Z. Kączkowski. Vibration of a beam under a moving load. *Proc. of Vibr. Probl.*, 4(4):357–373, 1963.
- [40] Z. Kączkowski. O drganiach belki mostowej pod wpływem przesuujących się obciążeń. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo*, 20, 1967.
- [41] Z. Kączkowski. The method of finite space–time elements in dynamics of structures. *J. Tech. Phys.*, 16(1):69–84, 1975.
- [42] Z. Kączkowski. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 22(3):365–378, 1976.
- [43] Z. Kączkowski. General formulation of the stiffness matrix for the space–time finite elements. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):351–357, 1979.
- [44] Z. Kączkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych — jej zalety i wady. W: *VIII Symp. Dynamiki i Konstrukcji*, pages 259–266, Jawor, 1993.
- [45] Z. Kączkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych. W: *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, pod red. M. Kleibera, pages 154–206. PWN Warszawa, 1995.
- [46] Z. Kączkowski i J. Langer. Synthesis of the space–time finite element method. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(1):11–17, 1980.



- [47] Z. Kączkowski i M. Żysko. Drgania giętne pręta metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Archiwum Inż. Ląd.*, 24(1):67–78, 1978.
- [48] J. Langer. Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 19(2):255–262, 1973.
- [49] J. Langer. Analiza dynamiczna przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 20(4):594–599, 1974.
- [50] J. Langer. Tłumienie pasożytnicze w komputerowych rozwiązaniach równania różniczkowego ruchu. *Archiwum Inż. Ląd.*, 25(3):359–369, 1979.
- [51] J. Langer i M. Klasztorny. Drgania belki na podporach podatnych, wywołane obciążeniem ruchomym. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 20(2):255–264, 1974.
- [52] J. Langer i M. Klasztorny. Dynamika belki mostowej obciążonej masą ruchomą rozłożoną nierównomiernie. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 26(4):657–667, 1980.
- [53] K.-Y. Lee i A. A. Renshaw. Solution of the moving mass problem using complex eigenfunction expansions. *J. Appl. Mech.*, 67:823–827, 2000.
- [54] A.N. Lowan. On transverse oscillations of beams under the action of moving variable loads. *Philosophical Magazine*, 19:708–715, 1935.
- [55] G.G.G. Lueschen, L.A. Bergman i D.M. McFarland. Green's function for uniform timoshenko beams. *J. Sound Vibr.*, 194:93–102, 1996.
- [56] Seroy Mackertich. Response of a beam to a moving mass. *J. Acoust. Sec. Am*, 92:1766–1769, 1992.
- [57] G. Michaltsos, D. Sophianopoulos i A.N. Kounadis. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *J. Sound Vibr.*, 191:357–362, 1996.
- [58] A.B. Morgaevskii. Critical velocities calculation in the case of a beam under moving load (w j. ros.). *Mekhanika i mashinostroenie i zvestiya AN SSSR, OTN*, 3:176–178, 1959.
- [59] D. E. Newland. *An Introduction to Random Vibration Spectral and Wavelet Analysis*. John Wiley Sons, New York, 1993.
- [60] J.T. Oden. A generalized theory of finite elements, II. Applications. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1:247–259, 1969.
- [61] J. Panovko. Historical outline of the theory of dynamic influence of moving load (w j. ros.). *Engineering Academy of Air Forces*, 17:8–38, 1948.
- [62] A. Podhorecki. Stabilność rozwiązań w metodzie elementów czasoprzestrzennych. *Rozpr. Inż.*, 37(1):41–51, 1989.
- [63] Renaudot. Etude de l'influence des charges en mouvement sur la resistance, des ponts metallique a poutres droites. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1:145, 1861.

- [64] S. Sadiku i H.H.E. Leipholz. On the dynamics of elastic systems with moving concentrated masses. *Ing. Archiv*, 57:223–242, 1987.
- [65] H. Saller. *Einfluss bewegter Last auf Eisenbahnoberbau und Brücken*. Kreidels Verlag, Berlin und Wiesbaden, 1921.
- [66] A. Schallenkamp. Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten. *Arch. of Appl. Mech. (Ingenieur Archiv)*, 8(3):182–198, June 1937.
- [67] J.B. Seaborn. *Hypergeometric functions and their applications*. Springer, New York, 1991.
- [68] C.E. Smith. Motion of a stretched string carrying a moving mass particle. *J. Appl. Mech.*, 31(1):29–37, 1964.
- [69] W. Soedel. *Vibrations of Shells and Plates*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.
- [70] G.G. Stokes. Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges. *Trans. Cambridge Philosoph.*, 8:707–735, 1849.
- [71] W. Szcześniak. Warunki początkowe w zagadnieniu belki Timoshenki. *Prace Naukowe, Politechnika Warszawska, budownictwo 108*, 1989.
- [72] W. Szcześniak. Inercyjne obciążenia ruchome na belkach. *Prace Naukowe, Politechnika Warszawska, budownictwo 112*, 1990.
- [73] W. Szcześniak. Zastosowanie równań Lagrange’a drugiego rodzaju w zagadnieniu dynamicznym belki Timoshenki pod ruchomym obciążeniem inercyjnym, 1990.
- [74] W. Szcześniak. Wybrane zagadnienia dynamiki płyt poddanych inercyjnym obciążeniom ruchomym. *Prace Naukowe, Politechnika Warszawska, budownictwo 119*, 1992.
- [75] S.P. Timoshenko. On the forced vibration of bridges. *Philosophical Magazine*, 43:1018, 1922.
- [76] E.C. Ting, J. Genin i J.H. Ginsberg. A general algorithm for moving mass problems. *J. Sound Vib.*, 33(1):49–58, 1974.
- [77] R. Willis. Preliminary essay to the Appendix B. Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures. *W. Clowes and Sons*, 1849.
- [78] M. Witkowski. Metoda elementów czasoprzestrzennych jako ciąg zadań typu statycznego. *Archiwum Inż. Ląd.*, 26(4):727–734, 1980.
- [79] M. Witkowski. *O czasoprzestrzeni w dynamice budowli*. *Prace Naukowe, budownictwo 80*. Politechnika Warszawska, 1983.
- [80] M. Witkowski. Scena i kulisy metody elementów czasoprzestrzennych. W: *Księga jubileuszowa profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, pages 45–55. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1996.

- 
- [81] R. Wyrzykowski. *Metody matematyczne fizyki*. FOSZE, Rzeszów, 1992.
- [82] X. Xu, W. Xu i J. Genin. A non-linear moving mass problem. *J. Sound Vibr.*, 204:495–504, 1997.
- [83] P. Śniady. Drgania dźwigarów wywołane ruchomym obciążeniem. *Prace Naukowe Inst. Inż. Ląd. Pol. Wrocł.*, 21, 1976.
- [84] P. Śniady. Tłumione drgania struny i pręta wywołane ruchomą siłą. *Rozprawy Inżynierskie*, 34(1):33–43, 1976.