
• INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI •
• POLSKA AKADEMIA NAUK •

ANDRZEJ ŚWIERCZ

IDENTYFIKACJA DEFECTÓW
W KONSTRUKCJACH PRĘTOWYCH NA PODSTAWIE
METODY DYSTORSJI WIRTUALNYCH
W DOMENIE CZĘSTOŚCI



WARSZAWA 2007

P R A C A D O K T O R S K A

Autor :

Mgr inż. ANDRZEJ ŚWIERCZ

Promotor :

Prof. dr hab. JAN HOLNICKI-SZULC

Recenzenci :

Prof. dr hab. WIESŁAW OSTACHOWICZ

Doc. dr hab. CZESŁAW BAJER

Spis treści

Spis treści	3
Oznaczenia i symbole	5
1 Wstęp	9
1.1 Zarys literatury	9
1.2 Metoda Dystorsji Wirtualnych – historia i aplikacje	11
1.3 Cele pracy	12
1.4 Koncepcja rozprawy	12
2 Podstawy Metody Dystorsji Wirtualnych	15
2.1 Wprowadzenie	15
2.2 Koncepcja Metody Dystorsji Wirtualnych	15
2.2.1 Podstawowe pojęcia	16
2.2.2 Stan dystorsyjny konstrukcji	18
2.2.3 Macierz wpływu	21
2.2.4 Uogólniona macierz wpływu	23
2.3 Modelowanie parametrów konstrukcji ramowych	24
2.3.1 Podstawowe równania belek	24
2.3.2 Składowe dystorsji wirtualnych elementu ramowego	26
2.3.3 Związki dystorsji wirtualnych z modyfikacją sztywności	32
2.3.4 Macierz wpływu konstrukcji ramowej	33
2.3.5 Modelowanie parametrów modyfikacji konstrukcji	35
3 Metoda Dystorsji Wirtualnych w domenie częstości	39
3.1 Wprowadzenie	39
3.1.1 Drgania układu o jednym stopniu swobody	39
3.1.2 Drgania podłużne pręta	44
3.2 Dystorsje wirtualne w dziedzinie częstości	46
3.2.1 Równania ruchu	46
3.2.2 Harmoniczne dystorsje w elemencie skończonym	47

3.2.3	Modyfikacje parametrów konstrukcji a dystorsje wirtualne . . .	48
3.3	Macierze wpływu	50
3.4	Konstrukcja modelowana dystorsjami	50
3.5	Analiza wrażliwości	52
4	Zastosowanie VDM-F do identyfikacji defektów	55
4.1	Wprowadzenie	55
4.2	Sformułowanie problemu optymalizacji	55
4.2.1	Funkcja celu	56
4.2.2	Analiza wrażliwości funkcji celu	57
4.2.3	Metoda największego spadku	57
4.2.4	Problem optymalizacji kierunkowej (line search)	58
4.3	Algorytm identyfikacji uszkodzeń	58
4.4	Podstawy Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych	60
4.5	Problem lokalizacji wymuszeń i selekcji częstości	62
4.6	Przykłady numeryczne	67
4.6.1	Kratownica płaska	67
4.6.2	Belka wspornikowa	70
4.7	Porównanie metod VDM-F i VDM-T	73
5	Weryfikacja doświadczalna	75
5.1	Wprowadzenie	75
5.2	Elementy systemu monitorowania konstrukcji	75
5.3	Identyfikacja uszkodzeń w kratownicy	77
5.3.1	Stanowisko doświadczalne	77
5.3.2	Model numeryczny	79
5.3.3	Analiza odwrotna	83
6	Podsumowanie	89
6.1	Oryginalne osiągnięcia pracy	89
6.2	Wnioski końcowe	90
6.3	Plany przyszłych badań	91
	Bibliografia	93

Oznaczenia i symbole

Oznaczenia :

$\hat{(\cdot)}$ – wskazuje na zmodyfikowany parametr konstrukcyjny, np.: \hat{A} , \hat{E} ,

$\tilde{(\cdot)}$ – wielkości harmoniczne w funkcji czasu, np.: $\tilde{u}_i(t)$, $\tilde{\varepsilon}_\alpha(t)$,

$\overset{L}{(\cdot)}$ – dotyczy liniowej części danej wielkości pochodzącej od obciążenia zewnętrznego, np. przemieszczenia $\overset{L}{u}_i$ lub odkształcenia $\overset{L}{\varepsilon}_\alpha$

$\overset{R}{(\cdot)}$ – oznacza rezydualną część danej wielkości, będącej wynikiem wstępnego wirtualnego sprzężenia dystorsjami modelującymi modyfikacje konstrukcji

$\overset{0}{(\cdot)}$ – dotyczy dystorsji wirtualnej

$\overset{M}{(\cdot)}$ – stanowią wielkości otrzymane z pomiarów doświadczalnych lub symulowane numerycznie dla konstrukcji zmodyfikowanej

$(\cdot)^e$ lub $(\cdot)_e$ – oznacza wielkości związane z elementem skończonym, określone w lokalnym układzie odniesienia

Ważniejsze symbole :

1_γ – wektor o jednostkowych składowych

$A_{\alpha\beta}$ – macierz wykorzystywana do wyznaczania pola dystorsji wirtualnych i ich gradientów

$B_{i\alpha\omega}^\varepsilon$, $B_{ik\omega}^p$ – macierze wpływu, których kolumny stanowią amplitudy przemieszczeń wywołanych wprowadzeniem harmonicznym jednostkowych dystorsji, odpowiednio $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{0}{p}_k$, o kolejnych częstościach ze zbioru Ω

C_{ij} – globalna macierz tłumienia konstrukcji

$D_{\alpha\beta}$ – odkształceniowa macierz wpływu lub krótko – macierz wpływu

$D_{\alpha\beta\omega}^{\varepsilon}$, $D_{\alpha i\omega}^p$ – macierze wpływu, których kolumny stanowią amplitudy odkształceń wywołanych wprowadzeniem harmonicznym, jednostkowych dystorsji, odpowiednio ε_{α}^0 i p_i^0 , o kolejnych częstościach ze zbioru Ω

$\check{D}_{A\beta}$ – uogólniona macierz wpływu,

$\check{D}_{A\beta\omega}^{\varepsilon}$, $\check{D}_{Ai\omega}^p$ – macierze wpływu, których kolumny stanowią amplitudy wybranych odpowiedzi wywołanych wprowadzeniem harmonicznym jednostkowych dystorsji, odpowiednio ε_{α}^0 i p_i^0 , o kolejnych częstościach ze zbioru Ω

$\delta_{\alpha\beta}$ – macierz jednostkowa

$\Phi_{\alpha\gamma}^{(\cdot)}$ – macierz transformacji wektora parametrów konstrukcji $\vartheta_{\gamma}^{(\cdot)}$ do wektora parametrów modyfikacji μ_{α}

$\varepsilon_{\varepsilon}^e$, $\varepsilon_{\varkappa}^e$, ε_{χ}^e – składowe odkształcenia ramowego elementu skończonego

ε_{α} – wektor składowych odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami; w przypadku kratownicy, jego wymiar jest równy liczbie elementów

ε_{α}^L – wektor składowych odkształceń konstrukcji początkowej wywołany obciążeniem zewnętrznym

ε_{α}^R – wektor składowych odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami wywołany stanem sprężonym (wprowadzeniem dystorsji wirtualnych)

$\varepsilon_{\alpha\omega}$ – macierz składowych amplitud odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami, której kolejne kolumny są związane z częstością wymuszenia

$\varepsilon_{\alpha\omega}^L$ – macierz składowych amplitud odkształceń konstrukcji początkowej wywołany obciążeniami zewnętrznymi o kolejnych częstościach ze zbioru Ω

$\varepsilon_{\alpha\omega}^R$ – macierz składowych amplitud odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami wywołany stanami sprężonymi

ε_{α}^0 – wektor składowych dystorsji wirtualnych nałożonych na konstrukcję

F – funkcja celu problemu optymalizacji

$\nabla_{\gamma} F$ – gradient funkcji celu

F_i – wektor obciążeń węzłowych konstrukcji

f_A – wybrane odpowiedzi konstrukcji np. przemieszczenia lub odkształcenia w lokalizacjach A

$\check{g}_{\alpha\gamma}^{(\cdot)}$ – gradient dystorsji wirtualnych względem zadanego wektora parametrów konstrukcji $\vartheta_{\gamma}^{(\cdot)}$

K_{ij} – globalna macierz sztywności konstrukcji

k_{EA}^e, k_{EJ}^e – sztywność osiowa i zgięciowa elementu skończonego

$L_{\alpha i}^e$ – lokalna macierz odkształceń

$L_{\alpha Q}^e$ – globalna macierz odkształceń

$\lambda^{(k)}$ – w optymalizacji: długość kroku (promienia)

λ – w podrozdziale 2.3.2 oznaczono wartości własne macierzy sztywności K_{ij}^e ramowego elementu skończonego

λ_α – wektor parametrów intensywności uszkodzeń konstrukcji

M^e – moment zginający w skończonym elemencie

M_{ij} – globalna macierz macierz mas konstrukcji

$\overset{A}{M}_{ij\gamma}$ oraz $\overset{J}{M}_{ij\gamma}$ – trójwymiarowa macierz macierz mas, której kolejne przekroje stanowią macierze mas elementu γ w globalnym układzie uogólnionych współrzędnych zależną wyłącznie odpowiednio od jego pola przekroju poprzecznego A_γ i momentu bezwładności J_γ

μ_α – wektor parametrów modyfikacji ustroju, którego wymiar jest zgodny z liczbą składowych dystorsji wirtualnych wprowadzonych do konstrukcji

N^e – siła podłużna w skończonym elemencie

Ω – zbiór częstości wymuszeń, którym poddawana jest konstrukcja

ω – częstość wymuszenia

$\overset{0}{p}_i$ – wektor składowych dystorsji wirtualnych modelujących zmiany bezwładności konstrukcji

q_i^e – wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu skończonego

$S_{i\alpha}^e$ – lokalna macierz parametrów sztywności

$S_{P\alpha}$ – globalna macierz parametrów sztywności

σ_α – wektor składowych naprężeń konstrukcji modelowanej dystorsjami

$\overset{L}{\sigma}_\alpha$ – wektor składowych naprężeń konstrukcji początkowej wywołany obciążeniem zewnętrznym

$\overset{R}{\sigma}_\alpha$ – wektor składowych naprężeń konstrukcji modelowanej dystorsjami wywołany stanem sprężonym

T^e – siła poprzeczna w skończonym elemencie

T_{jQ} – macierz transformacji do układu globalnego

$\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ – wektor modelowanych parametrów konstrukcji, np. modułów Young’a: ϑ_γ^E

u_i – wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych konstrukcji

Indeksy :

$(\cdot)_\alpha, (\cdot)_\beta, (\cdot)_\delta$ – związane ze składowymi odkształcenia, wektora modyfikacji parametrów konstrukcji

$(\cdot)_\gamma$ – związane z elementami skończonymi konstrukcji; w przypadku kratownic jest on równoważny z indeksowaniem składowych odkształcenia

$(\cdot)_\omega$ – przebiega po kolejnych częstościach wymuszenia

$(\cdot)_i, (\cdot)_j, (\cdot)_k$ – związane ze stopniami swobody konstrukcji lub elementu skończonego

$(\cdot)_A, (\cdot)_N$ – związane ze wybranymi lokalizacjami pomiarowymi np. $f_A, D_{A\alpha}$; w szczególności mogą odnosić się do określonych stopni swobody

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Zarys literatury

Problem będący tematem niniejszej rozprawy należy do dziedziny zajmującej się badaniem i oceną stanu technicznego konstrukcji (Structural Health Monitoring, SHM) intensywnie rozwijającej się w ostatnich latach. Wyczerpującą definicję i zakres podejmowanych problemów przez SHM można znaleźć w pracy [1].

Zależnie od zakresu prowadzonych badań jej celem jest wykrycie obecności, lokalizacji, a także intensywności pojedynczego lub wielokrotnych uszkodzeń. Bardziej zaawansowane metody pozwalają oszacować czas, przez który konstrukcja może być jeszcze użyteczna. Metody monitorowania konstrukcji możemy podzielić na lokalne – wywodzących się z tzw. badań nieniszczących (Non-Destructive Testing, NDT) oraz globalne. Pierwszą grupę – ze względu na rodzaj wykorzystywanych zjawisk fizycznych – możemy podzielić na następujące metody:

- emisji akustycznej (Acoustic Emission, AE) – badanie zanikającej fali sprężystej, będącej efektem gwałtownego wyzwolenia energii nagromadzonej w materiale przez propagujące się mikro uszkodzenia [2], [3]. Obecność naprężeń resztkowych wywołuje – pod wpływem zewnętrznego obciążenia – wyzwolenie energii sprężystej i następuje emisja ciągu zanikających fal sprężystych;
- ultrasonograficzne (Ultrasonic Testing, UT) – wykorzystuje zjawisko rozchodzenia się, rozpraszania, odbicia, osłabienie fali ultradźwiękowej [4]. Do identyfikacji uszkodzeń najczęściej stosowane są fale Lamba (guided Lamb waves) rozcho-

dzącej się w ośrodku stałym ograniczonym dwoma powierzchniami (blachy, płyty), którego grubość jest porównywalna z długością fali. Wady konstrukcyjne są wykrywane poprzez analizę zaburzeń fali ultradźwiękowej. Badania akustyczno-ultrasonograficzne łączą techniki wykorzystywane w AE i UT, których przykłady można znaleźć w [5], [6]. Zjawisko rozchodzenia się fal o wyższych częstotliwościach efektywnie jest modelowane Metodą Elementów Spektralnych (Spectral Element Method, SEM) [7], w której macierz sztywności zdefiniowana jest w dziedzinie częstotliwości;

- prądów wirowych (Eddy Currents, EC) – jest metodą powierzchniową i elektromagnetyczną, stosowaną dla materiałów metalowych do głębokości kilku lub kilkunastu milimetrów. Analiza wartości zmian pola elektromagnetycznego, amplitudy oraz przesunięcia fazowego napięcia i natężenia pozwala na bardzo precyzyjną ocenę stanu badanego materiału, występujących nieciągłości w postaci np. pęknięć, ubytków erozyjnych lub korozyjnych, ocenę ich wielkości oraz głębokości;
- radiograficzne (Radiographic Testing, RT) – wykorzystywane do badań wewnętrznej struktury materiałów przy wykorzystaniu promieniowania jonizującego (głównie rentgenowskiego), lub promieni gamma;
- inne: magnetyczno-proszkowe (Magnetic Particle Inspection, MPI), penetracyjne (Penetrant Testing);

Badania przeprowadzane tymi metodami charakteryzują się wysoką dokładnością identyfikacji wad materiałowych oraz ograniczonym zasięgiem – wymagają określenia z góry monitorowanej strefy (m.in. w przemyśle lotniczym do wykrywania pęknięć np. w skrzydle samolotu). Przegląd metod wysokoczęstotliwościowych można znaleźć w pracy [8].

Podstawą metod globalnych, do której zalicza się sformułowane prezentowane w niniejszej pracy, jest analiza drgań konstrukcji o niskiej częstotliwości, poniżej 5 kHz (Vibration-Based Methods, VB). Zazwyczaj identyfikacja uszkodzeń wymaga wykalibrowanego modelu numerycznego z monitorowanym obiektem. Uszkodzenie wywołuje zmianę parametrów fizycznych lub/i geometrycznych, które z kolei prowadzi do zmiany dynamicznej odpowiedzi badanego obiektu. Proces identyfikacji polega na dostosowaniu modelowanych parametrów konstrukcji do jej aktualnego stanu. Te zmiany są rejestrowane przez układ odpowiednio rozmieszczonych sensorów na konstrukcji poddanej określone mu wymuszeniu, które jest powtarzane w pewnych odstępach czasowych. Przegląd metod niskoczęstotliwościowych można znaleźć w pracy [9].

Zależnie od metody stosowane są różne kryteria oceny uszkodzeń: analiza zmian częstotliwości i modów własnych [10, 11], częstotliwości antyrezonansowych [12], krzywizn modalnych [13], energii odkształceń modalnych (Modal Strain Energy) [14, 15], kinematycznej energii modalnej (Modal Kinetic Energy) [16]. Ciekawą alternatywą jest metoda obliczeń bezpośrednich sztywności (Direct Stiffness Calculation, DSC) [17].

Oprócz techniki MES, stosowana jest Metoda Elementów Brzegowych (Boundary Element Method, BEM) [18, 19] oraz wspomniana powyżej Metoda Elementów Spektralnych.

Część zagadnień SHM jest oparta na sztucznej inteligencji (Artificial Intelligence, AI), wykorzystując przy tym: transformacje falkowe ([20, 21]), sztuczne sieci neuronowe [19, 22, 23], algorytmy genetyczne [24] oraz analizy statystyczne [25, 26, 27]. Choć sztuczna inteligencja stanowi dość efektywne narzędzie, to jednak pomija interpretację fizyczną analizowanych sygnałów (odpowiedzi) konstrukcji.

SHM znalazły już zastosowanie głównie w branży lotniczej: samoloty [28], satelity [29] oraz inżynierii lądowej: mosty [30, 31, 32, 33], budowle: [34]. Inne aplikacje to: sieci wodne [35], rurociągi [36] oraz konstrukcje kompozytowe [37].

1.2 Metoda Dystorsji Wirtualnych – historia i aplikacje

Modelowanie defektów materiałowych przy wykorzystaniu pól deformacji wstępnych została zaprezentowana w pracy [38], a następnie [39], które zostało wykorzystane do opisu stanów naprężeń w jedno- i wielofazowych ośrodkach sprężystych (por. [40, 41, 42, 43]). Optymalne przeprojektowywanie konstrukcji sprężystych z wykorzystaniem wirtualnych pól deformacji zostało przedstawione w pracach [44, 45, 46]. Ten problem jest podejmowany w [47] oraz wraz z analizą wrażliwości w pracy doktorskiej [48]. Analiza postępującego zniszczenia i niezawodności konstrukcji jest stosowana przy wykorzystaniu Metody Dystorsji Wirtualnych w komercyjnym oprogramowaniu *RASOS*.

Metoda Dystorsji Wirtualnych (MDW) znalazła zastosowanie do modelowania naprężeń konstrukcji adaptacyjnych [49, 50], a praca [51] do tego celu podejmuje temat optymalnego położenia aktywatorów. Podobne zagadnienie podejmowane były w pracach [52, 53, 50, 49] i dedykowane aktywnemu sterowaniu konstrukcji. Rozpraszanie energii w konstrukcjach adaptacyjnych za pomocą MDW opisane zostało w publikacjach [54, 55, 56].

Prace [57, 58, 59, 60] poświęcone są monitorowaniu obiektów historycznych z zastosowaniem modelowania dystorsyjnego. Oryginalną aplikację Metody Dystorsji Wirtualnych przedstawiono również w publikacji [61] do monitorowania wycieków w sieciach wodnych. Wykorzystano tutaj analogię topologiczną pomiędzy kratownicami a sieciami wodnymi modelowanymi za pomocą grafów oraz analogie między prawami opisującymi te systemy. Analogię praw mechaniki i praw elektrycznych wraz z MDW zastosowano do monitorowania ciągłości obwodów elektrycznych [62, 63].

W rozprawie doktorskiej [64] poruszony został problem identyfikacji delaminacji oraz wykorzystanie delaminacji do tłumienia drgań w wiotkich konstrukcjach. Z kolei, identyfikacja obciążenia o charakterze impulsowym za pomocą MDW została opisana w pracy [65]. Praca doktorska [66] dotyczy identyfikacji uszkodzeń w konstrukcjach prętowych przy zastosowaniu impulsowych dystorsji wirtualnych.

1.3 Cele pracy

Głównym celem rozprawy jest opracowanie metody (VDM-F, bazującej na *Metodzie Dystorsji Wirtualnych*) szybkiej reanalizy konstrukcji obciążanej wymuszeniem harmonicznym o ustalonej częstotliwości oraz wykorzystanie tej metody do identyfikacji defektów w konstrukcjach szkieletowych. Dotychczas stosowane podejście sformułowane w domenie czasowej (*Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych*, VDM-T) pozwala na przeprowadzenie takich reanaliz, jednak wymaga znacznych nakładów obliczeniowych i jest zadaniem czasochłonnym [66]. Alternatywne sformułowanie VDM-F ma na celu istotną redukcję tych kosztów.

Celami szczegółowymi są:

- opracowanie podstaw teoretycznych metody VDM-F wraz z algorytmami w ujęciu Metody Dystorsji Wirtualnych oraz Metody Elementów Skończonych. Będą one głównie dotyczyć wyznaczania pól dystorsji wirtualnych modelujących zmiany parametrów poszczególnych elementów ustroju, analizy wrażliwości tych pól oraz identyfikacji tych parametrów na podstawie wykonanych uprzednio pomiarów tzw. *konstrukcji referencyjnej* i *zmodyfikowanej*.
- rozwiązanie zadania odwrotnego identyfikacji defektów (w sensie identyfikacji parametrów strukturalnych) sformułowanego jako problem gradientowej optymalizacji. Minimalizowana będzie funkcja celu zdefiniowana poprzez różnicę odpowiedzi konstrukcji modelowanej dystorsjami i konstrukcji zmodyfikowanej. Wynikiem tego zadania będzie rozkład parametrów modelowanych polem dystorsji wirtualnych w całej konstrukcji lub jej części, zależnie od zdefiniowanego problemu
- stworzenie przy wykorzystaniu opracowanych algorytmów zorientowanego obiektowo narzędzia numerycznego realizującego powyżej opisane zadania. Celem tego oprogramowania ma być istotna redukcja kosztów obliczeniowych w porównaniu do VDM-T, przy jednoczesnym zachowaniu dokładności otrzymywanych wyników.
- weryfikacja numeryczna oraz doświadczalna nowo stworzonego narzędzia numerycznego VDM-F na przykładzie trójwymiarowego dźwigara kratownicowego.

Motywacją do podjęcia opisanych wyżej badań jest opracowanie nowej, efektywnej metody monitorowania stanu technicznego (z ang. Structural Health Monitoring, SHM) mostów stalowych i jej przetestowanie na oprzyrządowanym moście kolejowym w Nieporęcie k. Warszawy (rys. 1.1).

1.4 Koncepcja rozprawy

Układ pracy został podzielony na cztery główne części, w których będzie poruszana tematyka w następującej kolejności:



Rysunek 1.1: Most kolejowy w Nieporęcie k. Warszawy.

- **Podstawy Metody Dystorsji Wirtualnych** – stanowi pierwszą część i jest wprowadzeniem do Metody Dystorsji Wirtualnych. Omówione zostały tutaj podstawowe pojęcia oraz koncepcja tej metody na przykładzie konstrukcji kratowej obciążonej statycznie. Podano związki łączące parametry modyfikacji konstrukcji i dystorsje wirtualne. Przedstawiono macierz wpływu, jej rolę, budowę i cechy oraz szczególny przypadek tej macierzy – uogólnioną macierz wpływu. Osobny rozdział został poświęcony konstrukcji ramowej, w którym jej deformację opisano za pomocą składowych pól odkształceń i powiązanych z nimi dystorsji wirtualnych modelujących zmiany parametrów konstrukcji.
- **Metoda Dystorsji Wirtualnych w domenie częstości** – ta część stanowi wprowadzenie do drgań harmonicznym na przykładzie drgającej masy o jednym stopniu swobody. Przeprowadzono również dyskusję wpływu tłumienia na drgania tego układu. W dalszej części przedstawiono koncepcję jednoczesnego modelowania zmian masy i sztywności konstrukcji, która determinuje wprowadzenie nowego typu dystorsji wirtualnej. Ten typ dystorsji ma charakter bezwładnościowy i jest stowarzyszony z przemieszczeniową macierzą wpływu, również omawianą w tej części. Podano związki wiążące dystorsje wirtualne dwojakiego typu z parametrami konstrukcji. Rozdział kończy analiza wrażliwości tych pól dystorsyjnych wraz z podanym algorytmem pozwalającym na ich wyznaczenie.
- **Zastosowanie VDM-F do identyfikacji defektów** – w tej części został sformułowany problem identyfikacji uszkodzeń jako zadanie optymalizacji gradientowej. Zaproponowano minimalizowaną funkcję celu (wraz z analizą jej wrażliwości) jako różnicę odpowiedzi konstrukcji otrzymanej z pomiarów i modelowanej dystorsjami wirtualnymi. Podano i porównano dwie gradientowe metody optymalizacyjne: metodę największego spadku i metodę gradientów sprzężonych. Przedstawiony dalej algorytm identyfikacji uszkodzeń jest jednym z najbardziej

istotnych elementów tego rozdziału. Na zakończenie omówione zostały wady i zalety metody VDM-F oraz porównano je ze sformułowaniem zadania w domenie czasowej VDM-T.

- **Weryfikacja doświadczalna** – stanowi eksperymentalne potwierdzenie skuteczności prezentowanej metody (VDM-F) na przykładzie trójwymiarowej kratownicy. W tej części opisane zostało stanowisko badawcze, rodzaj użytych materiałów, czujników pomiarowych, sposób realizacji obciążenia harmonicznego, tor pomiarowy, itp., oraz sposób realizacji uszkodzenia. Istotnym elementem identyfikacji defektów jest model numeryczny badanej konstrukcji, któremu poświęcony jest osobny podrozdział. Ta część zawiera również dyskusję otrzymanych wyników z przeprowadzonej analizy.

Rozprawę kończą wnioski ogólne dotyczące identyfikacji uszkodzeń oraz oryginalnych osiągnięć przedstawionych w pracy.

Rozdział 2

Podstawy Metody Dystorsji Wirtualnych

2.1 Wprowadzenie

Rozdział ten przedstawia podstawy Metody Dystorsji Wirtualnych w ujęciu statycznym i jest podzielony na dwie części. W pierwszej wprowadzone są podstawowe pojęcia z nią związane, a następnie omówione na przykładzie konstrukcji kratowej. Druga część stanowi uogólnienie jej idei na ustroje ramowe.

Przedstawiona jest tu koncepcja reanalizy konstrukcji o zmodyfikowanych parametrach przy wykorzystaniu pola dystorsji wirtualnych i macierzy wpływu. Pozwala ona na obliczenie zaktualizowanej odpowiedzi konstrukcji będącej pod wpływem ustalonego obciążenia, której parametry podlegają zmianom. Te zmiany są modelowane przez pole dystorsji wirtualnych nałożone na konstrukcję, bez konieczności powtórnego obliczania macierzy sztywności.

2.2 Koncepcja Metody Dystorsji Wirtualnych

Zachowanie konstrukcji będącej pod działaniem pewnego obciążenia zależy od bardzo wielu czynników (np. geometrii, materiału poszczególnych jej elementów jak i warunków środowiskowych) i zazwyczaj jest dość złożone. Dlatego też buduje się modele, które pozwalają na matematyczny opis śledzenia jej deformacji pod wpływem zadane-
go wymuszenia. Modele, u których podstaw leży Metoda Elementów Skończonych, są

jednym z najbardziej powszechnie stosowanych i uznanych modeli nie tylko w mechanice konstrukcji, lecz także modelowane są procesy termiczne, przepływy płynów. Dla zadanych parametrów fizycznych, geometrycznych oraz obciążenia budowany jest model numeryczny konstrukcji, który pozwala na prognozowanie jej deformacji w wyniku rozwiązania układu równań różniczkowych.

Zadanie modelowania układu Metodą Elementów Skończonych (MES) staje się uciążliwe i czasochłonne w przypadku, gdy istnieje potrzeba wielokrotnego tworzenia modeli o zmienionych parametrach konstrukcyjnych. Przykładowo, zmiana jednego lub kilku parametrów w elementach ustroju, powoduje w tradycyjnym podejściu konieczność budowy nowego modelu, a co się z tym wiąże, macierzy opisujących rozpatrywany układ i ponownego rozwiązania układu równań różniczkowych. Metoda Dystorsji Wirtualnych ma na celu usprawnić ten proces poprzez nałożenie na *model pierwotny* wstępnych deformacji (*dystorsji wirtualnych*), które są zależne od przyjętych modyfikacji poszczególnych elementów modelu i jak się później okaże od obciążenia zewnętrznego. Dla tak zmodyfikowanego modelu jego odpowiedź, dzięki zastosowaniu zasady superpozycji, jest liniową kombinacją odpowiedzi modelu pierwotnego oraz odpowiedzi pochodzących od wstępnych deformacji jednoznacznie określonych poprzez zmiany parametrów konstrukcyjnych.

Przedstawione w niniejszej pracy sformułowanie Metody Dystorsji Wirtualnych dotyczy kratownic płaskich i przestrzennych oraz ram płaskich. Modelowane parametry elementów tych konstrukcji mogą wpływać nie tylko na sztywność konstrukcji (moduł Young'a), lecz także na jej zachowanie bezwładnościowe (pole przekroju poprzecznego, moment bezwładności). Ten rozdział jest wprowadzeniem do MDW i dotyczy on zagadnień statycznych, a zatem przypadek zmiany bezwładności konstrukcji nie będzie tutaj omawiany.

2.2.1 Podstawowe pojęcia

Zanim przejdziemy do omówienia koncepcji Metody Dystorsji Wirtualnych (MDW) przedstawione zostaną podstawowe pojęcia dotyczące konstrukcji kratowych. Wraz z omawianiem konstrukcji ramowych będą uogólniane w dalszej części pracy. W przypadku kratownic będziemy stosować umowę, zgodnie z którą elementy, składowe odkształcenia, naprężenia są oznaczane dolnym, greckim indeksem $(\cdot)_\alpha$ lub $(\cdot)_\beta$. Wspomniane terminy to:

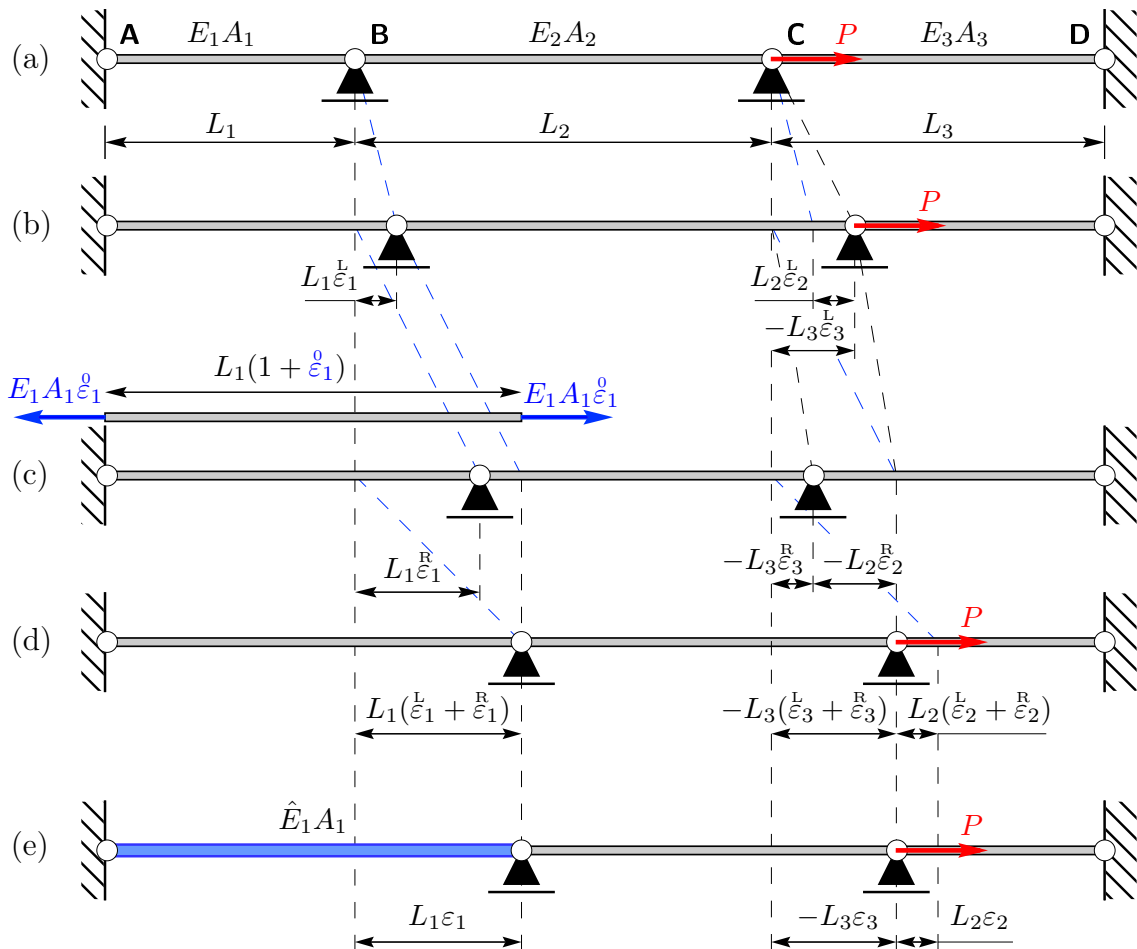
- **dystorsja wirtualna** ε_α^0 – jest to wstępne odkształcenie nałożone na element skończony α modelujące zmianę modułu Young'a lub przekroju poprzecznego. W zależności od problemu dystorsje wirtualne mogą modelować zmiany zarówno w pojedynczym elemencie konstrukcji, w pewnym jej zbiorze elementów, jak i w całym ustroju. W tym ostatnim przypadku indeks α przebiega po wszystkich elementach kratownicy. Z dystorsją wirtualną stowarzyszone jest *obciążenie kompensacyjne*, przyłożone do wyizolowanego elementu α z konstrukcji, które wywołuje *stan dystorsyjny* (lub *stan sprężony*).

- **jednostkowa dystorsja wirtualna** $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha = 1$ – jest to dystorsja wirtualna, która wywołuje jednostkowe odkształcenie elementu α myślowo wyjętego z konstrukcji. Wprowadzenie jednostkowej dystorsji w konstrukcji generuje stan sprężony, w którym odkształcenie elementu α (jak i we wszystkich elementach ustroju) jest mniejsze od jedności. W przypadku układów statycznie wyznaczalnych jednostkowa dystorsja wirtualna wywołuje jedynie deformację (jednostkowe odkształcenie) tylko w tym elemencie konstrukcji, w którym została ona wprowadzona.
- **macierz wpływu** $D_{\alpha\beta}$ – zawiera odkształcenia elementu α wywołane nałożeniem na element β dystorsji jednostkowej $\overset{\circ}{\varepsilon}_\beta = 1$. Macierz wpływu jest obliczana dla tych elementów (w szczególności wszystkich elementów konstrukcji), dla których przemodelowywane są parametry fizyczne lub geometryczne. Istotną cechą tej macierzy jest jej kwadratowa budowa, a ponadto: nie jest symetryczna (w ogólności), poszczególne wyrazy są mniejsze od jedności, a największe wartości wyrazów znajdują się na głównej przekątnej.
- **uogólniona macierz wpływu** $\check{D}_{A\alpha}$ – jej kolumny zawierają wybrane odpowiedzi konstrukcji f_A wywołane nałożeniem na element α dystorsji jednostkowej $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha = 1$. Odpowiedzi f_A stanowią tutaj pewne wielkości (np. przemieszczenia węzłów) i są najczęściej odniesione do wielkości pomierzonych w *konstrukcji rzeczywistej*. Macierz ta jest konstruowana wówczas, gdy za pomocą dystorsji wirtualnych mają być modelowane te odpowiedzi f_A , z którymi stowarzyszony jest odczyt z sensora.
- **obciążenie kompensacyjne** – jest to obciążenie jakie należy przyłożyć do węzłów wyizolowanego elementu skończonego, aby wywołać w nim dystorsję wirtualną $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha$.
- **konstrukcja modelowana dystorsjami** – numeryczny model konstrukcji, w którym nałożono dystorsje wirtualne na wybrane bądź wszystkie elementy skończone.
- **konstrukcja początkowa** – rzeczywista konstrukcja bez defektów, dla której jest tworzony i kalibrowany model numeryczny (tzw. *model pierwotny*).
- **konstrukcja zmodyfikowana** – rzeczywista konstrukcja o zmienionych parametrach fizycznych lub/i geometrycznych (w odróżnieniu od konstrukcji początkowej)
- **parametr modyfikacji** μ_α – jest to stosunek parametru fizycznego lub/i geometrycznego zmodyfikowanego elementu skończonego α konstrukcji do początkowego. Zbiór parametrów modyfikacji poszczególnych elementów tworzy *wektor parametrów modyfikacji* konstrukcji.
- **intensywność uszkodzenia** λ_α – bezwymiarowa wielkość opisująca stopień degradacji modelowanego parametru elementu skończonego i jest ściśle związana

przez parametr modyfikacji: $\lambda_\alpha = 1_\alpha - \mu_\alpha$. Wszystkie składowe wektora 1_α są jednostkowe. Zbiór intensywności uszkodzenia elementów tworzy *wektor intensywności uszkodzenia*.

2.2.2 Stan dystorsyjny konstrukcji

Jak już wspomniano w poprzednim podrozdziale, stan dystorsyjny (sprężony) konstrukcji powstaje w wyniku nałożenia na nią dystorsji wirtualnych. W celu dokładniejszego zobrazowania idei MDW rozpatrzmy prostą konstrukcję przedstawioną na rys. 2.1 złożoną z 3 elementów kratowych o długościach odpowiednio: L_1 , L_2 , L_3 . Sztywności osiowe tych elementów wynoszą odpowiednio: E_1A_1 , E_2A_2 , E_3A_3 , a sposób podparcia w A, B, C oraz D jest zilustrowany na rys. 2.1.



Rysunek 2.1: Koncepcja Metody Dystorsji Wirtualnych. (a)–konstrukcja pierwotna, (b)–deformacja konstrukcji pierwotnej wywołana obciążeniem zewnętrznym P , (c)–konstrukcja sprężona, (d)–konstrukcja modelowana dystorsjami, (e)–konstrukcja zmodyfikowana.

Konstrukcja ta jest poddana statycznemu obciążeniu siłą osiową P na podporze C rys. 2.1(a), które wywołuje stan deformacji opisany poprzez następujące wektory odkształceń i naprężeń (por. rys. 2.1(b)):

$$\overset{L}{\varepsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} \overset{L}{\varepsilon}_1 \\ \overset{L}{\varepsilon}_2 \\ \overset{L}{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} E_2 A_2 L_3 \\ E_1 A_1 L_3 \\ -(L_1 E_2 A_2 + E_1 A_1 L_2) \end{bmatrix} P, \quad \overset{L}{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} E_1 \overset{L}{\varepsilon}_1 \\ E_2 \overset{L}{\varepsilon}_2 \\ E_3 \overset{L}{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

gdzie przyjęto $M = E_1 A_1 E_2 A_2 L_3 + L_1 E_2 A_2 E_3 A_3 + E_1 A_1 L_2 E_3 A_3$, a α jest indeksem oznaczającym numer elementu. Wprowadźmy na wyjęty myślowo z konstrukcji początkowej element nr 1 pewne odkształcenie wstępne $\overset{0}{\varepsilon}_1$ (dystorsję wirtualną), z którym stowarzyszone jest samozrównoważone obciążenie kompensacyjne, $\overset{0}{N}_1 = E_1 A_1 \overset{0}{\varepsilon}_1$, wywołujące to odkształcenie, por. rys. 2.1(c). Element ten stanowi jednak część konstrukcji i dozna innego (mniejszego) odkształcenia (oznaczymy je przez $\overset{R}{\varepsilon}_1$) niż wprowadzona dystorsja wirtualna $\overset{0}{\varepsilon}_1$. Stan ten wynika z warunku ciągłości przemieszczeń ustroju. Co więcej, wprowadzona dystorsja wirtualna wywołuje deformacje w pozostałych elementach konstrukcji: $\overset{R}{\varepsilon}_2, \overset{R}{\varepsilon}_3$. Stan odkształceń i naprężeń konstrukcji sprężonej jest wyrażony przez wektory:

$$\overset{R}{\varepsilon}_\alpha = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} E_2 A_2 L_3 + L_2 E_3 A_3 \\ -L_1 E_3 A_3 \\ -L_1 E_2 A_2 \end{bmatrix} E_1 A_1 \overset{0}{\varepsilon}_1, \quad \overset{R}{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} E_1 (\overset{R}{\varepsilon}_1 - \overset{0}{\varepsilon}_1) \\ E_2 \overset{R}{\varepsilon}_2 \\ E_3 \overset{R}{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Równania (2.2) możemy zapisać w uproszczonej formie:

$$\overset{R}{\varepsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \end{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_1, \quad \overset{R}{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} E_1 (D_{11} - 1) \\ E_2 D_{21} \\ E_3 D_{31} \end{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_1, \quad (2.3)$$

gdzie wykorzystano oznaczenie:

$$D_{\alpha 1} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} E_2 A_2 L_3 + L_2 E_3 A_3 \\ -L_1 E_3 A_3 \\ -L_1 E_2 A_2 \end{bmatrix} E_1 A_1. \quad (2.4)$$

Warto tutaj dodać, że w wektorze $D_{\alpha 1}$ drugi indeks wskazuje na element, w którym wprowadzono dystorsję wirtualną (tutaj: 1) a jego składowe wyrażają odkształcenia wywołane wprowadzeniem jednostkowej dystorsji wirtualnej $\overset{0}{\varepsilon}_1 = 1$ (w odróżnieniu od $\overset{R}{\varepsilon}_\alpha$, które określa stan sprężony wywołany niejednostkową dystorsją wirtualną $\overset{0}{\varepsilon}_1$).

W ramach liniowej teorii krat dopuszczalne jest stosowanie tzw. *zasady superpozycji*, a zatem w rozważanym przypadku całkowite pola odkształceń ε_α (naprężeń σ_α) ustroju jest sumą pól odkształceń (naprężeń) konstrukcji pierwotnej i sprężonej, co po

uwzględnieniu równań (2.3) oraz (2.1) prowadzi do związków:

$$\varepsilon_\alpha = \overset{\text{L}}{\varepsilon}_\alpha + \overset{\text{R}}{\varepsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} \overset{\text{L}}{\varepsilon}_1 + D_{11} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \\ \overset{\text{L}}{\varepsilon}_2 + D_{21} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \\ \overset{\text{L}}{\varepsilon}_3 + D_{31} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_\alpha = \overset{\text{L}}{\sigma}_\alpha + \overset{\text{R}}{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} E_1 \left(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_1 + (D_{11} - 1) \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right) \\ E_2 \left(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_2 + D_{21} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right) \\ E_3 \left(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_3 + D_{31} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Odształcenie ε_α i naprężenie σ_α odnoszą się do konstrukcji modelowanej dystorsją $\overset{\text{O}}{\varepsilon}_1$, zilustrowanej na rys. 2.1(d). W zależności od wartości dystorsji wirtualnej $\overset{\text{O}}{\varepsilon}_1$ nałożonej na element nr 1 konstrukcji początkowej mogą być modelowane różne pola odształceń i naprężeń spełniające warunek ciągłości przemieszczeń.

Wprowadźmy teraz pewną zmianę modułu Young'a E_1 w elemencie nr 1 konstrukcji początkowej i niech wynosi teraz \hat{E}_1 . W tej chwili nie precyzujemy jego wzrostu czy spadku wartości. Otrzymaną w ten sposób konstrukcję zmodyfikowaną pokazano na rys. 2.1(e). Pole odształceń i naprężeń wywołane działaniem siły P może zostać obliczone ze wzorów (2.1) po uprzednim podstawieniu zależności: $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_\alpha = \hat{\varepsilon}_\alpha$, $E_1 = \hat{E}_1$, $\overset{\text{L}}{\sigma}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha$, co można zapisać w postaci:

$$\hat{\varepsilon}_\alpha = \frac{1}{\hat{M}} \begin{bmatrix} E_2 A_2 L_3 \\ \hat{E}_1 A_1 L_3 \\ -\left(L_1 E_2 A_2 + \hat{E}_1 A_1 L_2 \right) \end{bmatrix} P, \quad \hat{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \hat{\varepsilon}_1 \\ E_2 \hat{\varepsilon}_2 \\ E_3 \hat{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

przy czym: $\hat{M} = \hat{E}_1 A_1 E_2 A_2 L_3 + L_1 E_2 A_2 E_3 A_3 + \hat{E}_1 A_1 L_2 E_3 A_3$, a wielkości $\hat{\varepsilon}_\alpha$ oraz $\hat{\sigma}_\alpha$ określają wektor odształcenia i naprężenia konstrukcji zmodyfikowanej. Następnie żądamy spełnienie następującego postulatu:

POSTULAT 2.1: Konstrukcja zmodyfikowana oraz konstrukcja modelowana dystorsjami są tożsame w sensie równości ich uogólnionych pól odształceń i sił wewnętrznych.

Oznacza to, że muszą zachodzić równości: $\hat{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha$, $\hat{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha$ we wzorach (2.5) oraz (2.6), co prowadzi do zależności:

$$\hat{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \varepsilon_1 \\ E_2 \varepsilon_2 \\ E_3 \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \left(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_1 + (D_{11} - 1) \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right) \\ E_2 \left(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_2 + D_{21} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right) \\ E_3 \left(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_3 + D_{31} \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Pierwsze z równań (2.7) przyjmuje postać:

$$\sigma_1 = \hat{E}_1 \varepsilon_1 = E_1 \left(\varepsilon_1 - \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1 \right), \quad (2.8)$$

a pozostałe dwa spełnione są tożsamościowo. Związek (2.8) wygodnie jest przedstawić w postaci:

$$\mu_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{E}_1}{E_1} = \frac{\varepsilon_1 - \overset{\text{O}}{\varepsilon}_1}{\varepsilon_1}, \quad (2.9)$$

gdzie μ_1 jest parametrem modyfikacji, zdefiniowanym jako stosunek modułów Young’a elementu nr 1 konstrukcji zmodyfikowanej i początkowej. Innymi słowy oznacza to, że konstrukcja modelowana oraz konstrukcja zmodyfikowana będą opisane tymi samymi polami odkształceń i naprężeń jeśli związek (2.9) będzie spełniony. Zauważmy tutaj, że odkształcenie ε_1 zależy od wprowadzonej dystorsji wirtualnej $\overset{\circ}{\varepsilon}_1$ (por. 2.5(a)), a zatem wzór (2.9) jest nieliniowy. Odwracając problem, znając odkształcenie ε_1 , możemy znaleźć taką wartość dystorsji wirtualnej $\overset{\circ}{\varepsilon}_1$, której odpowiada zadany parametr modyfikacji sztywności μ_1 :

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_1 = (1 - \mu_1) \varepsilon_1. \quad (2.10)$$

Zgodnie z postulatem (2.1) w rozważanym przykładzie równorzędnie możemy stosować również siły w prętach (w miejsce naprężeń). Podstawiając w równaniach (2.8) odpowiednie zależności $\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha}$ oraz jednocześnie modelując zmianę pola przekroju poprzecznego A_1 elementu nr 1, związek (2.9) przyjmie postać:

$$\mu_1 = \frac{\hat{k}_1^{EA}}{k_1^{EA}} = \frac{\hat{E}_1 \hat{A}_1}{E_1 A_1} = \frac{\varepsilon_1 - \overset{\circ}{\varepsilon}_1}{\varepsilon_1}. \quad (2.11)$$

Jak łatwo można zauważyć, w przypadku gdy nie jest rozważana modyfikacja modułu Young’a, $\hat{E}_1 = E_1$, parametr modyfikacji sztywności μ_1 jest określony tylko poprzez zmianę pola powierzchni przekroju poprzecznego i jest równy $\mu_1 = \frac{\hat{A}_1}{A_1}$. Jeśli modelujemy jednocześnie modyfikację pola przekroju poprzecznego A_1 i modułu Young’a E_1 wygodnie jest je opisywać poprzez zmianę sztywności osiowej $\mu_1 = \frac{\hat{k}_1^{EA}}{k_1^{EA}}$.

Wynika to z faktu, że p -krotna zmiana modułu Young’a w danym elemencie wywołuje taki sam stan uogólnionych odkształceń i sił wewnętrznych jak i p -krotna zmiana pola przekroju poprzecznego w tym elemencie. Z punktu widzenia stanu deformacji statycznej konstrukcji kratowej zmiany te nie są rozróżnialne.

Powyższe rozważania dotyczą modelowania i modyfikacji elementu nr 1 konstrukcji, z którym związany jest stan dystorsyjny. Oczywiście, nie jest to jedyny możliwy stan tego ustroju. Nakładając dystorsje wirtualne na pozostałe elementy konstrukcji w analogiczny sposób, możliwe jest jednoczesne modelowanie parametrów we wszystkich elementach konstrukcji, co będzie przedmiotem rozważań w następnym podrozdziale.

2.2.3 Macierz wpływu

W poprzednim podrozdziale pokazano, że wprowadzenie dystorsji wirtualnej pozwala na modelowanie zmiany pola przekroju poprzecznego A_1 lub/i modułu Young’a E_1 tego elementu. Oczywiście, opisany powyżej algorytm poprzez analogię można zastosować do pozostałych elementów ustroju i – wykorzystując zasadę superpozycji – modelować te zmiany we wszystkich elementach tej konstrukcji. Wprowadźmy zatem dystorsje wirtualne w pozostałej części konstrukcji: $\overset{\circ}{\varepsilon}_2$ i $\overset{\circ}{\varepsilon}_3$. Wywołają one pole odkształceń od-

powiednio:

$$\overset{R}{\varepsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} D_{12} \\ D_{22} \\ D_{32} \end{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_2 + \begin{bmatrix} D_{13} \\ D_{23} \\ D_{33} \end{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_3, \quad (2.12)$$

gdzie:

$$D_{\alpha 2} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} -L_2 A_3 E_3 \\ A_1 E_1 L_3 + L_1 A_3 E_3 \\ -E_1 A_1 L_2 \end{bmatrix} E_2 A_2, \quad (2.13)$$

$$D_{\alpha 3} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} -E_2 A_2 L_3 \\ -E_1 A_1 L_3 \\ E_1 A_1 L_2 + L_1 E_2 A_2 \end{bmatrix} E_3 A_3, \quad (2.14)$$

a M jest określone jak we wzorze (2.1). Wektor $D_{\alpha 2}$ jest wektorem odkształcenia wywołanym przez nałożenie jednostkowej dystorsji wirtualnej $\overset{0}{\varepsilon}_2 = 1$ w elemencie nr 2, podczas gdy wektor $D_{\alpha 3}$ wywołuje jednostkowa dystorsja wirtualna $\overset{0}{\varepsilon}_3 = 1$ w elemencie nr 3. Uwzględniając związek (2.3(a)) oraz (2.12) możemy obliczyć odkształcenia w konstrukcji sprzężonej $\overset{R}{\varepsilon}_\alpha$ wywołany wprowadzeniem dowolnego wektora dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$:

$$\overset{R}{\varepsilon}_\alpha = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_1 \\ \overset{0}{\varepsilon}_2 \\ \overset{0}{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} = D_{\alpha\beta} \overset{0}{\varepsilon}_\beta. \quad (2.15)$$

Macierz $D_{\alpha\beta}$ nosi nazwę macierzy wpływu i jest fundamentem Metody Dystorsji Wirtualnych. W związku (2.15) pominięto znak sumowania po indeksie β – zakładamy konwencję sumacyjną Einsteina. Indeksy, po których nie należy sumować, będą podkreślone. Biorąc pod uwagę (2.4), (2.13) oraz (2.14) pełna postać macierzy $D_{\alpha\beta}$ przedstawia się następująco:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} k_1 (k_2 L_3 + L_2 k_3) & -k_2 L_2 k_3 & -k_2 L_3 k_3 \\ -k_1 L_1 k_3 & k_2 (k_1 L_3 + L_1 k_3) & -k_1 L_3 k_3 \\ -k_1 L_1 k_2 & -k_1 k_2 L_2 & (k_1 L_2 + L_1 k_2) k_3 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

przy czym zastosowano oznaczenie $k_\alpha = E_\alpha A_\alpha$. Jej β -ta kolumna stanowi wektor odkształceń konstrukcji wywołany wprowadzeniem jednostkowej dystorsji wirtualnej $\overset{0}{\varepsilon}_\beta = 1$ w konstrukcji. Innymi słowy, wyraz macierzy $D_{\alpha\beta}$ opisuje odkształcenie elementu α wywołane działaniem jednostkowej dystorsji wirtualnej w elemencie β .

Wymiar macierzy wpływu $D_{\alpha\beta}$ dla omawianej tutaj 3-elementowej konstrukcji jest $[3 \times 3]$, a jej wyznaczenie nie stwarza problemów obliczeniowych. Czasami jednak konstrukcja bywa dość złożona, lub też zachodzi potrzeba modelowania parametrów modyfikacji w wybranym jej obszarze \mathcal{D} . Wówczas macierz wpływu $D_{\alpha\beta}$ obliczana jest tylko dla tej wybranej części konstrukcji (podzbioru elementów): jednostkowe dystorsje wirtualne nakładane są na elementy ze zbioru \mathcal{D} i dla nich obliczane są składowe wektora odkształceń. Niezależnie od tego, czy rozważamy całą konstrukcję czy też jej fragment statyczna macierz wpływu $D_{\alpha\beta}$ posiada pewne szczególne cechy:

- kwadratowa budowa,
- dla β -tej kolumny największą wartość ma wyraz znajdujący się na jej głównej przekątnej, lecz nie większą od jedności,
- w ogólności nie jest symetryczna,
- dla konstrukcji statycznie wyznaczalnej zachodzi $D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ (macierz jednostkowa) – jednostkowa dystorsja wirtualna $\overset{0}{\varepsilon}_\beta = 1$ wywołuje jedynie odkształcenie (jednostkowe) $D_{\beta\beta} = 1$ tylko w tym elemencie, w którym dystorsja wirtualna została wprowadzona.

Wektory odkształceń ε_α i naprężeń σ_α konstrukcji modelowanej dystorsjami możemy wyrazić (analogicznie do (2.5)) posługując się zbudowaną powyżej macierzą wpływu:

$$\varepsilon_\alpha = \overset{L}{\varepsilon}_\alpha + D_{\alpha\beta} \overset{0}{\varepsilon}_\beta, \quad \sigma_\alpha = \overset{L}{\sigma}_\alpha + \overset{R}{\sigma}_\alpha = E_\alpha (\varepsilon_\alpha - \overset{0}{\varepsilon}_\alpha), \quad (2.17)$$

Jeśli jest znane pole dystorsji wirtualnych modelujących modyfikacje parametrów konstrukcji μ_α , to ze związków (2.17) może zostać obliczone pole odkształceń i naprężeń bez powtórnego obliczenia macierzy sztywności konstrukcji.

2.2.4 Uogólniona macierz wpływu

Wyprowadzone w poprzednim paragrafie związki (2.17) pozwalają przy zadanym polu dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ na natychmiastowe obliczenie pól odkształceń ε_α i naprężeń σ_α konstrukcji, po uprzednim wyznaczeniu macierzy wpływu $D_{\alpha\beta}$. W pewnych przypadkach zachodzi jednak potrzeba szybkiej reanalizy innych wielkości niż pole odkształceń czy naprężeń np. przemieszczeń węzłowych na podporze B lub podporze C (por. rys. (2.1)). Załóżmy teraz, że naszym celem jest modelowanie tych przemieszczeń węzłowych (oznaczymy je odpowiednio przez u_1 i u_2) za pomocą dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$. Interesujące nas przemieszczenia w stanie sprężonym wywołanym poprzez wprowadzenie pola dystorsji $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ są wyrażone następująco:

$$\overset{R}{u}_A = \check{D}_{A\alpha} \overset{0}{\varepsilon}_\alpha, \quad (2.18)$$

gdzie $\overset{R}{u}_A = [\overset{R}{u}_1 \quad \overset{R}{u}_2]^T$, a $\check{D}_{A\alpha}$ jest uogólnioną macierzą wpływu. Macierz ta, o wymiarze 2×3 , określa wpływy jednostkowych dystorsji wirtualnych na te przemieszczenia, a jej α -kolumna określa przemieszczenia węzłowe na podporach B i C wywołane wprowadzeniem dystorsji jednostkowej w elemencie α . Używając oznaczeń z poprzedniego paragrafu macierz tę możemy zapisać w postaci:

$$\check{D}_{A\alpha} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} k_1 L_1 (k_2 L_3 + L_2 k_3) & -L_1 k_2 L_2 k_3 & -L_1 k_2 L_3 k_3 \\ k_1 L_1 k_2 L_3 & k_1 k_2 L_2 L_3 & -(k_1 L_2 + L_1 k_2) k_3 L_3 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

W związku z tym, ponownie stosując zasadę superpozycji, modelowane przemieszczenia konstrukcji są wyrażone wzorem:

$$u_A = \overset{L}{u}_A + \check{D}_{A\alpha} \overset{0}{\varepsilon}_\alpha \quad (2.20)$$

gdzie $\overset{L}{u}_A = [\overset{L}{u}_1 \quad \overset{L}{u}_2]^T$ stanowią przemieszczenia konstrukcji początkowej wywołane obciążeniem P . Warto w tym miejscu dodać, że modelowane mogą być te wielkości, które są liniowo zależne od pola dystorsji $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$. A zatem możliwe jest modelowanie wielkości będących również kombinacją liniową (np. przemieszczeń: $f_A = 2u_1 + u_2$), przy czym wyrazy każdej w kolumnie uogólnionej macierzy wpływu $\check{D}_{A\alpha}$ muszą stanowić odpowiedzi odniesione do modelowanych wielkości f_A . Niewątpliwie korzyścią takiego postępowania jest możliwość modelowania tych wielkości, które są stowarzyszone z pomiarami.

2.3 Modelowanie parametrów konstrukcji ramowych

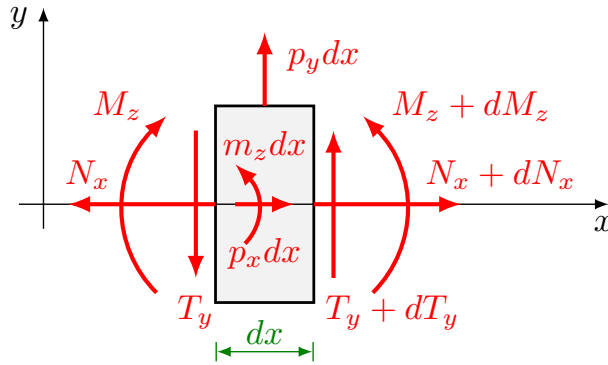
W podrozdziale 2.2.2 przedstawiona została koncepcja Metody Dystorsji Wirtualnych na przykładzie konstrukcji kratowej. Konstrukcja kratowa stanowi dobry punkt wyjściowy do omówienia idei modelowania zmian parametrów fizycznych czy geometrycznych w poszczególnych elementach skończonych z uwagi na występującą pojedynczą składową pola odkształcenia i – co się z tym wiąże – naprężenia.

W analizie konstrukcji ramowych analiza stanów dystorsyjnych jest nieco bardziej złożona z uwagi na pojawianie się dodatkowych składowych odkształcenia w elemencie skończonym, a w konsekwencji i dodatkowych dystorsji wirtualnych. W następnych podrozdziałach bliżej zajmiemy się tym zagadnieniem.

2.3.1 Podstawowe równania belek

Rozważania nad modelowaniem parametrów konstrukcji ramowych rozpoczniemy od uwag wstępnych, dotyczących założeń, które będziemy stosować analizując konstrukcje belkowe w tym i następnych podrozdziałach:

- równania sformułowane w ramach teorii I-go rzędu;
 - rozdzielenie stanu rozciągania osiowego od stanu zgięciowego;
 - wykorzystanie zasady „zesztywnienia” – równania równowagi układane są w konfiguracji nieodkształconej belki;
 - zasada superpozycji;
- kinematyczna hipoteza Bernoulliego: przekroje belki pozostają płaskie i prostopadłe do jej osi po deformacji;



Rysunek 2.2: Infinitesimalny wycinek belki wraz z działającymi na niego siłami wewnętrznymi.

Na rys. (2.2) został przedstawiony infinitesimalny fragment belki o długości dx wraz z działającymi na niego uogólnionymi siłami wewnętrznymi: siłą osiową N_x , siłą poprzeczną T_y , momentem zginającym M_z . Wielkości te są zdefiniowane poprzez wyrażenia całkowe:

$$N_x = \int_A \sigma_x dA, \quad T_y = \int_A \tau_{xy} dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA. \quad (2.21)$$

Następnie żądamy, aby wycinek ten pozostawał w równowadze, co prowadzi do równań:

$$\sum X = \frac{dN_x}{dx} + p_x = 0, \quad \sum Y = \frac{dT_y}{dx} + p_y = 0, \quad \sum Z = \frac{dM_z}{dx} + T_y + m_z = 0. \quad (2.22)$$

Ponadto, zachodzą związki geometryczne pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniem osiowym oraz krzywizną wynikające z postulatu Bernoulliego:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}, \quad \kappa(x) = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{przy czym: } \varphi(x) = \frac{dw}{dx}. \quad (2.23)$$

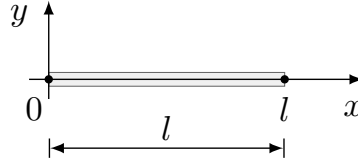
Związki fizyczne wiążące siły przekrojowe z odkształceniami wyrażone są w postaci:

$$N_x(x) = EA \varepsilon(x), \quad M_z(x) = EJ \kappa(x). \quad (2.24)$$

Podstawiając wzory (2.23) oraz (2.24) do (2.22) otrzymamy równia równowagi wyrażone w przemieszczeniach:

$$EA u''(x) + p_x(x) = 0, \quad EJ w^{IV}(x) - p_y(x) + m_z(x) = 0. \quad (2.25)$$

Powyższe równania zostały wyprowadzone przy założeniu, że geometria przekroju poprzecznego belki nie jest zależna od zmiennej x .



Rysunek 2.3: Lokalny układ współrzędnych elementu skończonego.

2.3.2 Składowe dystorsji wirtualnych elementu ramowego

Związki fizyczne (2.24) elementu skończonego w układzie przedstawionym na rys. 2.3 zapiszmy w postaci:

$$N^e = EA\varepsilon_\varepsilon^e = const, \quad M^e = EJ\varepsilon_\kappa^e, \quad \text{oraz} \quad T^e = -\frac{dM^e}{dx}, \quad (2.26)$$

gdzie N^e , M^e , T^e są siłami przekrojowymi, w których w odróżnieniu do poprzedniego podrozdziału pominięto dolne indeksy związane z układem współrzędnych, i wprowadzono oznaczenie $(\cdot)^e$ wskazujące wielkości dotyczą elementu skończonego. Natomiast odkształcenie osiowe zastąpiono przez $\varepsilon_\varepsilon^e$, a krzywiznę przez ε_κ^e . Jednocześnie należy zwrócić uwagę, że równania (2.26) są prawdziwe w przypadku, gdy pomijamy obciążenia ciągłe (por. 2.25). Modelowanie modyfikacji sztywności elementu pozwala przyjąć takie założenie, co będzie pokazane w dalszej części tego rozdziału.

Podstawowe składowe deformacji ramowego elementu skończonego, które będziemy stosować do opisu dystorsyjnego, możemy określić rozpatrując problem własny macierzy sztywności K_{ij}^e tego elementu. Macierz ta ma postać:

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Wyprowadzenie tej macierzy można znaleźć w wielu publikacjach, np. [67, 68, 69]. Zagadnienie własne macierzy sztywności K_{ij}^e jest wyrażone w następującej formie:

$$(K_{ij}^e - \lambda \delta_{ij}) q_j^e = 0. \quad (2.28)$$

W równaniu (2.28) λ jest wielkością skalarną, δ_{ij} – macierzą jednostkową, a q_j^e – wektorem uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu skończonego w układzie lokalnym. W nietrywialnym przypadku, gdy $q_i \neq 0_i$ równanie (2.28) jest spełnione jeśli prawdziwy jest związek:

$$\det(K_{ij}^e - \lambda \delta_{ij}) = 0. \quad (2.29)$$

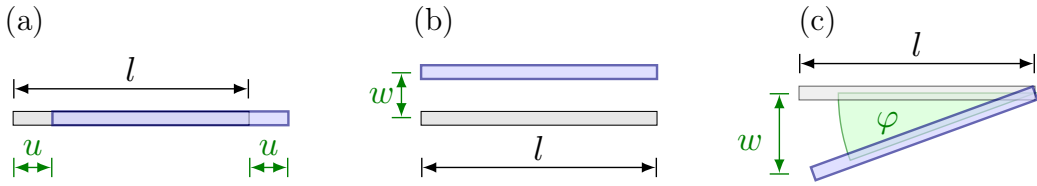
Rozwinięcie wyznacznika (2.29) prowadzi do tzw. równania charakterystycznego, którego pierwiastki są rzeczywiste, co wynika z symetrycznej budowy macierzy K_{ij}^e . W rozważanym przypadku obliczone wartości własne wynoszą:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \frac{2}{l}EA, \quad \lambda_5 = \frac{2}{l}EJ, \quad \lambda_6 = \frac{6(l^2 + 4)}{l^3}EJ. \quad (2.30)$$

Pierwsze trzy wartości własne są zerowe – $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – generują uogólnione przemieszczenia stowarzyszone z ruchami sztywnymi elementu skończonego, a zatem nie ulega on deformacji. Wektory tych uogólnionych przemieszczeń mogą zostać wyznaczone z dokładnością do stałej i mogą zostać zapisane w następującej formie:

$$q_{i(1)}^e = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{i(2)}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \\ 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{i(3)}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -l\varphi \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Ruchy sztywne opisane wzorem (2.31) – dwa translacyjne oraz obrót przedstawione zostały na rys. 2.4.



Rysunek 2.4: Ruchy sztywne ramowego elementu skończonego: (a) – przesunięcie poziome, (b) – przesunięcie pionowe, (c) – obrót.

W celu określenia podstawowych, jednostkowych deformacji elementu skończonego będziemy rozważać wektory własne, którym odpowiadają niezerowe wartości własne, a mianowicie: λ_4, λ_5 oraz λ_6 . Tym wartościom własnym odpowiadają wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych:

$$q_{i(4)}^e = \begin{bmatrix} -u \\ 0 \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{i(5)}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varphi \\ 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad q_{i(6)}^e = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{l}\varphi \\ \varphi \\ 0 \\ -\frac{2}{l}\varphi \\ \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

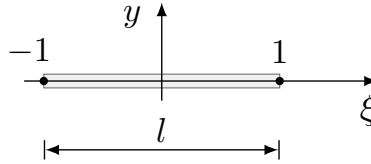
Wektor przemieszczeń $q_{i(4)}^e$ przedstawia rozciąganie osiowe elementu, zaś pozostałe dwa – $q_{i(5)}^e$ i $q_{i(6)}^e$ są związane ze zginaniem. Uwzględniając związek problemu własnego w postaci:

$$F_i^e = K_{ij} q_j^e = \lambda q_i^e, \quad (2.33)$$

możemy napisać następujące zależności na siły węzłowe:

$$F_{i(4)}^e = \frac{2EA}{l} q_{i(4)}^e, \quad F_{i(5)}^e = \frac{2EJ}{l} q_{i(5)}^e, \quad F_{i(6)}^e = \frac{6(l^2 + 4)}{l^3} EJ q_{i(5)}^e. \quad (2.34)$$

Wystarczy teraz przeskalować przemieszczenia węzłowe tak, aby odpowiadały one jednostkowym deformacjom. Wygodnie jest to wykonać przyjmując nowy, lokalny układ odniesienia związany z bezwymiarową współrzędną ξ , który został przedstawiony na rys. (2.5). Związek łączący ten układ z przedstawionym na rys. (2.5) ma postać:



Rysunek 2.5: Bezwymiarowy układ współrzędnych elementu skończonego.

$$\xi = \frac{2x}{l} - 1, \quad \text{przy czym:} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l}. \quad (2.35)$$

W tym celu rozpatrzmy wektory obciążeń elementu indywidualnie dla odpowiadającej wartości własnej opisujące następujące stany:

- rozciąganie osiowe (opisane wzorem (2.34a)) stałą siłą o wartości:

$$N^e = \frac{2EA}{l} u = EA \varepsilon_\varepsilon^e. \quad (2.36)$$

Wynika stąd, że dla jednostkowego odkształcenia $\varepsilon_\varepsilon^e = 1$ otrzymamy wartość przemieszczenia $u = \frac{l}{2}$.

- zginanie – stała wartość momentu M^e (por. 2.34b), któremu towarzyszy stała krzywizna κ^e :

$$M^e = \frac{2EJ}{l} \varphi = EJ \varepsilon_\kappa^e = EJ \varepsilon_\varkappa^e. \quad (2.37)$$

We wzorze (2.37) przyjęto ważne oznaczenie stałej krzywizny $\varepsilon_\kappa^e = \varepsilon_\varkappa^e$, której będziemy używać w dalszych rozważaniach jako składowej odkształcenia elementu skończonego. Wykonując podstawienie $\varepsilon_\varkappa^e = 1$ wyznaczymy wartość węzłowego kąta obrotu $\varphi = \frac{l}{2}$.

- zginanie – liniowo zmienny moment $M^e(\xi)$, stała wartość siły poprzecznej T^e (por. (2.34c)):

$$T^e = -\frac{dM^e}{dx} = -\frac{dM^e}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{l}{2} \frac{6(l^2 + 4)}{l^3} \frac{2}{l} = -EJ(\varepsilon_\varkappa^e)'(\xi) = -EJ \varepsilon_\chi^e. \quad (2.38)$$

We wzorze (2.38) skorzystaliśmy z proporcjonalnej zależności pomiędzy momentem zginającym a krzywizną. Ponadto, została wprowadzona trzecia składowa odkształcenia ε_χ^e :

$$\varepsilon_\chi^e = (\varepsilon_\kappa^e)'(\xi). \quad (2.39)$$

Zauważmy, że w przypadku nieobecności obciążenia ciągłego ($p_y(\xi) = 0$), a taki rozważamy tutaj przypadek, ε_χ^e przyjmuje stałą wartość. Gdy $\varepsilon_\chi^e = 1$ wartość kąta obrotu znajdujemy w postaci: $\varphi = \frac{l^3}{6(l^2+4)}$.

Możemy teraz przedstawić kompletny zestaw obciążeń kompensacyjnych wraz z odpowiadającymi im jednostkowymi deformacjami.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varepsilon^e &= 1, & F_{i(4)}^e &= EA [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \\ \varepsilon_\varkappa^e &= 1, & F_{i(5)}^e &= EJ [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1]^T, \\ \varepsilon_\chi^e &= 1, & F_{i(6)}^e &= EJ \left[0 \ \frac{2}{l} \ 1 \ 0 \ -\frac{2}{l} \ 1 \right]^T. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Zdefiniujmy jeszcze składowe odkształceń $\varepsilon_\varepsilon^e$, ε_\varkappa^e , ε_χ^e elementu skończonego w zależności od jego przemieszczeń węzłowych. Wracając do równań równowagi (2.25) oraz układu współrzędnych pokazanego na rys. 2.3 i przyjmując brak obciążeń ciągłych, rozwiązania tych równań możemy zapisać jako funkcje wielomianowe:

$$u(x) = A_1 x + A_2, \quad w(x) = B_1 x^3 + B_2 x^2 + B_3 x + B_4. \quad (2.41)$$

Żądając spełnienia następujących warunków:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1, & w(0) &= w_1, & w'(0) &= \varphi_1, \\ u(l) &= u_2, & w(l) &= w_2, & w'(l) &= \varphi_2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

otrzymujemy poszukiwane związki w postaci:

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1 \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{l^2} \left[\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2}{l}(w_2 - w_1) \right] x^3 + \\ &+ \frac{1}{l} \left[-(2\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{3}{l}(w_1 - w_2) \right] x^2 + \varphi_1 x + w_1. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Należy teraz podstawić związki (2.43), (2.44) do wzorów (2.23), aby otrzymać odkształcenia podłużne i krzywiznę wyrażone przez uogólnione przemieszczenia węzłowe w zależności od zmiennej x :

$$\varepsilon_\varepsilon^e(x) = \frac{u_2 - u_1}{l}, \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_\kappa^e(x) = \frac{6}{l^2} \left[\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2}{l}(w_2 - w_1) \right] x + \frac{2}{l} \left[-(2\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{3}{l}(w_1 - w_2) \right], \quad (2.46)$$

lub zmiennej ξ (por. rys. 2.5):

$$\varepsilon_\varepsilon^e(\xi) = \frac{u_2 - u_1}{l}, \quad (2.47)$$

$$\varepsilon_\kappa^e(\xi) = \frac{6}{l} \left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{w_2 - w_1}{l} \right] \xi + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l}. \quad (2.48)$$

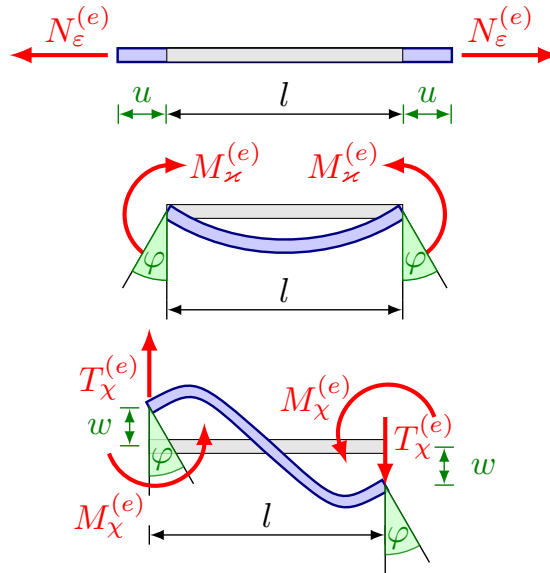
Wzór na odkształcenie osiowe (por. (2.45), (2.47)) nie zależy od wybranej parametryzacji elementu skończonego, natomiast wyrażenie (2.48) możemy zapisać w uproszczonej postaci:

$$\varepsilon_\kappa^e(\xi) = \varepsilon_\chi^e \xi + \varepsilon_\varkappa^e, \quad (2.49)$$

w której zdefiniowano pozostałe dwie składowe odkształcenia ramowego elementu skończonego:

$$\varepsilon_\chi^e = \frac{6}{l} \left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{w_2 - w_1}{l} \right], \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_\varkappa^e = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l}. \quad (2.50)$$

Składowe odkształceń określone przez związki (2.47) oraz (2.50) zilustrowano na rys. 2.6.



Rysunek 2.6: Podstawowe składowe deformacji ramowego elementu skończonego.

Dowolną deformację ramowego elementu skończonego w ramach przyjętych założeń

możemy rozłożyć na trzy niezależne składowe odkształceń: $\varepsilon_\varepsilon^e$, ε_\varkappa^e oraz ε_χ^e :

$$\varepsilon_\alpha^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_\varepsilon^e \\ \varepsilon_\varkappa^e \\ \varepsilon_\chi^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_2 - u_1}{l} \\ \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} \\ \frac{6}{l} \left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{w_2 - w_1}{l} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

lub krócej:

$$\varepsilon_\alpha^e = L_{\alpha i}^e q_i^e. \quad (2.52)$$

We wzorze (2.52) $L_{\alpha i}^e$ jest lokalną macierzą odkształceń:

$$L_{\alpha i}^e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Związki fizyczne (2.26) możemy wyrazić w funkcji otrzymanych wyżej składowych odkształceń we współrzędnej bezwymiarowej ξ :

$$N^e = EA \varepsilon_\varepsilon^e, \quad M^e = EJ (\varepsilon_\chi^e \xi + \varepsilon_\varkappa^e), \quad T^e = -\frac{2}{l} EJ \varepsilon_\chi^e. \quad (2.54)$$

Związki (2.54) w zależności od parametrów węzłowych elementu skończonego mają postać:

$$F_i^e = \begin{bmatrix} N_1^e \\ T_1^e \\ M_1^e \\ N_2^e \\ T_2^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l} EJ \\ 0 & -EJ & EJ \\ EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l} EJ \\ 0 & EJ & EJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{3}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{3}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

lub używając notacji indeksowej:

$$F_i^e = S_{i\alpha}^e L_{\alpha j}^e q_j^e = K_{ij}^e q_j^e = S_{i\alpha}^e \varepsilon_\alpha^e, \quad (2.56)$$

gdzie $S_{i\alpha}^e$ jest lokalną macierzą parametrów sztywności:

$$S_{i\alpha}^e = \begin{bmatrix} -EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l} EJ \\ 0 & -EJ & EJ \\ EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{l} EJ \\ 0 & EJ & EJ \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

a K_{ij}^e macierzą sztywności elementu ramowego (zob. 2.27). Istotny jest tutaj fakt, że możemy przedstawić związek pomiędzy uogólnionymi siłami węzłowymi F_i^e , a składowymi odkształcenia elementu ε_α^e (zob. 2.56).

2.3.3 Związki dystorsji wirtualnych z modyfikacją sztywności

Na belkowy element skończony możemy zatem nałożyć trzy dystorsje wirtualne odpowiadające składowym odkształceń, czyli: $\varepsilon_\varepsilon^e$, ε_\varkappa^e i ε_χ^e . Zgodnie z postulatem 2.1, konstrukcje zmodyfikowana i modelowana dystorsjami wirtualnymi mają tożsame pola odkształceń i uogólnionych naprężeń, zatem możemy napisać poniższe równania:

$$\begin{aligned} N^e &= k_{EA}^e (\varepsilon_\varepsilon^e - \varepsilon_\varepsilon^{0e}) = \hat{k}_{EA}^e \varepsilon_\varepsilon^e, \\ M^e &= k_{EJ}^e ((\varepsilon_\chi^e - \varepsilon_\chi^{0e}) \xi + \varepsilon_\varkappa^e - \varepsilon_\varkappa^{0e}) = \hat{k}_{EJ}^e (\varepsilon_\chi^e \xi + \varepsilon_\varkappa^e), \\ T^e &= -\frac{2}{l} k_{EJ}^e (\varepsilon_\chi^e - \varepsilon_\chi^{0e}) = -\frac{2}{l} \hat{k}_{EJ}^e \varepsilon_\chi^e, \end{aligned} \quad (2.58)$$

w których oznaczono $\hat{k}_{EA}^e = \hat{E}\hat{A}$ zmodyfikowaną sztywność podłużną oraz $\hat{k}_{EJ}^e = \hat{E}\hat{J}$ – zmodyfikowaną sztywność zgięciową. Z równań (2.58) wynikają następujące definicje parametrów modyfikacji elementu skończonego:

$$\vartheta_e^{EA} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{k}_{EA}^e}{k_{EA}^e} = \frac{\hat{E}\hat{A}}{EA}, \quad \vartheta_e^{EJ} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{k}_{EJ}^e}{k_{EJ}^e} = \frac{\hat{E}\hat{J}}{EJ}. \quad (2.59)$$

W skończonym elemencie ramowym będziemy rozumieć parametr modyfikacji jako ϑ_e^{EA} oraz ϑ_e^{EJ} . Uwzględniając powyższe zależności w równaniu (2.58) otrzymamy związki łączące parametry modyfikacji i dystorsje wirtualne, w postaci:

$$\vartheta_e^{EA} \varepsilon_\varepsilon^e = \varepsilon_\varepsilon^e - \varepsilon_\varepsilon^{0e}, \quad (2.60)$$

$$\vartheta_e^{EJ} (\varepsilon_\chi^e \xi + \varepsilon_\varkappa^e) = (\varepsilon_\chi^e - \varepsilon_\chi^{0e}) \xi + \varepsilon_\varkappa^e - \varepsilon_\varkappa^{0e}, \quad (2.61)$$

$$\vartheta_e^{EJ} \varepsilon_\chi^e = \varepsilon_\chi^e - \varepsilon_\chi^{0e}. \quad (2.62)$$

Podstawiając równanie (2.62) do (2.61) znajdujemy związki pomiędzy składowymi wektora dystorsji wirtualnych a parametrami modyfikacji w następującej formie:

$$\vartheta_e^{EA} = \frac{\varepsilon_\varepsilon^e - \varepsilon_\varepsilon^{0e}}{\varepsilon_\varepsilon^e}, \quad \vartheta_e^{EJ} = \frac{\varepsilon_\varkappa^e - \varepsilon_\varkappa^{0e}}{\varepsilon_\varkappa^e}, \quad \vartheta_e^{EJ} = \frac{\varepsilon_\chi^e - \varepsilon_\chi^{0e}}{\varepsilon_\chi^e}. \quad (2.63)$$

Tworzą one wektor parametrów modyfikacji elementu skończonego:

$$\mu_\alpha^e = [\vartheta_e^{EA}, \vartheta_e^{EJ}, \vartheta_e^{EJ}]^T. \quad (2.64)$$

Precyzując modelowane parametry, tj. moduł Younga E , pole przekroju poprzecznego A i moment bezwładności J otrzymamy:

$$\mu_\alpha^e = [\vartheta_e^E, \vartheta_e^A, \vartheta_e^J]^T, \quad \text{lub :} \quad \mu_\alpha^e = [\vartheta_e^A, \vartheta_e^J, \vartheta_e^J]^T, \quad (2.65)$$

gdzie: $\vartheta_e^E = \frac{\hat{E}}{E}$, $\vartheta_e^A = \frac{\hat{A}}{A}$, $\vartheta_e^J = \frac{\hat{J}}{J}$. Jak widać, wektor modyfikacji parametrów elementu skończonego μ_α^e może być zdefiniowany dwojako w zależności od modelowanych zmian

w konstrukcji. W przypadku szczególnym, gdy mamy do czynienia z jednoczesną modyfikacją 3 parametrów (E, A, J) wygodniej jest posługiwać się sztywnością osiową k_{EA}^e i sztywnością zgięciową k_{EJ}^e elementu. Wynika to z tego, że składowa druga i trzecia wektora modyfikacji parametrów są tożsame, a zatem jednoznacznie mogą być modelowane co najwyżej dwa parametry w ramowym elemencie skończonym.

Kratowy element skończony charakteryzuje pojedyncze pole dystorsji wirtualnych, odkształceń i sił wewnętrznych, a całkowita ich liczba jest tożsama z liczbą modelowanych elementów konstrukcji. Zwróćmy tutaj uwagę, że używając wprowadzonej powyżej notacji w elemencie kratowym zachodzi relacja $\mu_\alpha^e = [\vartheta_e^{EA}]$. Element skończony ramy płaskiej opisują trzy składowe dystorsji, odkształceń i uogólnionych sił wewnętrznych i należy tutaj sprecyzować formalny opis modelowania. Wprowadzamy umowę, że dolny indeks „ $(\cdot)_\alpha$ ” wskazuje składowe wektora odkształceń i parametrów modyfikacji. Tylko w przypadku konstrukcji kratowych te składowe korespondują z elementem α . Występujące oznaczenia „ e ” lub „ e ” wskazują, że dane wielkości dotyczą elementu skończonego. Oczywiście, liczba składowych każdego z tych wektorów wynosi tutaj 3. Natomiast występujące w składowych wektora modyfikacji parametrów dodatkowe dolne oznaczenie „ (\cdot) ” wskazuje na rodzaj modelowanego parametru. Dodatkowo, składowe wektora dystorsji wirtualnych ξ_α^e i odkształceń ε_α^e są rozróżnialne przez odpowiednie dolne oznaczenia: „ $(\cdot)_\varepsilon$ ”, „ $(\cdot)_\varkappa$ ” oraz „ $(\cdot)_\chi$ ”.

2.3.4 Macierz wpływu konstrukcji ramowej

W poprzednim podrozdziale omówione zostały składowe odkształceń i dystorsji wirtualnych pojedynczego elementu skończonego. Konstrukcja jest złożona z wielu takich elementów, więc zachodzi potrzeba globalnego opisu jej deformacji. Rozpatrzmy zatem składowe odkształcenia kolejnych n ramowych elementów skończonych konstrukcji:

$$\varepsilon_\beta^1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_\varepsilon^1 \\ \varepsilon_\varkappa^1 \\ \varepsilon_\chi^1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_\beta^2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_\varepsilon^2 \\ \varepsilon_\varkappa^2 \\ \varepsilon_\chi^2 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \varepsilon_\beta^n = \begin{bmatrix} \varepsilon_\varepsilon^n \\ \varepsilon_\varkappa^n \\ \varepsilon_\chi^n \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Globalny wektor odkształceń konstrukcji możemy teraz utworzyć z kolejnych wektorów odkształceń elementów skończonych (por. (2.66)):

$$\varepsilon_\alpha = [\varepsilon_\beta^1, \varepsilon_\beta^2, \dots, \varepsilon_\beta^n]^T, \quad (2.67)$$

lub uwzględniając wszystkie ich składowe w postaci:

$$\varepsilon_\alpha = [\varepsilon_\varepsilon^1, \varepsilon_\varkappa^1, \varepsilon_\chi^1, \varepsilon_\varepsilon^2, \varepsilon_\varkappa^2, \varepsilon_\chi^2, \dots, \varepsilon_\varepsilon^n, \varepsilon_\varkappa^n, \varepsilon_\chi^n]^T. \quad (2.68)$$

Należy zwrócić uwagę, że we wzorze (2.68) dolny indeks $(\cdot)_\alpha$ występuje jako składowa odkształcenia, podczas gdy dla konstrukcji kratowych był skojarzony również z elementem skończonym. W przypadku konstrukcji złożonej wyłącznie z n ramowych elementów skończonych przyjmuje wartości: $\alpha = 1, 2, \dots, 3n$. Przyjęcie takiej definicji

wektora odkształceń konstrukcji jest wygodne dla dalszych rozważań. Analogicznie do wektora odkształceń definiujemy wektor dystorsji wirtualnych ε_α^0 :

$$\varepsilon_\alpha^0 = [\varepsilon_\varepsilon^{01}, \varepsilon_\varkappa^{01}, \varepsilon_\chi^{01}, \varepsilon_\varepsilon^{02}, \varepsilon_\varkappa^{02}, \varepsilon_\chi^{02}, \dots, \varepsilon_\varepsilon^{0n}, \varepsilon_\varkappa^{0n}, \varepsilon_\chi^{0n}]^T. \quad (2.69)$$

Obliczenie zaktualizowanego wektora odkształceń ε_α konstrukcji ramowej na którą nałożyliśmy pole dystorsji wirtualnych ε_α^0 przebiega podobnie jak zostało pokazane na przykładzie konstrukcji kratowych, a mianowicie (por. (2.17a)):

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^L + \varepsilon_\alpha^R = \varepsilon_\alpha^L + D_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^0, \quad (2.70)$$

gdzie $D_{\alpha\beta}$ jest tutaj macierzą wpływu konstrukcji ramowej. Macierz ta jest konstruowana dla kolejnych składowych jednostkowych dystorsji wirtualnych ε_α^0 , a jej kolumny stanowią składowe wektora odkształceń wywołane działaniem tych dystorsji. Liczba składowych odkształcenia skończonego ε_α elementu ramowego jest 3-krotnie większa w odniesieniu do elementu kratowego, natomiast w przypadku macierzy wpływu $D_{\alpha\beta}$ liczba wyrazów jest 9-krotnie większa. Ma ona postać:

$$D_{\alpha\beta} = \begin{matrix} & \varepsilon_\varepsilon^{01}=1 & \varepsilon_\varkappa^{01}=1 & \varepsilon_\chi^{01}=1 & \varepsilon_\varepsilon^{02}=1 & \dots & \varepsilon_\chi^{0n}=1 \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{\varepsilon\varepsilon}^1 & \varepsilon_{\varepsilon\varkappa}^1 & \varepsilon_{\varepsilon\chi}^1 & \varepsilon_{\varepsilon\varepsilon}^2 & \dots & \varepsilon_{\varepsilon\chi}^1 \\ \varepsilon_{\varkappa\varepsilon}^1 & \varepsilon_{\varkappa\varkappa}^1 & \varepsilon_{\varkappa\chi}^1 & \varepsilon_{\varkappa\varepsilon}^2 & \dots & \varepsilon_{\varkappa\chi}^1 \\ \varepsilon_{\chi\varepsilon}^1 & \varepsilon_{\chi\varkappa}^1 & \varepsilon_{\chi\chi}^1 & \varepsilon_{\chi\varepsilon}^2 & \dots & \varepsilon_{\chi\chi}^1 \\ \varepsilon_{\varepsilon\varepsilon}^2 & \varepsilon_{\varepsilon\varkappa}^2 & \varepsilon_{\varepsilon\chi}^2 & \varepsilon_{\varepsilon\varepsilon}^2 & \dots & \varepsilon_{\varepsilon\chi}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{\chi\varepsilon}^n & \varepsilon_{\chi\varkappa}^n & \varepsilon_{\chi\chi}^n & \varepsilon_{\chi\varepsilon}^n & \dots & \varepsilon_{\chi\chi}^n \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (2.71)$$

Algorytm 2.1 przedstawia kolejne etapy obliczeń koniecznych do wyznaczenia macierzy wpływu konstrukcji ramowej lub kratowej.

ALGORYTM 2.1:

- A. określić zbiór elementów skończonych konstrukcji \mathcal{D} podlegających modelowaniu;
- B. obliczyć przemieszczenia wywołane jednostkowymi dystorsjami wirtualnymi:
 - (1) wyznaczyć globalną macierz obciążeń kompensacyjnych $Q_{i\alpha}$, realizujące kolejne jednostkowe stany dystorsyjne ε_α^0 w elementach ze zbioru \mathcal{D} ;
 - (2) rozwiązać $n = \dim(\varepsilon_\alpha^0)$ układów równań:

$$K_{ij} u_{j\alpha} = Q_{i\alpha}, \quad (2.72)$$

gdzie $u_{j\alpha}$ stanowi macierz rozwiązań;

(3) transformować uogólnione przemieszczenia $u_{j\alpha}$ z układu globalnego do lokalnego $q_{j\alpha}$;

C. obliczyć odpowiednie składowe odkształcenia elementów skończonych na podstawie wyznaczonych przemieszczeń lokalnych ze wzorów (2.51) i umieścić je w odpowiednich komórkach macierzy wpływu $D_{\alpha\beta}$.

Wielokrotne rozwiązywanie układów równań w postaci (2.72) wygodnie jest rozwiązywać dokonując rozkładu Cholesky'ego macierzy sztywności K_{ij} na macierz górno- i dolnotrójkątną. Choć algorytm tej metody jest numerycznie efektywny, to czasami bywa niestabilny. Wówczas alternatywą jest algorytm oparty na rozkładzie singularnym (Singular Value Decomposition, SVD).

2.3.5 Modelowanie parametrów modyfikacji konstrukcji

Dotychczas omówiony został wektor modyfikacji μ_α^e na poziomie pojedynczego elementu skończonego. Modelowanie sztywności całej konstrukcji wymaga zdefiniowania wektora μ_α analogicznie do wektora odkształceń ε_α i dystorsji wirtualnych ε_α^0 . Postępując tak, jak w poprzednim paragrafie, wektory modyfikacji parametrów poszczególnych elementów skończonych mają postać:

$$\mu_\beta^1 = \begin{bmatrix} \vartheta_{EA}^1 \\ \vartheta_{EJ}^1 \\ \vartheta_{EJ}^1 \end{bmatrix}, \quad \mu_\beta^2 = \begin{bmatrix} \vartheta_{EA}^2 \\ \vartheta_{EJ}^2 \\ \vartheta_{EJ}^2 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mu_\beta^e = \begin{bmatrix} \vartheta_{EA}^n \\ \vartheta_{EJ}^n \\ \vartheta_{EJ}^n \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Wektor modyfikacji parametrów konstrukcji jest utworzony z kolejnych wektorów modyfikacji parametrów elementów skończonych (2.73):

$$\mu_\alpha = [\mu_\beta^1, \mu_\beta^2, \dots, \mu_\beta^n]^T, \quad (2.74)$$

lub:

$$\mu_\alpha = [\vartheta_{EA}^1, \vartheta_{EJ}^1, \vartheta_{EJ}^1, \vartheta_{EA}^2, \vartheta_{EJ}^2, \vartheta_{EJ}^2, \dots, \vartheta_{EA}^n, \vartheta_{EJ}^n, \vartheta_{EJ}^n]^T. \quad (2.75)$$

Docelowo wektor μ_α należy przedstawić w zależności od modelowanych parametrów (por. (2.65)) – np. moduł Young'a. Związek (2.75) jest ogólny i wyrażony w funkcji sztywności osiowej i zgięciowej elementów skończonych.

Wszystkie składowe wektora odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami i konstrukcji modyfikowanej muszą być tożsame (por. postulat 2.1), co prowadzi do związku:

$$\mu_\alpha \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^0. \quad (2.76)$$

Dodajmy, że w równaniu (2.76) nie występuje sumowanie względem podkreślonych indeksów. Możemy teraz wyznaczyć wektor dystorsji wirtualnych ε_α^0 oraz zaktualizowany

wektor odkształceń ε_α dla zadanego wektora parametru modyfikacji μ_α ze związków (2.76) i (2.70):

$$\begin{cases} \mu_\alpha \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha - \overset{0}{\varepsilon}_\alpha, \\ \varepsilon_\alpha = \overset{L}{\varepsilon}_\alpha + D_{\alpha\beta} \overset{0}{\varepsilon}_\beta. \end{cases} \quad (2.77)$$

Eliminując wektor odkształceń ε_α z układu (2.77) wektor dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ można wyznaczyć z równania:

$$A_{\alpha\beta} \overset{0}{\varepsilon}_\beta = (1_\alpha - \mu_\alpha) \overset{L}{\varepsilon}_\alpha, \quad (2.78)$$

gdzie $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - (1_\alpha - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta}$. Natomiast wektor odkształceń ε_α może być wyznaczony z dowolnego równania układu (2.77).

Wektor parametrów modyfikacji a wektor parametrów konstrukcji. Na zakończenie okreśmy związki pomiędzy wektorem parametrów modyfikacji konstrukcji μ_α a modyfikacjami elementów $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ (górne oznaczenie (\cdot) odnosi się tutaj do modelowanego parametru). Składowe wektora $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ zawierają parametry modyfikacji kolejnych elementów γ . Zatem wymiar wektora $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ jest równy liczbie elementów, w których modelowane są zmiany – w odróżnieniu od wektora parametrów modyfikacji μ_α zdefiniowanego przez związek (2.75).

W celu określenia związków pomiędzy wektorami μ_α i $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ wprowadzimy macierz transformacji $\Phi_{\alpha\gamma}^{(\cdot)}$ w postaci:

$$\mu_\alpha = \Phi_{\alpha\gamma}^{(\cdot)} \vartheta_\gamma^{(\cdot)}. \quad (2.79)$$

W szczególności postaci macierzy transformacji zależą od modelowanych parametrów, natomiast nie zależą od topologii konstrukcji. W celu zobrazowania jej budowy weźmy pod uwagę 2-elementową konstrukcję ramową. Istotne jest, że mamy do czynienia z dwoma elementami ramowymi (to determinuje $\dim(\mu_\alpha) = 6$ oraz $\dim(\vartheta_\gamma) = 2$), a macierz transformacji $\Phi_{\alpha\gamma}^{(\cdot)}$ ma wymiar 6×2 . Macierz ta jest zależna od typu modelowanych parametrów, i utworzymy ją dla trzech przypadków:

- modelowanie modułu Young'a:

$$\mu_\alpha = \Phi_{\alpha\gamma}^E \vartheta_\gamma^E \Rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^E \\ \vartheta_2^E \end{bmatrix}; \quad (2.80)$$

- modelowanie pola przekroju poprzecznego:

$$\mu_\alpha = \Phi_{\alpha\gamma}^A \vartheta_\gamma^A \Rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^A \\ \vartheta_2^A \end{bmatrix}; \quad (2.81)$$

- modelowanie momentu bezwładności przekroju poprzecznego:

$$\mu_\alpha = \Phi_{\alpha\gamma}^J \vartheta_\gamma^J \Rightarrow \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_1^J \\ \vartheta_2^J \end{bmatrix}; \quad (2.82)$$

W następnym rozdziale będą wykorzystane te zależności do analizy wrażliwości modelowanych odpowiedzi konstrukcji. Na zakończenie warto tutaj dodać, że gradienty wektorów parametrów modyfikacji względem parametrów konstrukcji mają postać:

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^{(\cdot)}} = \Phi_{\alpha\gamma}^{(\cdot)}. \quad (2.83)$$

W przypadku konstrukcji kratowych wektor modyfikacji parametrów jest tożsamy z wektorem parametrów konstrukcji, a gradient wektora modyfikacji jest równy macierzy jednostkowej.

Rozdział 3

Metoda Dystorsji Wirtualnych w domenie częstości

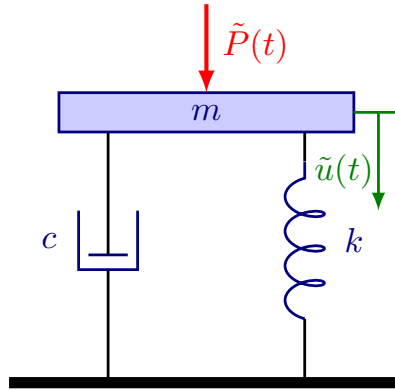
3.1 Wprowadzenie

Dokonując pomiarowej analizy konstrukcji w domenie częstości zwykle rozumie się przez to transformację danych pomierzonych w domenie czasu do domeny częstości przy zastosowaniu FFT (*Fast Fourier Transformation*). W ten sposób uzyskuje się wiedzę o rozkładzie poszczególnych częstości drgającej konstrukcji. Przedstawiane podejście w niniejszej pracy jest oparte na analizie konstrukcji poddanej wymuszeniu harmonicznemu, o ustalonej nierezonansowej częstości. Tak sformułowany problem pozwala na redukcję kosztów numerycznych analizy konstrukcji, ograniczając ją do określenia amplitud drgań.

3.1.1 Drgania układu o jednym stopniu swobody

Rozpatrzmy układ mechaniczny o jednym stopniu swobody przedstawiony na rys. 3.1, obciążony siłą $\tilde{P}(t)$, złożony z masy m , sprężyny k oraz układu tłumiącego c . Rozważania bardziej złożonych układów można znaleźć w pracach m.in. [70, 71]. Wówczas ruch tego układu jest opisany równaniem:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k\tilde{u}(t) = \tilde{P}(t). \quad (3.1)$$



Rysunek 3.1: Układ drgający o jednym stopniu swobody.

Obciążenie $\tilde{P}(t)$ przyłożone do masy m przyjmijmy w harmoniczej postaci:

$$\tilde{P}(t) = P \sin(\omega t), \quad (3.2)$$

gdzie ω jest częstością kołową wymuszenia, a P – amplitudą siły wymuszającej.

Drgania układu bez tłumienia

Zakładając brak tłumienia ($c = 0$) oraz wymuszenie w postaci związku (3.2) równanie ruchu (3.1) przyjmuje w postaci:

$$m\ddot{u}(t) + k\tilde{u}(t) = P \sin(\omega t). \quad (3.3)$$

Zajmijmy się rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (3.3), w którym prawa strona jest równa zero (równanie różniczkowe jednorodne). Wówczas mamy do czynienia z równaniem opisującym drgania swobodne układu, a rozwiązanie ogólne jest dane w postaci:

$$\tilde{u}(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad \text{lub} \quad \tilde{u}(t) = A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t) \quad (3.4)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ jest częstością kołową drgań własnych układu, a A_1 i A_2 są stałymi zależnymi od warunków początkowych.

Rozwiązanie szczególne równania (3.3), możemy przedstawić jako odpowiedź harmoniczną układu drgającego o częstości zgodnej z częstością wymuszenia ω :

$$\tilde{u}(t) = B_1 \sin(\omega t). \quad (3.5)$$

Stałą B_1 wyznaczymy podstawiając równanie (3.5) do (3.3) i porównując człony powstałe przy wyrazach $\sin(\omega t)$ otrzymujemy:

$$B_1 = \frac{P}{k - \omega^2 m} \quad \text{lub} \quad B_1 = \frac{P}{k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{P}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)}, \quad (3.6)$$

w którym przyjęto oznaczenie $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$.

W związku z powyższym możemy teraz wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (3.3), korzystając z twierdzenia o superpozycji rozwiązań równania różniczkowego, i przedstawić jako sumę rozwiązań (3.4) i (3.5):

$$\tilde{u}(t) = A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{P}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} \sin(\omega t) \quad (3.7)$$

Przyjmując zerowe warunki początkowe: $\tilde{u}(0) = 0$, $\dot{\tilde{u}}(0) = 0$ wyznaczamy stałe A_1 i A_2 :

$$A_1 = -\frac{P\beta}{k} \frac{1}{1-\beta^2}, \quad A_2 = 0, \quad (3.8)$$

a po podstawieniu do wzoru (3.7) oraz dokonaniu przekształceń otrzymujemy:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t) = u(-\beta \sin(\omega_0 t) + \sin(\omega t)), \quad (3.9)$$

gdzie $u = \frac{P}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)}$, a wyrażenie $\frac{P}{k}$ określa statyczne przemieszczenie masy m wywołane siłą P . We wzorze (3.9) przemieszczenia $\tilde{u}_1(t)$ są determinowane warunkami początkowymi wywołującymi drgania o częstotliwości rezonansowej ω_0 , podczas gdy wielkość $\tilde{u}_2(t)$ odpowiada za drgania wywołane siłą wymuszającą, które są z nią zgodne w fazie:

$$\tilde{u}_1(t) = -\frac{P}{k} \frac{\beta}{(1-\beta^2)} \sin(\omega_0 t), \quad \tilde{u}_2(t) = \frac{P}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} \sin(\omega t), \quad (3.10)$$

o amplitudach wynoszących odpowiednio: $u_1 = -\frac{P}{k} \frac{\beta}{(1-\beta^2)}$ oraz $u_2 = \frac{P}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)}$.

PRZYKŁAD 3.1: W celu zilustrowania związku (3.9) przyjmijmy, że układ przedstawiony na rys. (3.1), w którym nie występuje tłumienie ($c = 0$), opisują następujące parametry:

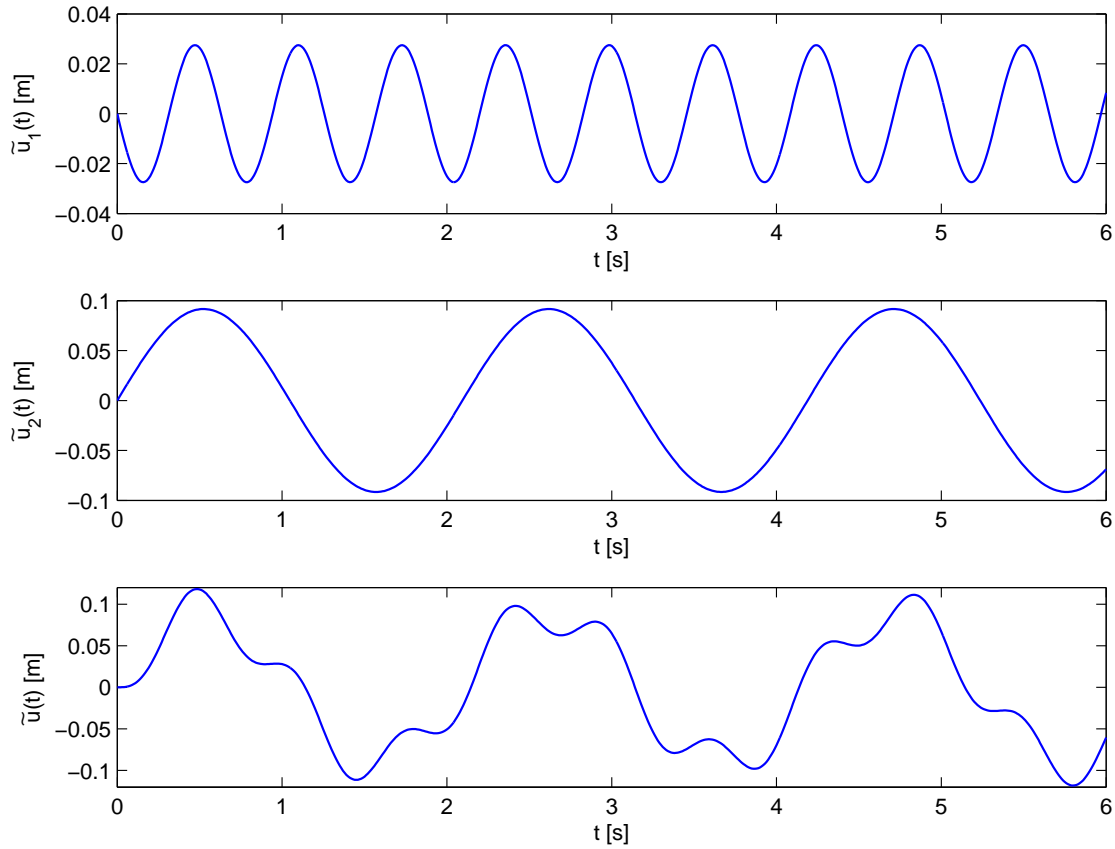
$$\begin{aligned} m &= 12 \text{ [kg]}, & k &= 1200 \text{ [N/m]}, & \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ [rad/s]}, \\ P &= 100 \text{ [N]}, & \omega &= 3 \text{ [rad/s]}, & \beta &= \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Na pierwszym rys. (3.2) pokazano drgania układu $\tilde{u}_1(t)$, o częstotliwości $\omega_0 = 10 \text{ [rad/s]}$, wywołane wprowadzeniem zerowych warunków początkowych mających charakter drgań swobodnych. Brak tłumienia powoduje, że amplituda przemieszczeń u_1 jest stała w czasie. Przemieszczenia $\tilde{u}_2(t)$ (wykres środkowy), wywołane przez siłę zewnętrzną, charakteryzuje ta częstotliwość ω , z którą działa siła wymuszająca $\tilde{P}(t)$. Natomiast drgania całkowite układu $\tilde{u}(t)$ (wykres dolny) są superpozycją drgań $\tilde{u}_1(t)$ oraz $\tilde{u}_2(t)$.

Drgania układu z uwzględnieniem tłumienia

Rozpatrzmy teraz bardziej ogólny przypadek, kiedy występuje tłumienie w rozpatrywanym układzie. Stosując podstawienie $\frac{c}{m} = 2\xi\omega_0$ oraz wymuszenie harmoniczne (3.2) równanie ruchu (3.1) możemy zapisać w postaci:

$$\ddot{\tilde{u}}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{\tilde{u}}(t) + \omega_0^2 \tilde{u}(t) = \frac{P}{m} \sin(\omega t). \quad (3.11)$$



Rysunek 3.2: Przeszyczenie masy w czasie: $\tilde{u}_1(t)$ – drgania zależne od warunków początkowych, $\tilde{u}_2(t)$ – drgania ustalone, $\tilde{u}(t)$ – drgania całkowite.

Wielkość ξ jest określana jako współczynnik tłumienia. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (3.11) (prawa strona równa zero) jest dane w postaci:

$$\tilde{u}_1(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A_1 \cos(\omega_D t) + A_2 \sin(\omega_D t)], \quad (3.12)$$

podczas gdy rozwiązanie szczególne wygląda następująco:

$$\tilde{u}_2(t) = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t). \quad (3.13)$$

We wzorze (3.12) $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ jest częstotnością drgań tłumionych. W ogólnym przypadku drgania układu tłumionego nie są zgodne w fazie z siłą wymuszającą, co powoduje konieczność występowania drugiego członu we wzorze (3.13). Podstawiając związek (3.13) do równania (3.11) otrzymujemy układ równań:

$$[-B_1 \omega^2 - 2B_2 \xi \omega \omega_0 + B_1 \omega_0^2] \sin(\omega t) = \frac{P}{m} \sin(\omega t), \quad (3.14)$$

$$[-B_2 \omega^2 + 2B_1 \xi \omega \omega_0 + B_2 \omega_0^2] \cos(\omega t) = 0, \quad (3.15)$$

z którego wyznaczamy stałe B_1 i B_2 , podstawiając przy tym zależności $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oraz $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$B_1 = \frac{P}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}, \quad B_2 = \frac{P}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}. \quad (3.16)$$

Reasumując, rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (3.11) jest sumą rozwiązań (3.12) oraz (3.13):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = \tilde{u}_1(t) + \tilde{u}_2(t) = & e^{-\xi\omega_0 t} [A_1 \cos(\omega_D t) + A_2 \sin(\omega_D t)] \\ & + \frac{P}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\omega t) - 2\xi\beta \cos(\omega t)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Przemieszczenia $\tilde{u}_1(t)$ opisują tłumione drgania swobodne, a stałe A_1, A_2 znajdziemy zadając warunki początkowe, podobnie jak w poprzednim paragrafie, $\tilde{u}(0) = 0$, $\dot{\tilde{u}}(0) = 0$:

$$A_1 = \frac{2P\beta\xi}{k((1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2)}, \quad A_2 = \frac{P\omega(2\xi^2 + \beta^2 - 1)}{k\omega_D((1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2)} \quad (3.18)$$

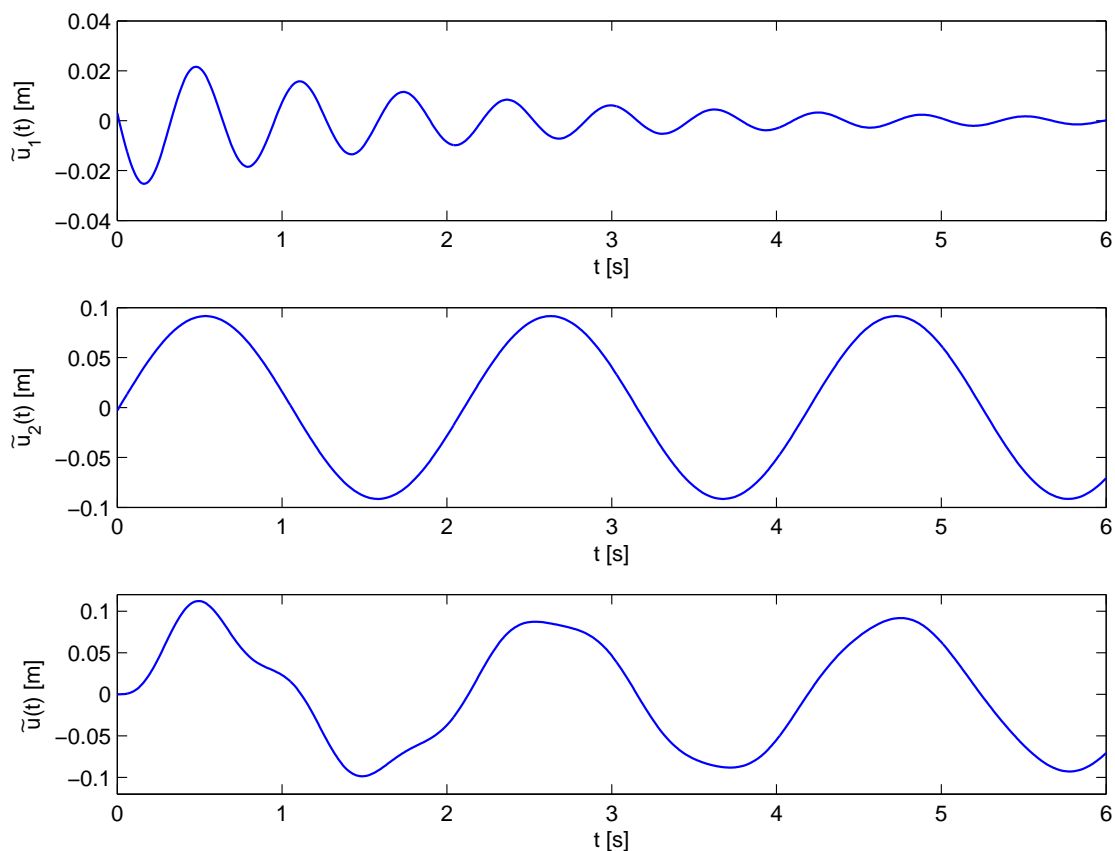
Uwzględniając wyznaczone powyżej stałe A_1 oraz A_2 we wzorze (3.17), całkowite przemieszczenie masy m możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \frac{Pe^{-\omega_0\xi t}}{k((1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2)} [2\beta\xi \cos(\omega_D t) + \omega(2\xi^2 + \beta^2 - 1) \sin(\omega_D t)] \\ & - \frac{2\beta\xi \cos(\omega t) - (1 - \beta^2) \sin(\omega t)}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

PRZYKŁAD 3.2: Rozważmy teraz ponownie układ przedstawiony na rys. 3.1, przyjmując parametry podane w przykładzie 3.1 oraz parametr tłumienia $c = 12 \left[\frac{\text{kg}\cdot\text{rad}}{\text{s}} \right]$, co odpowiada współczynnikowi tłumienia o wartości $\xi = 0.05$.

W tym przypadku drgania $\tilde{u}_1(t)$ wywołane warunkami początkowymi dość szybko znikają w czasie i mają wpływ na całkowite przemieszczenia $\tilde{u}(t)$ tylko w początkowej fazie tego procesu. Zauważmy jednocześnie, że drgania harmoniczne $\tilde{u}_2(t)$, przy nieznacznym tłumieniu, mają niewielkie przesunięcie fazowe oraz nieznaczną zmianę amplitudy i są bliskie drganiom uzyskanym w poprzednim przykładzie. Dokładniejszą analizę tego zjawiska ilustruje rys. 3.4.

Na rys. 3.4 kolorem niebieskim oznaczono drgania, w których nie występuje tłumienie. Nawet przy niewielkim wzroście współczynnika tłumienia ($\xi_2 = 0.1$) istotnie wytłumiane są drgania $\tilde{u}_1(t)$ będące wynikiem wprowadzenia warunków początkowych. Ten efekt pogłębia się wraz ze wzrostem ξ . Przemieszczenia $\tilde{u}_2(t)$ nie są już tak wrażliwe na zmianę współczynnika tłumienia ξ , a jego modyfikacja w przedziale $\langle 0, 0.1 \rangle$ praktycznie w sposób niezauważalny wpływa na te przemieszczenia. Widoczną różnicę daje się zaobserwować dopiero przy $\xi > 0.4$ – następuje zmiana zarówno amplitudy przemieszczeń jak i fazy w odniesieniu do układu nietłumionego.



Rysunek 3.3: Przemieszczenie masy w czasie: $\tilde{u}_1(t)$ – drgania wywołane warunkami początkowymi, $\tilde{u}_2(t)$ – drgania ustalone, $\tilde{u}(t)$ – drgania całkowite.

3.1.2 Drgania podłużne pręta

Będziemy teraz rozważać drgania podłużne pręta, o stałym przekroju poprzecznym A . W tym celu rozpatrzmy układ sił działających na wycinek pręta o długości dx przedstawiony na rys. 3.5.

Korzystając z zasady d'Alemberta możemy zapisać równanie równowagi tego wycinka w postaci:

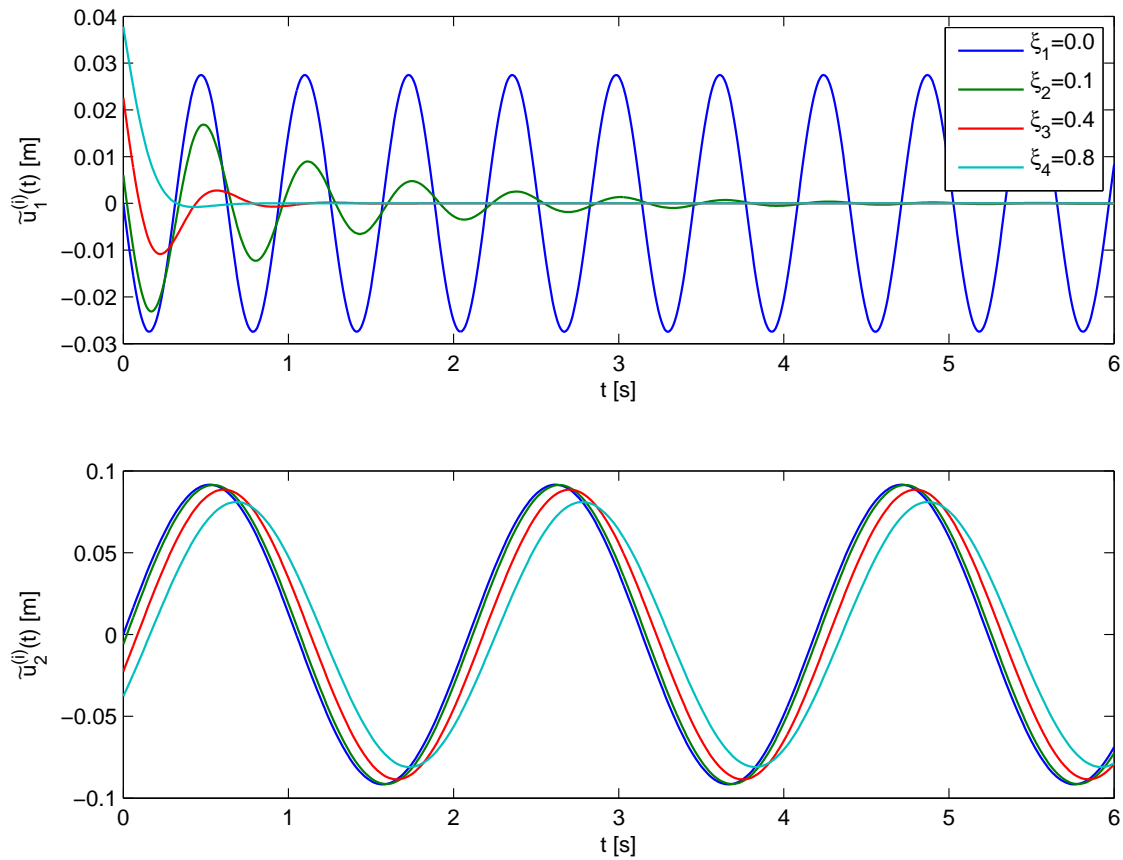
$$N(x, t) + \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} dx + dB(x, t) + p(x, t) dx - N(x, t) = 0, \quad (3.20)$$

przy czym zachodzą związki:

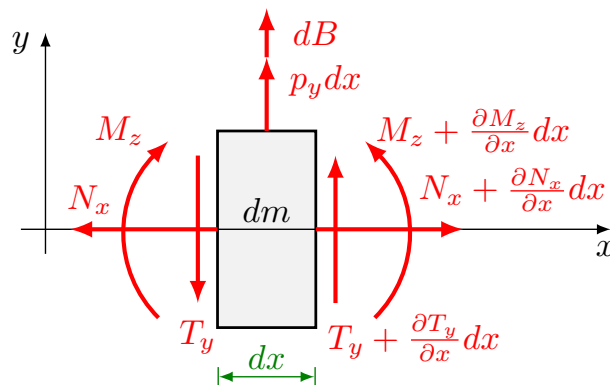
$$dB(x, t) = -\rho A dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad N = EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Wykonując podstawowe przekształcenia otrzymujemy równanie drgań pręta:

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{p(x, t)}{\rho A}, \quad (3.22)$$



Rysunek 3.4: Wpływ współczynnika tłumienia ξ na przemieszczenie masy w czasie: $\tilde{u}_1(t)$ – drgania wywołane warunkami początkowymi, $\tilde{u}_2(t)$ – drgania ustalone



Rysunek 3.5: Układ sił działających na wycinek pręta dx

gdzie $c^2 = \frac{E}{\rho}$. Otrzymaliśmy zatem równanie różniczkowe drugiego rzędu typu hiperbolicznego. W dalszej części tego podrozdziału zajmiemy się drganiami swobodnymi

kładąc $p(x, t) = 0$. Biorąc to pod uwagę oraz postulując rozwiązanie w postaci:

$$u(x, t) = U(x) T(t), \quad (3.23)$$

równanie (3.22) zapisujemy w następującej formie:

$$c^2 \frac{1}{U(x)} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}. \quad (3.24)$$

Zmienne x oraz t są niezależne, więc każda ze stron jest równa pewnej stałej, którą oznaczymy jako liczbę ujemną $-\omega^2$, co prowadzi do nietrywialnego rozwiązania $u(x, t) \neq 0$ (zagadnienie Sturm-Liouville'a). W związku z tym możemy z równania (3.24) wyodrębnić dwa liniowe równania różniczkowe:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} + k^2 U(x) = 0, \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad (3.25)$$

gdzie $k = \frac{\omega}{c}$. Rozwiązując je niezależnie odpowiednio względem zmiennej x oraz t otrzymujemy:

$$U(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad T(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \quad (3.26)$$

a stałe A, B wyznaczane są z warunków brzegowych, natomiast stałe C, D – z warunków początkowych. Poszukiwane rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego (3.22) znajdziemy podstawiając znalezione powyżej związki (3.26) do (3.23).

3.2 Dystorsje wirtualne w dziedzinie częstości

3.2.1 Równania ruchu

Równanie ruchu Metody Elementów Skończonych jest wyrażone następująco:

$$M_{ij} \ddot{u}_j(t) + C_{ij} \dot{u}_j(t) + K_{ij} u_j(t) = \tilde{F}_i(t). \quad (3.27)$$

We wzorze (3.27) oznaczono: $\tilde{u}_j(t)$ – przemieszczenie j -tego stopnia swobody, M_{ij} – macierz mas, C_{ij} – macierz tłumienia, K_{ij} – macierz sztywności. Zakładamy, że te macierze nie zależą od czasu t , a wielkość $\tilde{F}_i(t)$ jest wektorem obciążenia konstrukcji.

Naszym celem jest badanie konstrukcji poddanych obciążeniom harmonicznym, dlatego też siłę wymuszającą przyjmiemy wg zależności:

$$\tilde{F}_i(t) = F_i \sin(\omega t), \quad (3.28)$$

w której F_i jest amplitudą siły wymuszającej, działającej w i -tym stopniu swobody, zaś ω – częstością obciążenia. Ponadto, jak już wspomniano o tym wcześniej, będziemy zaniedbywać tłumienie przyjmując $C_{ij} = 0$.

Przyjęcie obciążenia w postaci (3.28) determinuje harmoniczną odpowiedź konstrukcji (zaniedbując wpływ warunków początkowych), którą postulujemy w postaci:

$$\tilde{u}_i(t) = u_i \sin(\omega t), \quad (3.29)$$

gdzie u_i jest amplitudą przemieszczenia i -tego stopnia swobody. Zarówno amplituda siły F_i jak i przemieszczenia u_i są tutaj wielkościami niezależnymi od czasu. Podstawiając zależności (3.28) i (3.29) do równania (3.27) oraz uwzględniając brak tłumienia otrzymujemy równanie równowagi konstrukcji wyrażone przez amplitudy siły i przemieszczeń:

$$-\omega^2 M_{ij} u_j + K_{ij} u_j = F_i. \quad (3.30)$$

Z uwagi na harmoniczny charakter drgań układu wektor odkształceń opisany jest w postaci:

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha \sin(\omega t). \quad (3.31)$$

Wobec tego równanie (3.30) wygodnie jest przedstawić w postaci:

$$-\omega^2 M_{ij} u_j + T_{iP} S_{P\alpha} L_{\alpha Q} T_{Qj} u_j = F_i, \quad \text{lub:} \quad -\omega^2 M_{ij} u_j + T_{iP} S_{P\alpha} \varepsilon_\alpha = F_i, \quad (3.32)$$

gdzie:

$$\varepsilon_\alpha = L_{\alpha Q} T_{Qj} u_j, \quad (3.33)$$

stanowi wektor składowych odkształceń konstrukcji, $L_{\alpha Q}$ jest globalną macierzą odkształceń zbudowaną z macierzy lokalnych (por. (2.53)), T_{Qj} jest macierzą transformacji z układu lokalnego do globalnego, $S_{P\alpha}$ jest globalną macierzą parametrów sztywności złożoną z podmacierzy elementowych (por. (2.57)). We wzorach (3.32), (3.33) dolne indeksy oznaczone dużymi, łacińskimi literami odnoszą się do składowych lokalnych utworzonych dla kolejnych elementów skończonych. Warto dodać, że amplitudy odkształceń również nie są zależne od czasu, aczkolwiek zależą od częstości wymuszenia ω (podobnie jak amplitudy przemieszczeń).

3.2.2 Harmoniczne dystorsje w elemencie skończonym

W poprzednim rozdziale za pomocą dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ modelowana była zmiana sztywności elementu wywołana modyfikacją modułu Young'a lub przekroju poprzecznego. W zadaniach dynamiki zmiana geometrii przekroju poprzecznego elementu ramowego powoduje zmianę nie tylko macierzy sztywności K_{ij} , lecz również macierzy mas M_{ij} , co może mieć istotny wpływ na zachowanie całego układu (szczególnie w przypadkach drgań o wyższej częstości). Modelowanie tych zmian tylko za pomocą dystorsji wirtualnych w postaci:

$$\overset{0}{\varepsilon}_\alpha(t) = \overset{0}{\varepsilon}_\alpha \sin(\omega t), \quad (3.34)$$

okazuje się niewystarczające. Z tego względu zachodzi potrzeba globalnego modelowania zmiany bezwładności układu. Zmiany te będziemy realizować przez wprowadzenie dodatkowych, globalnych sił węzłowych zgodnie z kierunkami kolejnych stopni swobody i według harmonicznego zależności:

$$\overset{0}{p}_i(t) = \overset{0}{p}_i \sin(\omega t). \quad (3.35)$$

Rozpatrzmy teraz konstrukcję zmodyfikowaną oraz modelowaną amplitudami dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ oraz $\overset{0}{p}_i$. Równania je opisujące mają postaci:

$$-\omega^2 \hat{M}_{ij} u_j + T_{iP} \hat{S}_{P\alpha} \varepsilon_\alpha = F_i, \quad -\omega^2 M_{ij} u_j + T_{iP} S_{P\alpha} (\varepsilon_\alpha - \overset{0}{\varepsilon}_\alpha) = F_i + \overset{0}{p}_i, \quad (3.36)$$

gdzie:

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij} + \Delta M_{ij}, \quad \hat{S}_{P\alpha} = S_{P\alpha} + \Delta S_{P\alpha}, \quad (3.37)$$

są zmodyfikowanymi macierzami odpowiednio mas i parametrów sztywności.

3.2.3 Modyfikacje parametrów konstrukcji a dystorsje wirtualne

Podobnie jak w przypadku zadań statyki związku pomiędzy wektorem dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ a wektorem parametrów modyfikacji μ_α znajdziemy żądając spełnienia postulatu 2.1. Dla drgań harmonicznego oznacza to, że amplitudy uogólnionych sił węzłowych oraz amplitudy składowych odkształcenia konstrukcji muszą być tożsame. Zaznaczmy tutaj, że nakładać będziemy zarówno amplitudy dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ na kolejne elementy skończone oraz globalnie amplitudy sił $\overset{0}{p}_i$. Jednakże, żądamy spełnienia postulatu 2.1 dla każdego elementu skończonego konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej:

$$\begin{aligned} N^e &= \hat{k}_{EA}^e \varepsilon_\varepsilon^e = k_{EA}^e (\varepsilon_\varepsilon^e - \overset{0e}{\varepsilon}_\varepsilon), \\ M^e &= \hat{k}_{EJ}^e (\varepsilon_\chi^e \xi + \varepsilon_\varkappa^e) = k_{EJ}^e ((\varepsilon_\chi^e - \overset{0e}{\varepsilon}_\chi) \xi + \varepsilon_\varkappa^e - \overset{0e}{\varepsilon}_\varkappa), \\ T^e &= -\frac{2}{l} \hat{k}_{EJ}^e \varepsilon_\chi^e = -\frac{2}{l} k_{EJ}^e (\varepsilon_\chi^e - \overset{0e}{\varepsilon}_\chi). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Należy pamiętać, że składowe odkształcenia w elemencie skończonym konstrukcji modelowanej są funkcjami amplitud dystorsji wirtualnych nie tylko wprowadzonych do tego elementu, ale również nałożonych na inne elementy. Wzory (3.38) są analogiczne do wyrażeń (2.58), lecz zachodzi tutaj istotna różnica: w elemencie skończonym amplitudy uogólnionych sił węzłowych N^e , T^e , M^e i składowych odkształcenia $\varepsilon_\varepsilon^e$, ε_\varkappa^e , ε_χ^e są zależne

nie tylko od częstości wymuszenia, ale również od dystorsji wirtualnych $\overset{\circ}{p}_i$ modelujących zachowanie zmiany bezwładności konstrukcji:

$$\varepsilon_\alpha^e = \varepsilon^e(\overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(\omega), \overset{\circ}{p}_i(\omega)). \quad (3.39)$$

Z równań (3.38) wynikają następujące związki na składowe wektora parametrów modyfikacji elementu skończonego:

$$\vartheta_{EA}^e = \frac{\varepsilon_\varepsilon^e - \overset{\circ}{\varepsilon}_\varepsilon^e}{\varepsilon_\varepsilon^e}, \quad \vartheta_{EJ}^e = \frac{\varepsilon_\varkappa^e - \overset{\circ}{\varepsilon}_\varkappa^e}{\varepsilon_\varkappa^e}, \quad \vartheta_{EJ}^e = \frac{\varepsilon_\chi^e - \overset{\circ}{\varepsilon}_\chi^e}{\varepsilon_\chi^e}, \quad (3.40)$$

lub ogólniej:

$$\mu_\alpha \varepsilon_\alpha(\overset{\circ}{\varepsilon}_\beta, \overset{\circ}{p}_i) = \varepsilon_\alpha(\overset{\circ}{\varepsilon}_\beta, \overset{\circ}{p}_i) - \overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha(\overset{\circ}{\varepsilon}_\beta, \overset{\circ}{p}_i). \quad (3.41)$$

Amplitudy pól dystorsji wirtualnych $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{\circ}{p}_i$ są sprzężone, a zatem potrzebujemy jeszcze dodatkowej zależności, aby jednoznacznie określić związki pomiędzy wektorem parametrów modyfikacji μ_α , a wektorami amplitud dystorsji wirtualnych $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{\circ}{p}_i$. Zależność tę możemy wyznaczyć odejmując równanie (3.36b) od (3.36a):

$$\overset{\circ}{p}_i = -\omega^2 \Delta M_{ij} u_j, \quad (3.42)$$

gdzie $\Delta M_{ij} = M_{ij} - \hat{M}_{ij}$ jest różnicą macierzy mas konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej oraz wykorzystano równość amplitud sił sprężystych konstrukcji zmodyfikowanej i modelowanej amplitudami dystorsji wirtualnych $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha$:

$$T_{iP} S_{P\alpha}(\varepsilon_\alpha - \overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha) = T_{iP} \hat{S}_{P\alpha} \varepsilon_\alpha. \quad (3.43)$$

Różnicę macierzy mas ΔM_{ij} , w przypadku konstrukcji ramowych, możemy zapisać rozkładając ją na część zależną od pól przekrojów oraz momentów bezwładności poszczególnych elementów w postaci:

$$\Delta M_{ij} = (1_\gamma - \vartheta_\gamma^A) \overset{A}{M}_{ij\gamma} + (1_\gamma - \vartheta_\gamma^J) \overset{J}{M}_{ij\gamma}. \quad (3.44)$$

W równaniu (3.44) kolejne przekroje γ macierzy $\overset{A}{M}_{ij\gamma}$ oraz $\overset{J}{M}_{ij\gamma}$ stanowią elementowe macierze mas zapisanych w globalnym układzie uogólnionych współrzędnych. Zostały one zdekomponowane na część zależną od pola przekroju poprzecznego A_γ oraz momentu bezwładności J_γ i dotyczą elementu skończonego γ . Globalną macierz mas możemy przedstawić w postaci:

$$M_{ij} = \sum_{\gamma=1}^{\text{l.e.}} \left(\overset{A}{M}_{ij\gamma} + \overset{J}{M}_{ij\gamma} \right), \quad (3.45)$$

gdzie sumowanie dotyczy wszystkich elementów konstrukcji. Ponadto, parametry modyfikacji sztywności we wzorze (3.44) wyrażone są jako zmiany wielkości geometrycznych przekroju poprzecznego:

$$\vartheta_\gamma^A = \frac{\hat{A}_\gamma}{A_\gamma}, \quad \vartheta_\gamma^J = \frac{\hat{J}_\gamma}{J_\gamma}. \quad (3.46)$$

3.3 Macierze wpływu

Istotę i wyznaczanie macierzy wpływu konstrukcji przedstawiono już w przypadku zadań statyki w rozdziale 2. Przypomnijmy, że w celu jej wyznaczenia należy rozwiązać równania równowagi konstrukcji, na którą nałożono obciążenia kompensacyjne równoważne jednostkowym dystorsjom wirtualnym.

W przypadku drgań ustalonych będziemy nakładać harmoniczne obciążenie kompensacyjne, o jednostkowych amplitudach:

$$\overset{0}{\varepsilon}_\alpha(t, \omega) = 1 \cdot \sin(\omega t), \quad \overset{0}{p}_i(t, \omega) = 1 \cdot \sin(\omega t). \quad (3.47)$$

W związku z tym, że mamy teraz dystorsje wirtualne dwojakiego rodzaju, będą one generować dwie macierze wpływu odpowiednio $D_{\alpha\beta}^\varepsilon$ oraz $D_{\alpha i}^p$. Kolumny tych macierzy zawierają amplitudy składowych odkształceń wygenerowanych poprzez nałożenie na konstrukcję początkową kolejnych jednostkowych dystorsji wirtualnych. Dzięki tym macierzom możemy obliczyć amplitudy składowych odkształceń konstrukcji modelowanej dystorsjami:

$$\varepsilon_\alpha = \overset{L}{\varepsilon}_\alpha + D_{\alpha\beta}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\beta + D_{\alpha i}^p \overset{0}{p}_i. \quad (3.48)$$

W związku (3.42) występuje wektor zaktualizowanych uogólnionych przemieszczeń węzłowych, który należy określić, aby wyznaczyć dystorsje wirtualne modelujące modyfikacje konstrukcji. Do tego celu posłużą nam przemieszczeniowe macierze wpływu $B_{i\alpha}^\varepsilon$, B_{ik}^p , których kolumny zawierają przemieszczenia obliczone na odpowiednie jednostkowe dystorsje wirtualne (wyznaczane analogicznie do macierzy wpływu $D_{\alpha\beta}^\varepsilon$ i $D_{\alpha i}^p$):

$$u_i = \overset{L}{u}_i + B_{i\alpha}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\alpha + B_{ik}^p \overset{0}{p}_k. \quad (3.49)$$

W celu obliczenia zaktualizowanych pól przemieszczeń (3.49) i odkształceń (3.48) należy uprzednio wyznaczyć amplitudy pól dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{0}{p}_i$.

3.4 Konstrukcja modelowana dystorsjami

W tym rozdziale pokażemy wyznaczanie amplitud sprzężonych dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{0}{p}_i$ w zależności od wektora modyfikacji parametrów μ_α .

Wykorzystując wzory (3.41) i (3.42) oraz związki pozwalające obliczać zaktualizowane odpowiedzi konstrukcji (3.49) i (3.48) otrzymujemy układ czterech równań:

$$\begin{cases} \mu_\alpha \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha - \overset{0}{\varepsilon}_\alpha, \\ \overset{0}{p}_i = -\omega^2 \Delta M_{ij} u_j, \\ u_i = \overset{L}{u}_i + B_{i\alpha}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\alpha + B_{ik}^p \overset{0}{p}_k, \\ \varepsilon_\alpha = \overset{L}{\varepsilon}_\alpha + D_{\alpha\beta}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\beta + D_{\alpha i}^p \overset{0}{p}_i. \end{cases} \quad (3.50)$$

Niewiadomymi są tutaj amplitudy pól dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{0}{p}_i$ oraz amplitudy zaktualizowanych przemieszczeń u_i oraz odkształceń ε_α . Rugując z układu równań te

dwa ostatnie pola otrzymujemy układ równań, z którego możemy wyznaczyć amplitudy dystorsji wirtualnych:

$$\begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta} & -(1 - \mu_\alpha) D_{\alpha k} \\ -\omega^2 \Delta M_{ij} B_{j\beta} & -\delta_{ik} - \omega^2 \Delta M_{ij} B_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_\beta \\ \overset{0}{p}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu_\alpha) \overset{L}{\varepsilon}_\alpha \\ \omega^2 \Delta M_{ij} \overset{L}{u}_j \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Układ (3.51) można przedstawić w uproszczonej postaci:

$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \overset{0}{d}_{\tilde{\beta}} = b_{\tilde{\alpha}}^L, \quad (3.52)$$

w której przyjęto następujące oznaczenia:

$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta} & -(1 - \mu_\alpha) D_{\alpha k} \\ -\omega^2 \Delta M_{ij} B_{j\beta} & -\delta_{ik} - \omega^2 \Delta M_{ij} B_{jk} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\overset{0}{d}_{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} \overset{0}{\varepsilon}_\beta \\ \overset{0}{p}_k \end{bmatrix}, \quad b_{\tilde{\alpha}}^L = \begin{bmatrix} (1 - \mu_\alpha) \overset{L}{\varepsilon}_\alpha \\ \omega^2 \Delta M_{ij} \overset{L}{u}_j \end{bmatrix},$$

gdzie wymiar macierzy $A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ wynosi $(\dim(\varepsilon_\alpha) + \dim(u_i)) \times (\dim(\varepsilon_\alpha) + \dim(u_i))$.

Jak wiadomo, macierz mas ramowego elementu skończonego γ jest zależna od jego długości l_γ , ale co ważniejsze od pola przekroju poprzecznego A_γ oraz momentu bezwładności J_γ . W zależności od kształtu przekroju poprzecznego oraz od sposobu jego modyfikacji różnie może to wpływać na zmianę momentu bezwładności. Przykładowo, założmy że prostokątnemu przekrojowi poprzecznemu ($A_\gamma = b_\gamma h_\gamma$) przypiszemy zmodyfikowaną szerokość $\hat{b}_\gamma = 0.9 b_\gamma$. Modyfikacje parametrów elementu γ wyniosą $\vartheta_\gamma^A = \vartheta_\gamma^J = 0.9$. Natomiast, gdy równomiernie zmodyfikujemy wysokość modyfikacje parametrów przyjmą wartości: $\vartheta_\gamma^A = 0.9$, $\vartheta_\gamma^J = 0.729$. Jak widzimy, identycznym modyfikacjom pola przekroju mogą towarzyszyć różne modyfikacje momentów bezwładności. Dlatego też w pracy zostanie utrzymany ten poziom ogólności, który pozwala traktować zmiany pól przekrojów poprzecznych i momentów bezwładności niezależnie.

Szczególny przypadek występuje, gdy zachodzi potrzeba modelowania wyłącznie elementowych zmian modułu Young'a E_γ . Brak modyfikacji ϑ_γ^A oraz ϑ_γ^J naturalnie narzuca $\Delta M_{ij} = 0$ (por. (3.44)). Ponadto, ze związku (3.42) otrzymujemy $\overset{0}{p}_i = 0$, a zatem dystorsje wirtualne $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{0}{p}_i$ są rozprężone, a do wyznaczenia mamy tylko $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$. Wyznaczyć je można, jeśli podstawimy związek (3.48) do wzoru (3.41):

$$[\delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta}^\varepsilon] \overset{0}{\varepsilon}_\beta = (1 - \mu_\alpha) \overset{L}{\varepsilon}_\alpha, \quad (3.54)$$

lub:

$$A_{\alpha\beta} \overset{0}{\varepsilon}_\beta = (1 - \mu_\alpha) \overset{L}{\varepsilon}_\alpha. \quad (3.55)$$

Związek (3.54) jest analogiczny do (2.78), lecz należy pamiętać, że mamy tu do czynienia z amplitudami dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\beta$, zależnymi od częstości wymuszenia ω , a macierz $D_{\alpha\beta}^\varepsilon$ zawiera amplitudy odkształceń otrzymane z rozwiązania równań (3.30).

3.5 Analiza wrażliwości

W poprzednim podrozdziale wyznaczono amplitudy dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ oraz $\overset{0}{p}_i$ modelujących wprowadzone do konstrukcji modyfikacje $\vartheta_\alpha^{(0)}$. Teraz zajmiemy się badaniem zmian amplitud odkształceń i przemieszczeń na wprowadzone pewne, niewielkie zaburzenie wektora parametrów modyfikacji, co jest przedmiotem analizy wrażliwości. Analiza ta, w tym przypadku, polega na obliczeniu pochodnych amplitud odkształceń i przemieszczeń względem modelowanych parametrów konstrukcji. Uogólniając ten problem będziemy również rozpatrywać amplitudy dowolnej odpowiedzi konstrukcji f_N .

Przypomnijmy, że amplitudy przemieszczeń i odkształceń konstrukcji modelowanej są wyrażone następująco:

$$\varepsilon_\alpha = \overset{L}{\varepsilon}_\alpha + D_{\alpha\beta}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\beta + D_{\alpha i}^p \overset{0}{p}_i, \quad u_i = \overset{L}{u}_i + B_{i\alpha}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\alpha + B_{ik}^p \overset{0}{p}_k, \quad (3.56)$$

oraz w przypadku modelowania amplitud dowolnych odpowiedzi:

$$f_N = \overset{L}{f}_N + \check{D}_{N\alpha}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_\alpha + \check{D}_{Ni}^p \overset{0}{p}_i. \quad (3.57)$$

Analizę wrażliwości przeprowadzimy dla dwóch przypadków:

- względem parametrów modyfikacji wyrażonych przez moduły Young'a,
- względem parametrów modyfikacji wyrażonych przez pola i momenty bezwładności przekrojów poprzecznych.

Takie rozróżnienie jest istotne ze względu na fakt, że w pierwszym przypadku amplitudy dystorsji wirtualnych $\overset{0}{p}_i$ są zerowe.

Wrażliwość względem modyfikacji parametrów modułu Young'a. W celu określenia gradientów wektora amplitud odkształceń i przemieszczeń względem parametrów modyfikacji ϑ_γ^E zróżniczkujemy równania (3.56), traktując je jako funkcje złożone:

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^E} = \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\beta} \frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\beta}{\partial \vartheta_\gamma^E} = D_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\beta}{\partial \vartheta_\gamma^E}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta_\gamma^E} = \frac{\partial u_i}{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\alpha} \frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^E} = B_{i\alpha}^\varepsilon \frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^E}. \quad (3.58)$$

Pozostaje jeszcze we wzorach (3.58) do określenia gradient amplitud dystorsji wirtualnych $\frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^E}$. Ten gradient może zostać wyznaczony z równania (3.54) (już uwzględniającego brak modyfikacji bezwładności konstrukcji) przez zróżniczkowanie go względem ϑ_γ^E . Wówczas po przekształceniach algebraicznych otrzymujemy:

$$[\delta_{\alpha\beta} - (1_\gamma - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta}] \frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\beta}{\partial \vartheta_\gamma^E} = -\Phi_{\alpha\gamma}^E \varepsilon_\alpha, \quad \text{lub :} \quad A_{\alpha\beta} \frac{\partial \overset{0}{\varepsilon}_\beta}{\partial \vartheta_\gamma^E} = \overset{E}{b}_{\alpha\gamma}^\varepsilon, \quad (3.59)$$

gdzie $\Phi_{\alpha\gamma}^E$ określa związek (2.79), a po lewej stronie występuje ta sama macierz $A_{\alpha\beta}$, która jest wykorzystywana do wyznaczenia amplitud dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ w równaniu (3.54), natomiast po prawej stronie w równaniu (3.59b) wprowadzono oznaczenie

$b_{\alpha\gamma}^E = -\Phi_{\alpha\gamma}^E \varepsilon_\alpha$. Niezależnie od metody rozwiązania układu równań (3.59) (SVD, dekompozycja Cholesky'ego) gradienty amplitud pola odkształceń i przemieszczeń możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^E} = D_{\alpha\beta}^\varepsilon A_{\delta\beta}^{-1E} b_{\delta\gamma}^\varepsilon, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta_\gamma^E} = B_{i\alpha}^\varepsilon A_{\beta\alpha}^{-1E} b_{\beta\gamma}^\varepsilon. \quad (3.60)$$

Przeprowadzając analogicznie rozważania dotyczące analizy wrażliwości wybranych amplitud odpowiedzi f_N konstrukcji uzyskamy gradienty w postaci:

$$\frac{\partial f_N}{\partial \vartheta_\gamma^E} = \check{D}_{N\alpha}^\varepsilon A_{\delta\alpha}^{-1E} b_{\delta\gamma}^\varepsilon. \quad (3.61)$$

Wrażliwość względem modyfikacji parametrów pola przekroju poprzecznego i momentu bezwładności. Modyfikacje geometrii przekroju poprzecznego elementów skończonych wpływają zarówno na zmianę sztywności jak i bezwładności konstrukcji. Dlatego też, analiza wrażliwości musi być przeprowadzona z uwzględnieniem amplitud dystorsji wirtualnych ε_α^0 oraz \dot{p}_i^0 . Przeprowadźmy teraz analizę wrażliwości dotyczące tylko modyfikacji pola przekroju poprzecznego ϑ_γ^A :

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^A} = \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \varepsilon_\beta^0} \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} + \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \dot{p}_i^0} \frac{\partial \dot{p}_i^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} = D_{\alpha\beta}^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} + D_{\alpha i}^p \frac{\partial \dot{p}_i^0}{\partial \vartheta_\gamma^A}, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \vartheta_\gamma^A} = \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon_\alpha^0} \frac{\partial \varepsilon_\alpha^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} + \frac{\partial u_i}{\partial \dot{p}_k^0} \frac{\partial \dot{p}_k^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} = B_{i\alpha}^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_\alpha^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} + B_{ik}^p \frac{\partial \dot{p}_k^0}{\partial \vartheta_\gamma^A}. \quad (3.63)$$

Do określenia pozostają gradienty $\frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \vartheta_\gamma^A}$ oraz $\frac{\partial \dot{p}_i^0}{\partial \vartheta_\gamma^A}$, które możemy wyznaczyć z układu równań otrzymanego po zróżniczkowaniu związków (3.51):

$$\begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta} & -(1 - \mu_\alpha) D_{\alpha k} \\ -\omega^2 \Delta M_{ij} B_{j\beta} & -\delta_{ik} - \omega^2 \Delta M_{ij} B_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} \\ \frac{\partial \dot{p}_k^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Phi_{\alpha\gamma}^A \varepsilon_\alpha \\ \omega^2 \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^A} u_j \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

lub zwięźle:

$$A_{\alpha\tilde{\beta}}^A \tilde{g}_{\tilde{\beta}\gamma}^A = \tilde{b}_{\tilde{\alpha}\gamma}^A, \quad (3.65)$$

gdzie:

$$\tilde{g}_{\tilde{\beta}\gamma}^A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} \\ \frac{\partial \dot{p}_k^0}{\partial \vartheta_\gamma^A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{\beta\gamma}^A \\ \tilde{g}_{k\gamma}^A \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_{\tilde{\alpha}\gamma}^A = \begin{bmatrix} -\Phi_{\alpha\gamma}^A \varepsilon_\alpha \\ \omega^2 \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^A} u_j \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Występująca po lewej stronie macierz $A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ w równaniu (3.65) jest identyczna z macierzą wykorzystywaną do wyznaczenia amplitud dystorsji wirtualnych (por. (3.51)), (3.53a). Zatem, do określenia amplitud dystorsji wirtualnych i ich gradientów wystarczy jednokrotnie obliczyć macierz $A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ oraz prawe strony równań (3.51) i (3.65). Po rozwiązaniu układu równań (3.64) i podstawiając je do wzorów (3.63) możemy obliczyć gradienty amplitud odkształceń i przemieszczeń według zależności:

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^A} = D_{\alpha\beta}^\varepsilon \overset{A}{g}_{\beta\gamma}^\varepsilon + D_{\alpha i}^p \overset{A}{g}_{i\gamma}^p, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta_\gamma^A} = B_{i\alpha}^\varepsilon \overset{A}{g}_{\alpha\gamma}^\varepsilon + B_{ik}^p \overset{A}{g}_{k\gamma}^p. \quad (3.67)$$

Powtarzając powyższe rozumowanie dla analizy wrażliwości względem wektora ϑ_γ^J otrzymamy zależności:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \vartheta_\gamma^J} &= D_{\alpha\beta}^\varepsilon \overset{J}{g}_{\beta\gamma}^\varepsilon + D_{\alpha i}^p \overset{J}{g}_{i\gamma}^p, & \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta_\gamma^J} &= B_{i\alpha}^\varepsilon \overset{J}{g}_{\alpha\gamma}^\varepsilon + B_{ik}^p \overset{J}{g}_{k\gamma}^p, \\ \frac{\partial f_N}{\partial \vartheta_\gamma^J} &= \check{D}_{N\alpha}^\varepsilon \overset{J}{g}_{\alpha\gamma}^\varepsilon + \check{D}_{Nk}^p \overset{J}{g}_{k\gamma}^p, \end{aligned} \quad (3.68)$$

w których gradienty $\overset{J}{g}_{\alpha\gamma}^\varepsilon$ i $\overset{J}{g}_{k\gamma}^p$ są rozwiązaniami równania:

$$A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \overset{J}{g}_{\tilde{\beta}\gamma}^J = \overset{J}{b}_{\tilde{\alpha}\gamma}, \quad (3.69)$$

gdzie prawa strona jest wyrażona następująco:

$$\overset{J}{b}_{\tilde{\alpha}\gamma} = \begin{bmatrix} -\Phi_{\alpha\gamma}^J \varepsilon_\alpha \\ \omega^2 \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^J} u_j \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

W celu obliczenia gradientów amplitud dystorsji wirtualnych $\overset{J}{g}_{\tilde{\beta}\gamma}^J$ muszą zostać uprzednio określone nie tylko amplitudy dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$ i $\overset{0}{p}_i$, lecz także amplitudy zaktualizowanych amplitud odkształceń i przemieszczeń (por. (3.66), (3.70)). Występujące w tych związkach wyrażenia $\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^A}$, $\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^J}$ można określić wprost ze wzoru (3.44):

$$\frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^A} = -\overset{A}{M}_{ij\gamma}, \quad \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \vartheta_\gamma^J} = -\overset{J}{M}_{ij\gamma}. \quad (3.71)$$

Rozdział 4

Zastosowanie VDM-F do identyfikacji defektów

4.1 Wprowadzenie

Problem identyfikacji uszkodzeń jest nierozzerwalnie związany z analizą odwrotną – odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej i początkowej są podstawą do oszacowania zmian parametrów konstrukcji. Istnieją dwa główne nurty stosowane do identyfikacji defektów. Pierwszy z nich to *pattern recognition* wykorzystujący metody sztucznej inteligencji. Budowane są bazy danych opisujące rozmaite scenariusze uszkodzeń i badane są ich kombinacje. Model numeryczny nie jest tu konieczny. Drugi nurt jest oparty na aktualizacji wykalibrowanego modelu numerycznego (tzw. *model updating*) przy wykorzystaniu metod gradientowych. Przedstawiane w pracy podejście należy właśnie do tej drugiej grupy metod identyfikacji uszkodzeń.

4.2 Sformułowanie problemu optymalizacji

Konstrukcja, której parametry ulegają zmianie pod wpływem rozmaitych czynników (np. środowiskowych, normalnego zużycia, przeciążenia), zmienia dynamiczną odpowiedź. Zmiany rejestrowanych sygnałów (przemieszczeń, prędkości, przyspieszeń, itp.) pod wpływem zadanego obciążenia konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej stanowią fundament do identyfikacji defektów. Celem tej analizy jest identyfikacja aktualnych parametrów konstrukcji i jest sformułowana jako problem optymalizacji. Identyfikacja

parametrów jest określana poprzez wyznaczenie takich pól amplitud dystorsji wirtualnych $\overset{0}{\varepsilon}_\alpha$, $\overset{0}{p}_i$ nałożonych na model pierwotny, które dają odpowiedzi możliwie zgodną z konstrukcją zmodyfikowaną. Oczywiście, te pola są jednoznacznie związane z parametrami konstrukcji i zależą nie tylko od lokalizacji, lecz także od częstości wymuszenia. A zatem analizując określony zbiór:

$$\Omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n], \quad (4.1)$$

wzbogaca się wiedza o zachowaniu dynamicznym badanej konstrukcji. Jednocześnie, dla każdej częstości ze zbioru Ω należy wyznaczyć amplitudy dystorsji wirtualnych:

$$\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha\omega} = \overset{0}{\varepsilon}_\alpha(\Omega), \quad \overset{0}{p}_{i\omega} = \overset{0}{p}_i(\Omega), \quad (4.2)$$

oraz macierze wpływu:

$$D_{\alpha\beta\omega}^\varepsilon = D_{\alpha\beta}^\varepsilon(\Omega), \quad D_{\alpha i\omega}^p = D_{\alpha i}^p(\Omega), \quad B_{i\alpha\omega}^\varepsilon = B_{i\alpha}^\varepsilon(\Omega), \quad B_{ik\omega}^p = B_{ik}^p(\Omega). \quad (4.3)$$

We wzorach (4.2) i (4.3) występujący dodatkowy indeks $(\cdot)_\omega$ jest związany z kolejnymi częstościami i przyjmuje wartości $\omega = 1, 2, \dots, n$, gdzie n jest liczbą częstości wymuszeń harmonicznnych. W związku z tym, amplitudy dystorsji wirtualnych będą przechowywane w postaci macierzy prostokątnych, a macierze wpływu będą miały dodatkowy, trzeci wymiar związany z liczbą częstości wymuszenia.

4.2.1 Funkcja celu

Formułując problem optymalizacji będziemy uwzględniać dyskretny zbiór częstości (4.1). Minimalizowaną funkcję celu przyjmiemy jako unormowaną miarę w postaci:

$$F(\vartheta_\gamma^{(\cdot)}) = \sum_\omega \sum_N \left[\frac{f_{N\omega}(\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha\omega}, \overset{0}{p}_{i\omega}) - \overset{M}{f}_{N\omega}}{\overset{M}{f}_{N\omega}} \right]^2 = \sum_\omega \sum_N G_{N\omega}^2, \quad (4.4)$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$G_{N\omega} = \frac{\Delta f_{N\omega}}{\overset{M}{f}_{N\omega}} = \frac{f_{N\omega}(\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha\omega}, \overset{0}{p}_{i\omega}) - \overset{M}{f}_{N\omega}}{\overset{M}{f}_{N\omega}}. \quad (4.5)$$

We wzorach (4.4) i (4.5) wielkości $f_{N\omega}$ i $\overset{M}{f}_{N\omega}$ opisują amplitudowe odpowiedzi konstrukcji modelowanej dystorsjami i zmodyfikowanej (odpowiednio) w lokalizacjach pomiarowych N na kolejne częstotliwości wymuszenia ze zbioru Ω . Występująca w liczniku różnica $\Delta f_{N\omega} = f_{N\omega} - \overset{M}{f}_{N\omega}$ w istocie stanowi macierz prostokątną, której elementy są podzielone („wyraz przez wyraz”) przez elementy $\overset{M}{f}_{N\omega}$. Numeryczną odpowiedź $f_{N\omega}$ konstrukcji modelowanej dystorsjami $\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha\omega}$, $\overset{0}{p}_{i\omega}$ obliczamy ze związku:

$$f_{N\omega}(\overset{0}{\varepsilon}_{\alpha\omega}, \overset{0}{p}_{i\omega}) = \overset{L}{f}_{N\omega} + \overset{\check{D}}{D}_{N\beta\omega}^\varepsilon \overset{0}{\varepsilon}_{\beta\omega} + \overset{\check{D}}{D}_{Ni\omega}^p \overset{0}{p}_{i\omega}, \quad (4.6)$$

gdzie $\check{D}_{N\beta\omega}^\varepsilon, \check{D}_{Ni\omega}^p$ są trójwymiarowymi macierzami wpływu, których kolumny stanowią odpowiedzi stowarzyszone z wielkościami pomiarowymi $f_{N\omega}^M$ i są obliczone na jednostkowe dystorsje wirtualne nałożone na konstrukcję – dla kolejnych częstości ze zbioru Ω .

4.2.2 Analiza wrażliwości funkcji celu

Gradient funkcji celu względem wybranego parametru konstrukcji $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ otrzymamy różniczkując związek (4.4):

$$\nabla_\gamma F = \frac{\partial F}{\partial \vartheta_\gamma^{(\cdot)}} = \frac{\partial F}{\partial f_{N\omega}} \frac{\partial f_{N\omega}}{\partial \vartheta_\gamma^{(\cdot)}} = 2 G_{N\omega} \frac{\partial f_{N\omega}}{\partial \vartheta_\gamma^{(\cdot)}}, \quad (4.7)$$

gdzie macierz $G_{N\omega}$ jest określona wzorem (4.5). Z uwagi na występującą w równaniu (4.7) konwencję sumacyjną Einsteina pominięto znak sumy. Gradienty amplitud odpowiedzi określa wzór (3.61) lub (3.68c) w zależności od modelowanych parametrów konstrukcji. Należy jednak pamiętać, że te wzory odnoszą się do pojedynczej częstości, a pełną macierz gradientów $\frac{f_{N\omega}}{\partial \vartheta_\gamma^{(\cdot)}}$ uzyskamy wyznaczając dla wszystkich częstości ze zbioru Ω . W konkretnym przypadku, amplitudy odpowiedzi konstrukcji $f_{N\omega}$ występujące w funkcji celu (4.4) mogą zostać zastąpione amplitudy odkształceń $\varepsilon_{\alpha\omega}$ lub przemieszczeń $u_{i\omega}$.

4.2.3 Metoda największego spadku

Metoda największego spadku (MNS) polega na iteracyjnym wyznaczaniu lokalnych kierunków największego spadku funkcji celu dla aktualnego wektora modelowanych parametrów $\vartheta_\gamma^{(\cdot)(k)}$:

$$d_\gamma^{(k)} = -\nabla_\gamma F^{(k)}. \quad (4.8)$$

Te kierunki wyznaczają kolejne gradienty funkcji celu $\nabla_\gamma F^{(k)}$, a wektory parametrów określane są według zależności:

$$\vartheta_\gamma^{(\cdot)(k+1)} = \vartheta_\gamma^{(\cdot)(k)} - \lambda F^{(k)} \frac{\nabla_\gamma F^{(k)}}{[\nabla_\delta F^{(k)}]^T \nabla_\delta F^{(k)}}, \quad (4.9)$$

gdzie górne oznaczenia (k) i $(k+1)$ wskazują na wartości odpowiednio w poprzedniej i bieżącej iteracji. Stała λ jest długością kroku i najczęściej przyjmuje się ją z przedziału $0.1 \div 0.3$. We wzorze (4.9) w mianowniku występuje iloczyn skalarny wektora gradientu $\nabla_\delta F^{(k)}$.

4.2.4 Problem optymalizacji kierunkowej (line search)

Iteracyjne poszukiwanie rozwiązania problemu optymalizacji w równaniu (4.9) wymaga ustalenia długości kroku λ . Tę długość kroku (promienia) można również zoptymalizować zmniejszając jednocześnie nakłady związane z całkowitą liczbą iteracji i obliczaniem gradientów funkcji celu, żądając spełnienia warunku:

$$F(\vartheta_\gamma^{(\cdot)(k)} - \lambda^{(k)} d_\gamma^{(k)}) = \min. \quad (4.10)$$

Dla k -tego wektora modyfikacji $\vartheta_\gamma^{(\cdot)(k)}$ i kierunku poszukiwań $d_\gamma^{(k)}$ oraz wybranego przedziału $(a, b) \ni \lambda^{(k)}$ znajdziemy przybliżenie $\lambda_0^{(k)}$, które minimalizuje (4.10). W tym cząstkowym problemie optymalizacyjnym zmienną jest parametr $\lambda^{(k)}$. Zazwyczaj wystarczające jest kilkukrotne obliczenie funkcji celu dla kolejnych $\lambda^{(k)}$.

ALGORYTM 4.1:

A. z przedziału $(a, b) = (a_1, b_1)$ wybieramy dwa punkty

$$p_1 = a_1 + (1 - \Lambda)(b_1 - a_1), \quad q_1 = a_1 + \Lambda(b_1 - a_1), \quad (4.11)$$

gdzie $\Lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ odpowiada złotemu podziałowi odcinka;

B. znajdujemy odpowiednie funkcje celu $F(p_1)$, $F(q_1)$ i badamy przypadki:

(1) jeśli $F(p_1) < F(q_1) \Rightarrow a_2 = a_1, b_2 = q_1, q_2 = p_1$,

(2) jeśli $F(p_1) \geq F(q_1) \Rightarrow a_2 = p_1, b_2 = b_1, p_2 = q_1$;

C. procedura jest powtarzana dopóki $b_n - a_n \geq \delta$, gdzie δ jest dokładnością z jaką chcemy wyznaczyć minimalny promień $\lambda^{(k)}$.

W stworzonym pakiecie `jvdmf` przyjęto początkowy przedział, w którym optymalizowany jest parametr λ , w postaci $(0, 0.5)$, oraz $\delta = 0.005$.

4.3 Algorytm identyfikacji uszkodzeń

Algorytm 4.2 przedstawia identyfikację parametrów elementów konstrukcji w ujęciu Metody Dystorsji Wirtualnych, sformułowanej w domenie częstości. Podstawą do jej przeprowadzenia są odpowiedzi (amplitudy) konstrukcji poddanej obciążeniu harmonicznemu, rejestrowane dla wybranego zbioru częstości wymuszeń nierezonansowych. Identyfikacja parametrów jest realizowana przez gradientową minimalizację odpowiednio zdefiniowanej funkcji celu.

ALGORYTM 4.2:

A. Wstępne dane i założenia:

- (1) zbiór częstości nierezonansowych $\Omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$;
- (2) konstrukcja obciążona harmonicznie o amplitudach siły $F_{i\omega}$;
- (3) pomierzone amplitudy odpowiedzi zmodyfikowanej konstrukcji $f_{N\omega}^M$;
- (4) zbiór elementów \mathcal{D} , dla których identyfikowane są parametry $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$;
- (5) początkowy wektor modyfikacji elementów $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ (zwykle jednostkowy).

B. Obliczenia wstępne:

- (1) amplitudy odpowiedzi $f_{N\omega}^L$ dla początkowego wektora modyfikacji $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ oraz amplitud odkształceń $\varepsilon_{\alpha\omega}^L$ i przemieszczeń $u_{i\omega}$;
- (2) macierze wpływu $D_{\alpha\beta\omega}^\varepsilon$, $D_{\alpha k\omega}^p$, $B_{i\alpha\omega}^\varepsilon$, $B_{ik\omega}^p$ oraz uogólnionych macierzy wpływu $\check{D}_{N\alpha\omega}$, $\check{D}_{Nk\omega}$ dla każdej częstości ze zbioru Ω ;
- (3) składowe macierzy mas $\check{M}_{ij\gamma}^A$, $\check{M}_{ij\gamma}^J$;
- (4) amplitudy dystorsji wirtualnych $\varepsilon_{\alpha\omega}^0$ oraz $p_{k\omega}^0$ dla początkowego wektora modyfikacji elementów ϑ_γ ;
- (5) zaktualizowane amplitudy odkształceń $\varepsilon_{\alpha\omega}$, przemieszczeń $u_{i\omega}$ i wybranych odpowiedzi $f_{N\omega}$ – jednostkowe wektory $\vartheta_\gamma^{(\cdot)}$ prowadzą do zależności: $\varepsilon_{\alpha\omega} = \varepsilon_{\alpha\omega}^L$, $u_{i\omega} = u_{i\omega}^L$, $f_{N\omega} = f_{N\omega}^L$ przy czym: $\varepsilon_{\alpha\omega}^0 = 0$, $p_{k\omega}^0 = 0$.

C. Obliczenia powtarzalne na każdej iteracji i :

- (1) funkcja celu F wg (4.4);
- (2) gradient funkcji celu $\nabla_\gamma F$ wg (4.7)
 - a. gradient amplitud dystorsji wirtualnych wg (3.59) lub (3.66) i (3.69);
 - b. gradient amplitud odpowiedzi wg (3.61) lub (3.65) i (3.68c);
- (3) wektor modyfikacji elementów $\vartheta_\gamma^{(\cdot)(k+1)} = \vartheta_\gamma^{(\cdot)(k)} + \lambda^{(k)} d_\gamma^{(k)}$;
- (4) warunek zakończenia obliczeń $k = \frac{F^{(1)}}{F^{(i)}} < 10^{-3}$.

Algorytm ten uwzględnia zarówno modelowanie modułu Young'a oraz pola przekroju poprzecznego i momentu bezwładności elementów. W trzeciej części algorytmu muszą zostać w tym celu obliczone odpowiednie pola gradientów, pamiętając o tym, że modyfikacja wyłącznie modułu Young'a prowadzi do zerowych amplitud dystorsji wirtualnych $\check{p}_{i\omega}^0$.

4.4 Podstawy Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych

Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (MIDW, VDM-T) jest metodą reanalizy konstrukcji w domenie czasowej, w której odpowiedzi, dystorsje wirtualne, macierze wpływu są zależne od czasu [66]. Jej podstawą jest metoda impulsowej funkcji przejścia, w której obciążenie jest reprezentowane przez sumę elementarnych impulsów siły z wykorzystaniem funkcji delta Diraca $\delta(t - \tau)$. Odpowiedź poszukiwanej wielkości dla analizowanego przedziału czasu $\langle 0, t \rangle$ uzyskuje się przez superpozycję rozwiązań otrzymanych dla kolejnych wymuszeń impulsowych:

$$\tilde{F}(t) = F_\tau \delta(t - \tau), \quad \tilde{u}_i(t) = \int_0^t h_{ij}(t - \tau) \tilde{F}_j(\tau) d\tau. \quad (4.12)$$

We wzorze (4.12) F_τ oznacza średnią wartość impulsu w chwili τ , a macierz $h_{ij}(t)$ zawiera odpowiedzi i -tego uogólnionego przemieszczenia konstrukcji wywołanego działaniem impulsu w kierunku j -tego przemieszczenia uogólnionego w chwili $\tau = 0$.

Dyskretyzując przestrzeń czasową $t = 0, 1, \dots, n$ i przez analogię do impulsowych funkcji przejścia $h_{ij}(t)$ autor w pracy [66] wprowadza pojęcie impulsowej macierzy wpływu $D_{\alpha\beta}(t)$ oraz impulsowej uogólnionej macierzy wpływu $\check{D}_{N\beta}$. W istocie stanowi ona trójwymiarową macierz, której przekrój dla chwili t zawiera odpowiedzi składowych odkształcenia wywołane kolejno wprowadzanymi impulsami jednostkowych dystorsji wirtualnych $\check{\varepsilon}_\beta^0(t)$. Ten impuls jest realizowany przez nałożenie na element skończony samozrównoważonych uogólnionych sił kompensacyjnych:

$$\tilde{F}_i(t) = F_i^0 \delta(t). \quad (4.13)$$

Obciążenie kompensacyjne F_i^0 jest tutaj identyczne z opisanym dla problemów statyki. Impuls opisany wzorem (4.13) na mocy prawa zachowania pędu jest zastąpiony przez warunki początkowe nałożone na konstrukcję: tzw. wektor adekwatnych prędkości początkowych $\tilde{v}_j^0 = \tilde{v}_j(0)$ oraz zerowych przemieszczeń początkowych $\tilde{u}_j^0 = \tilde{u}_j(0)$:

$$M_{ij} \tilde{v}_j^0 = F_j^0 \Delta t, \quad \tilde{u}_j^0 = 0. \quad (4.14)$$

Impulsowy wektor wpływu macierzy $D_{\alpha\beta}(t)$ jest obliczany na podstawie przemieszczeń, które są wynikiem całkowania jednorodnych równań ruchu bez uwzględnienia tłumienia:

$$M_{ij} \ddot{\tilde{u}}_j(t) + K_{ij} \tilde{u}_j(t) = 0, \quad (4.15)$$

z warunkami początkowymi (4.14).

Posługując się impulsowymi macierzami wpływu zaktualizowane odpowiedzi konstrukcji wyrażone w odkształceniach $\varepsilon_\alpha(t)$ i dowolne wielkości $f_N(t)$ w wybranych lokalizacjach analogicznie do (4.12) są wyrażone w postaci:

$$\varepsilon_\alpha(t) = \overset{\text{L}}{\varepsilon}_\alpha(t) + \overset{\text{R}}{\varepsilon}_\alpha(t) = \overset{\text{L}}{\varepsilon}_\alpha(t) + \sum_{\tau=0}^t D_{\alpha\beta}(t-\tau) \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(\tau), \quad (4.16)$$

$$f_N(t) = \overset{\text{L}}{f}_N(t) + \overset{\text{R}}{f}_N(t) = \overset{\text{L}}{f}_N(t) + \sum_{\tau=0}^t \check{D}_{N\beta}(t-\tau) \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(\tau), \quad (4.17)$$

gdzie oznaczono sumowanie względem zdyskretyzowanej zmiennej czasowej τ , ponieważ nie występuje jawnie jako indeks.

Związki pomiędzy składowymi odkształcenia i dystorsji wirtualnych w domenie czasowej, jak łatwo się domyśleć, są podobne do zależności (2.76) i (3.41):

$$\mu_\alpha \varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha(t) - \overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha(t), \quad (4.18)$$

przy czym wszystkie wielkości są zależne od czasu oprócz współczynnika μ_α . Dlatego właśnie jest on zmienną w optymalizacji, a nie $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha(t)$

Wyznaczenie dystorsji wirtualnych $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha(t)$ na zadany wektor parametrów modyfikacji μ_α otrzymuje się ze związków (4.16) oraz (4.18) i przebiega dwuetapowo odpowiednio dla chwili $t = 0$ i chwil $t > 0$:

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(0) = (1_{\underline{\alpha}} - \mu_{\underline{\alpha}}) \overset{\text{L}}{\varepsilon}_{\underline{\alpha}}(0), \\ A_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(t) = (1_{\underline{\alpha}} - \mu_{\underline{\alpha}}) \left[\overset{\text{L}}{\varepsilon}_{\underline{\alpha}}(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} D_{\underline{\alpha}\beta}(t-\tau) \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(\tau) \right], \end{cases} \quad (4.19)$$

gdzie

$$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - (1_{\underline{\alpha}} - \mu_{\underline{\alpha}}) D_{\underline{\alpha}\beta}(0), \quad (4.20)$$

jest macierzą obliczaną dla chwili $t = 0$. Dla kolejnych chwil t dystorsje wirtualne $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha(t)$ są wyznaczone sekwencyjnie z układu równań (4.19b) i są zależne od ich historii. Ze względu na dużą liczbę układów równań do rozwiązania (kwadratowa zależność od liczby dyskretyzacji czasowej) obliczenie dystorsji wirtualnych wiąże się z dużym nakładem obliczeniowym.

Dodatkowe obciążenie kosztów numerycznych stanowi określenie gradientów dystorsji wirtualnych, które są wyznaczone przez różniczkowanie układów równań (4.19) względem wektora μ_δ :

$$A_{\alpha\beta} \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(t)}{\partial \mu_\delta} = \varepsilon_\alpha(t) + (1_{\underline{\alpha}} - \mu_{\underline{\alpha}}) \sum_{\tau=0}^{t-1} D_{\underline{\alpha}\beta}(t-\tau) \frac{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta(\tau)}{\partial \mu_\delta}. \quad (4.21)$$

Układ równań (4.21), podobnie jak (4.19), jest rozwiązywany sekwencyjnie, z uwzględnieniem gradientów dystorsji w poprzednich chwilach czasowych τ . Funkcja celu problemu identyfikacji oraz jej gradient są zdefiniowane jako:

$$F = \sum_N \sum_t \left[f_N(t, \varepsilon_\alpha^0) - f_N^M(t) \right]^2, \quad (4.22)$$

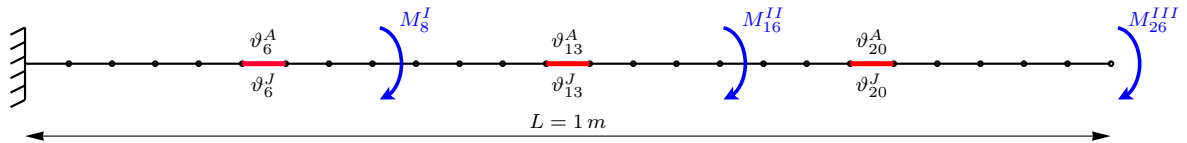
$$\frac{\partial F}{\partial \mu_\gamma} = \frac{\partial F}{\partial f_N} \frac{\partial f_N}{\partial \varepsilon_\beta^0} \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \mu_\delta} = 2 \sum_N \sum_t \left[f_N(t, \varepsilon_\alpha^0) - f_N^M(t) \right] \sum_{\tau=0}^t \check{D}_{N\beta}(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_\beta^0(\tau)}{\partial \mu_\delta}. \quad (4.23)$$

We wzorach (4.22) i (4.23) przez $f_N^M(t)$ oznaczono pomiary dla konstrukcji rzeczywistej w wybranych lokalizacjach N . Proces minimalizacji funkcji celu w opracowaniu [66] przeprowadzono metodą największego spadku (por. 4.9). Przykłady, wady i zalety identyfikacji uszkodzeń metodami VDM-F i VDM-T omówione zostały w dalszych rozdziałach.

4.5 Problem lokalizacji wymuszeń i selekcji częstości

W prezentowanym podejściu wykonanie identyfikacji uszkodzeń jest oparte na analizie pomiarów (amplitud) dokonanych na konstrukcji pierwotnej (kalibracja modelu numerycznego) i uszkodzonej. Lokalizacja uszkodzenia w różny sposób wpływa na zaburzenia rejestrowanych sygnałów przy zadanym obciążeniu konstrukcji. Z drugiej strony, odpowiedni wybór położenia i częstości siły wymuszającej może sprawić, że zadany defekt jest „widoczny” tj. pojawiają się istotne różnice pomiarowe konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej.

Zilustrujmy ten problem na numerycznym przykładzie belki wspornikowej przedstawionej na rys. 4.1, o długości $L = 1 \text{ m}$ i polu przekroju poprzecznego $b \times h = 2 \times 0.5 \text{ [cm}^2\text{]}$.



Rysunek 4.1: Belka wspornikowa wraz z niezależnie wprowadzonymi defektami i obciążeniami.

Ponadto przyjęto moduł Young’a o wartości $E = 210 \text{ GPa}$ oraz gęstość $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Konstrukcja ta została podzielona na 25 elementów skończonych o jednakowej długości, a jej pierwsze częstotliwości własne mają wartości:

$$f_n^0 = [4.19 \quad 26.26 \quad 73.54 \quad 144.1 \quad 238.2 \quad 355.8]^T \text{ [Hz]}. \quad (4.24)$$

Do identyfikacji uszkodzeń będziemy unikać obciążeń o częstotliwościach rezonansowych wywołujących nieskończone deformacje belki (brak tłumienia). Dlatego też, aby

uniknąć rozwiązywania źle uwarunkowanych układów równań, weźmy pod uwagę pewien, arbitralnie wybrany zbiór częstości wymuszeń pozarezonansowych:

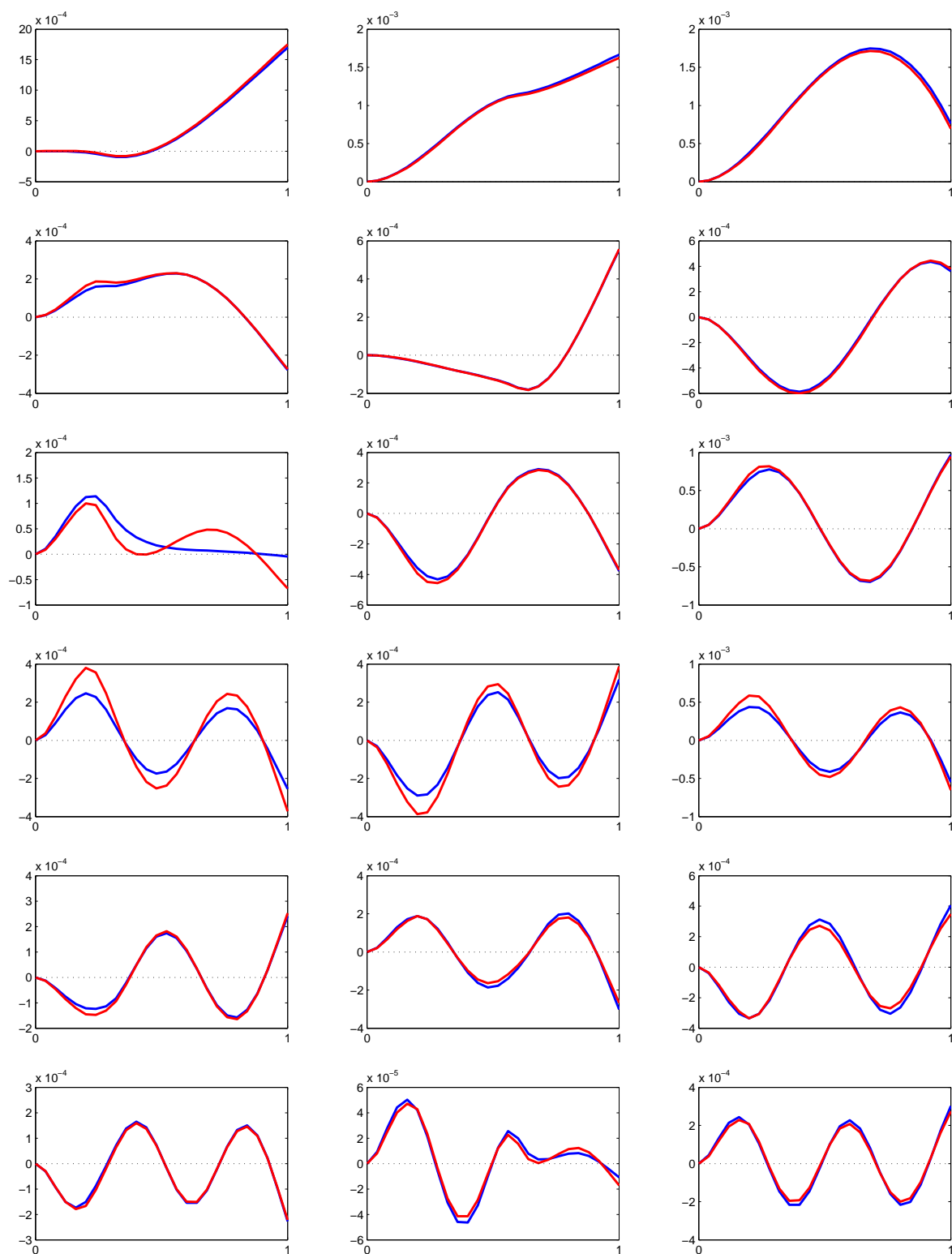
$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi [10 \quad 40 \quad 80 \quad 135 \quad 155 \quad 250]^T \left[\frac{rad}{s} \right]. \quad (4.25)$$

Będziemy teraz rozpatrywać wpływ lokalizacji i częstości obciążenia na różnice amplitud węzłowych przemieszczeń pionowych konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej. Konstrukcja zmodyfikowana jest tutaj rozważana jako konstrukcja początkowa, w której zredukowano o 60% pole przekroju poprzecznego i moment bezwładności ($\vartheta_\gamma^A = \vartheta_\gamma^J = 0.4$) pojedynczego elementu. Będziemy rozważać 3 niezależne przypadki uszkodzenia, w których wprowadzono modyfikacje w elementach: 6 (przypadek I), 13 (przypadek II), 20 (przypadek III). Dla każdej z tych konfiguracji uszkodzenia testowano kolejne obciążenia momentem zginającym o jednostkowej amplitudzie w węzłach 8, 16, 26 o częstościach wg (4.25). Wyniki tych numerycznych badań zilustrowano na rys. 4.2-4.4.

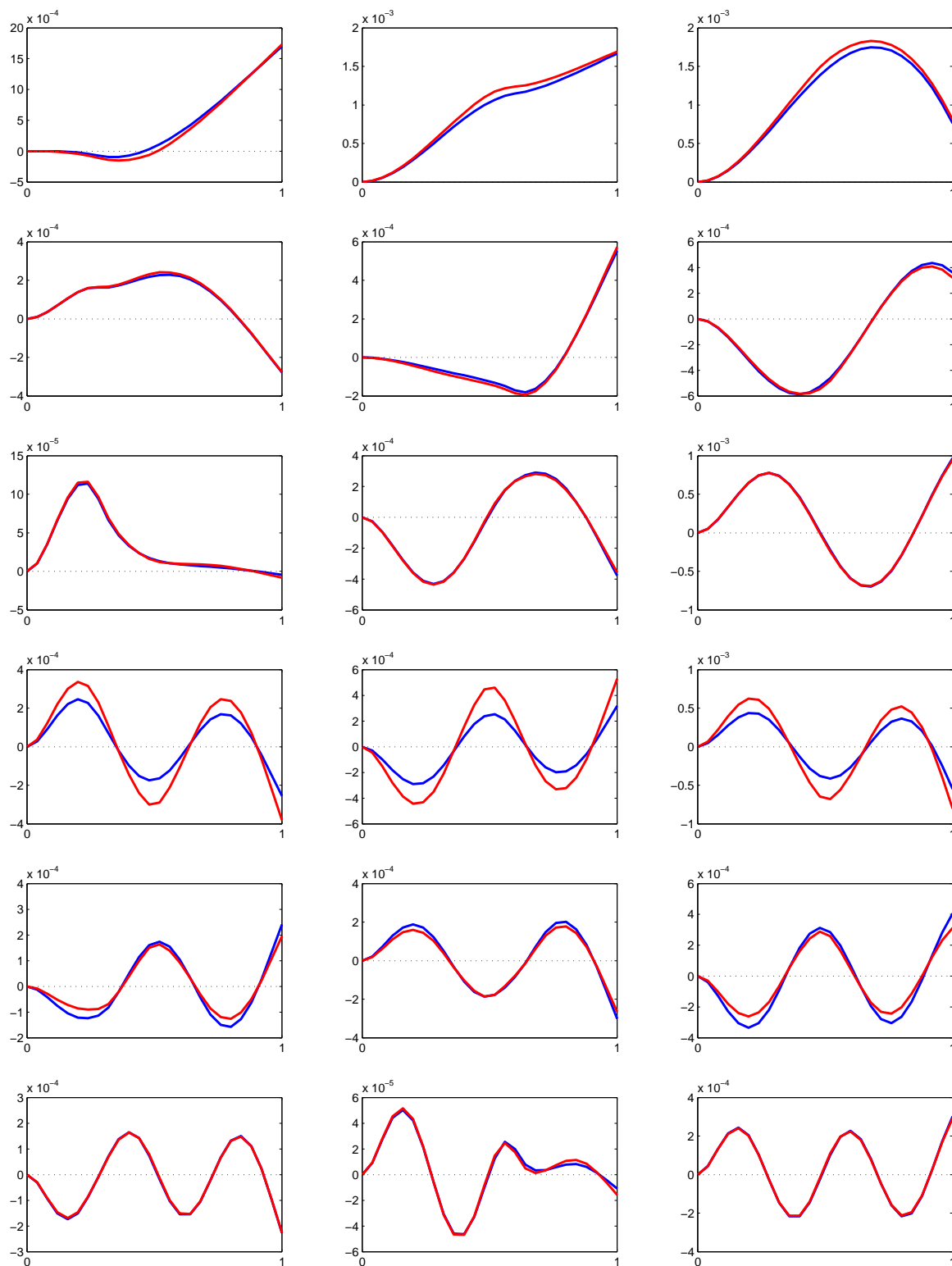
Ilustracja 4.2 przedstawia porównania amplitud przemieszczeń węzłowych konstrukcji początkowej (kolor niebieski) i zmodyfikowanej (kolor czerwony) – uszkodzenie elementu nr 6 (przypadek I). Pierwsza kolumna dotyczy amplitud przemieszczeń wywołanych momentem o jednostkowej amplitudzie, przyłożonym w węźle nr 8 o kolejnych częstościach określonych przez (4.25). Kolejne kolumny grupują odpowiedzi konstrukcji (początkowej i zmodyfikowanej) obciążonych w węzłach 16 i 26. Analizując porównania odpowiedzi belki możemy określić najbardziej wrażliwą kombinację lokalizacji i częstości wymuszenia na uszkodzenie w elemencie nr 6. Czwarty wiersz odpowiada częstości $f_4 = 135 Hz$, a różnice pomiędzy amplitudami są widoczne zarówno dla wymuszenia w węźle 8, 16 jak i 26. Obciążenia o częstości $f_3 = 80 Hz$ w węźle 8 stanowi również potencjalnie dobrą kombinację do przeprowadzenia analizy odwrotnej. Należy się tu spodziewać, że uszkodzenie w sąsiednich elementach wywoła podobny efekt, co sugeruje właściwą kombinację lokalizacji wymuszenia i częstości do przeprowadzenia identyfikacji uszkodzenia w tych strefach. Zauważmy przy tym, że bliska lokalizacja obciążenia o innych częstościach (np. $f_6 = 250 Hz$) i defektu nie musi oznaczać istotnej różnicy amplitud przemieszczeń.

Na podstawie ilustracji 4.3 i 4.4, prezentujących porównania amplitud dla uszkodzenia elementu 13 i 20, można przeprowadzić analogiczne rozumowanie w celu wyboru optymalnej lokalizacji i częstości obciążenia. I tak, dla uszkodzenia w elemencie 13 z rys. 4.3 możemy wybrać częstotliwość wymuszenia $f_4 = 135 Hz$ lub/oraz $f_1 = 10 Hz$ w węzłach 8, 16, 26, bądź $f_5 = 155 Hz$ w węzłach 8, 26. Bogatszy zestaw konfiguracji wymuszenia daje uszkodzenie w końcowej części belki (por rys. 4.4). Dla każdej częstotliwości możemy wybrać odpowiednią lokalizację wymuszenia i odwrotnie – dla każdej lokalizacji wymuszenia możemy wskazać właściwą częstotliwość wymuszenia.

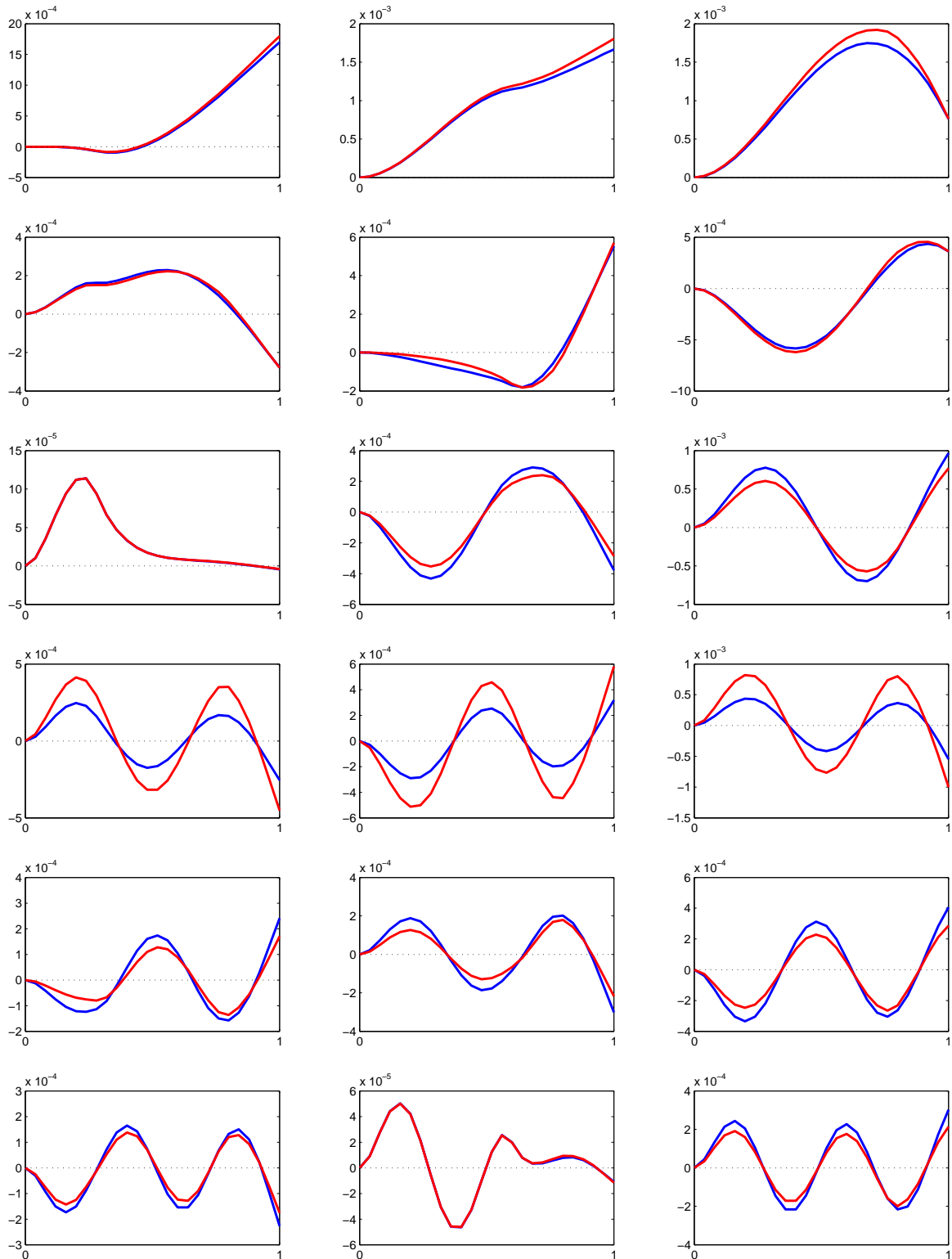
Oczywiście, poruszony tutaj problem optymalnego wyboru lokalizacji i częstości wymuszenia jest bardzo ważny i zależy niego zbieżność procesu optymalizacji. Sformułowanie tego zadania będzie celem przyszłych badań i nie jest głównym nurtem w niniejszej pracy.



Rysunek 4.2: Porównanie amplitud przemieszczeń pionowych belki początkowej i uszkodzonej w elemencie 6.



Rysunek 4.3: Porównanie amplitud przemieszczeń pionowych belki początkowej i uszkodzonej w elemencie 13.



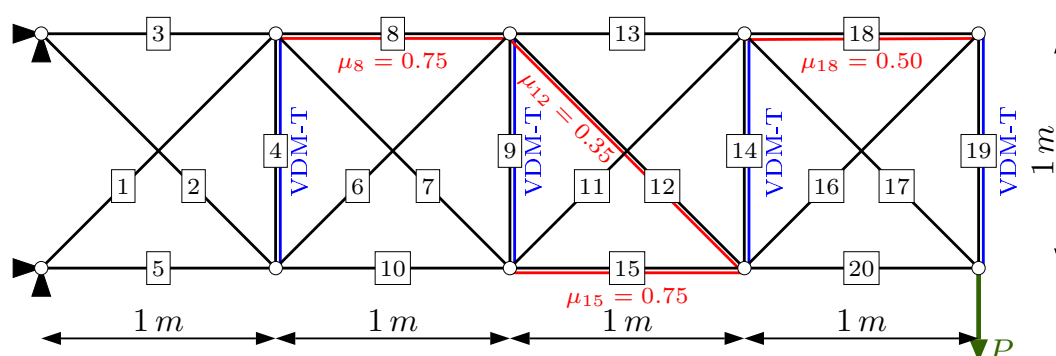
Rysunek 4.4: Porównanie amplitud przemieszczeń pionowych belki początkowej i uszkodzonej w elemencie 20.

4.6 Przykłady numeryczne

Rozważania przeprowadzone w powyższych rozdziałach zilustrujemy na wybranych przykładach. Wszystkie odpowiedzi konstrukcji są symulowane numerycznie.

4.6.1 Kratownica płaska

Dana jest płaska kratownica jak na rys. 4.5, której całkowita długość wynosi 4 m , a szerokość i wysokość pojedynczej sekcji 1 m . Przyjęto, że wszystkie jej elementy wykonane są ze stali o module Younga $E = 210\text{ GPa}$ i gęstości $\rho = 7800\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a pola przekrojów poprzecznych wynoszą $A = 10^{-4}\text{ m}^2$.



Rysunek 4.5: Kratownica wraz z wprowadzonymi modyfikacjami i lokalizacjami sensorów dla metody VDM-T

Konstrukcja zmodyfikowana została zasymulowana przez zastąpienie pól przekrojów elementów A_γ przez \hat{A}_γ , których szczegóły znajdują się w tab. 4.1

Tabela 4.1: Wprowadzone modyfikacje elementów kratownicy rys. 4.5

Nr elementu γ	$\hat{A}_\gamma \cdot 10^{-4}[\text{m}^2]$	$\vartheta_\gamma^A = \mu_\gamma^A = \frac{\hat{A}_\gamma}{A_\gamma}$
8	3.0	0.75
12	1.4	0.35
15	3.0	0.75
18	2.0	0.50

PRZYKŁAD 4.1: Identyfikacja uszkodzeń metodą VDM-F

Identyfikacja uszkodzeń kratownicy na rys. 4.5 zostanie przeprowadzona dla 3 przypadków:

- przypadek I: dla jednej częstości $\omega = 700\frac{\text{rad}}{\text{s}}$;
- przypadek II: dla czterech częstości $\omega_i = \Omega = [100\ 700\ 2100\ 3650]^T\frac{\text{rad}}{\text{s}}$;

- przypadek III: dla czterech częstości jak wyżej z uwzględnieniem wygenerowanego numerycznie szumu;

W każdym z tych przypadków siła wymuszająca (lokalizacja na rys. 4.5) ma postać:

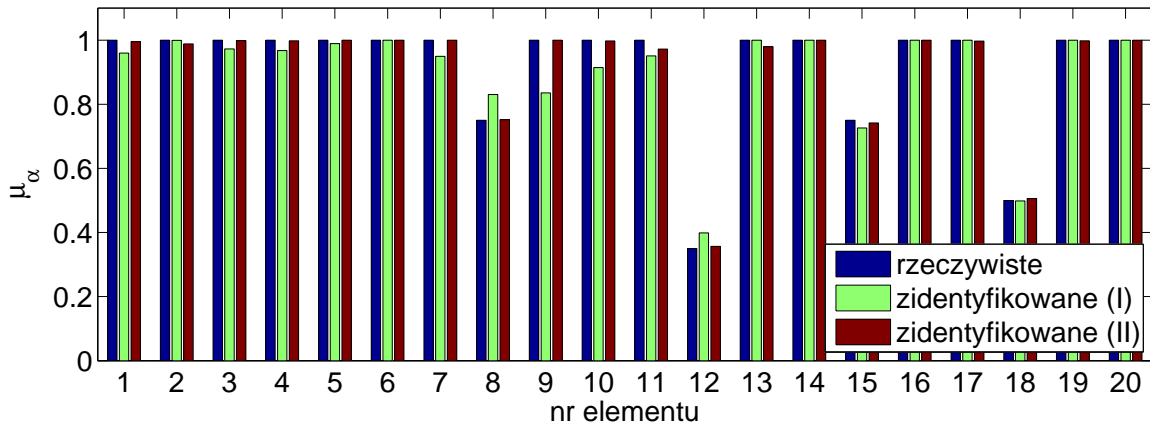
$$P_i = 200 \sin(\omega_i t). \quad (4.26)$$

Przyjęto, że funkcja celu problemu identyfikacji tego zadania wyrażona będzie przez amplitudy odkształceń we wszystkich jej elementach $f_{N\omega} = \varepsilon_{\alpha\omega}$ oraz $f_{N\omega}^M = \varepsilon_{\alpha\omega}^M$, co ogólnie możemy zapisać:

$$F = \sum_{\omega} \sum_{\alpha} \left[\frac{\varepsilon_{\alpha\omega} - \varepsilon_{\alpha\omega}^M}{\varepsilon_{\alpha\omega}^M} \right]^2. \quad (4.27)$$

Jest to równoznaczne z rozmieszczeniem sensorów mierzących odkształcenia we wszystkich elementach kratownicy. Amplitudy odkształceń $\varepsilon_{\alpha\omega}$ i $\varepsilon_{\alpha\omega}^M$ zostały wygenerowane numerycznie dla każdego z opisanych powyżej przypadków.

Wektor parametrów modyfikacji μ_{α} (dla kratownic $\mu_{\alpha} = \vartheta_{\gamma}$) w przypadku I został wyznaczony po 157, a w przypadku II po 51 iteracjach. W każdym z tych przypadków spadek funkcji celu wynosił 3 rzędy wielkości, a optymalizacja została przeprowadzona metodą największego spadku. Porównanie wyników zostało zaprezentowane na rys. 4.6, czas obliczeń w tych przypadkach był podobny i wyniósł poniżej 1 minuty.



Rysunek 4.6: Wyniki identyfikacji uszkodzeń dla przypadku I i II oraz rzeczywiste modyfikacje.

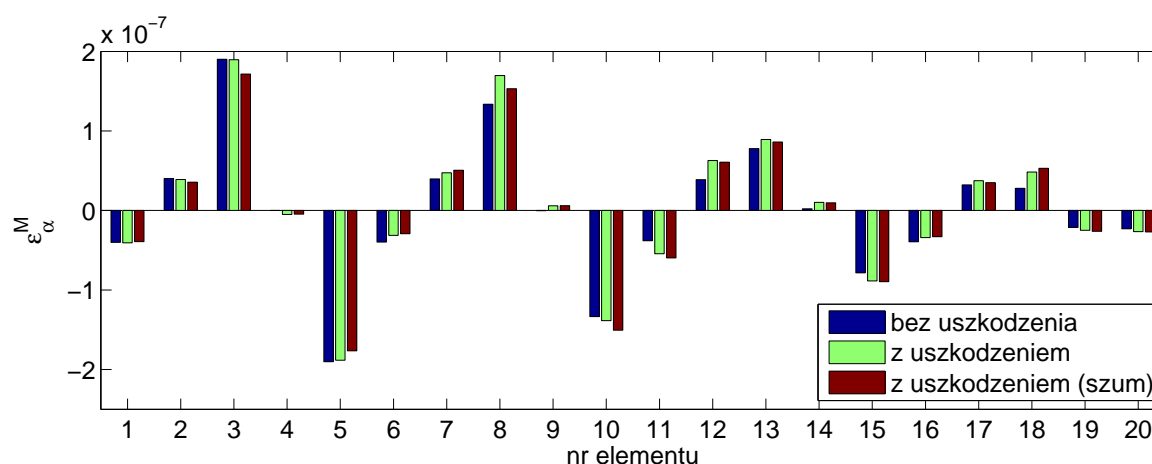
Uwzględnienie tylko pojedynczej częstości daje pewne niedoszacowania lub przeszacowania wielkości defektów, jednakże dają ogólną wiedzę o intensywności uszkodzenia. Natomiast w przypadku II (4 częstości wymuszenia) dają precyzyjną informację o degradacji pól poprzecznych elementów dzięki większej ilości pomierzonych danych.

Rzeczywiste pomiary drgań konstrukcji obarczone są pewnym błędem, a zatem uzasadnione jest uwzględnienie tego efektu w obliczonych amplitudach odkształceń. Przypadek

III dotyczy właśnie tego problemu. Towarzyszący pomiarom szum jest tutaj zrealizowany przez dodanie do obliczonych odpowiedzi $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\omega}^M$ pewnych, przypadkowych wartości według zależności:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\omega}^M = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\omega}^M (1_{\alpha\omega} + r_{\alpha\omega}) \quad (4.28)$$

gdzie $r_{\alpha\omega}$ przyjmuje wygenerowaną wartość z przedziału $\langle -0.1, 0.1 \rangle$, a we wzorze (4.27) wartości $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\omega}^M$ należy zastąpić przez $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\omega}^M$. Na rysunku 4.7 zostały przedstawione obliczone amplitudy odkształceń konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej z uwzględnieniem wygenerowanych odchyłek dla wybranej częstotliwości $\omega_2 = 700 \frac{rad}{s}$.



Rysunek 4.7: Porównanie amplitud odkształceń kratownicy początkowej i zmodyfikowanej z uwzględnieniem modelowania błędów.

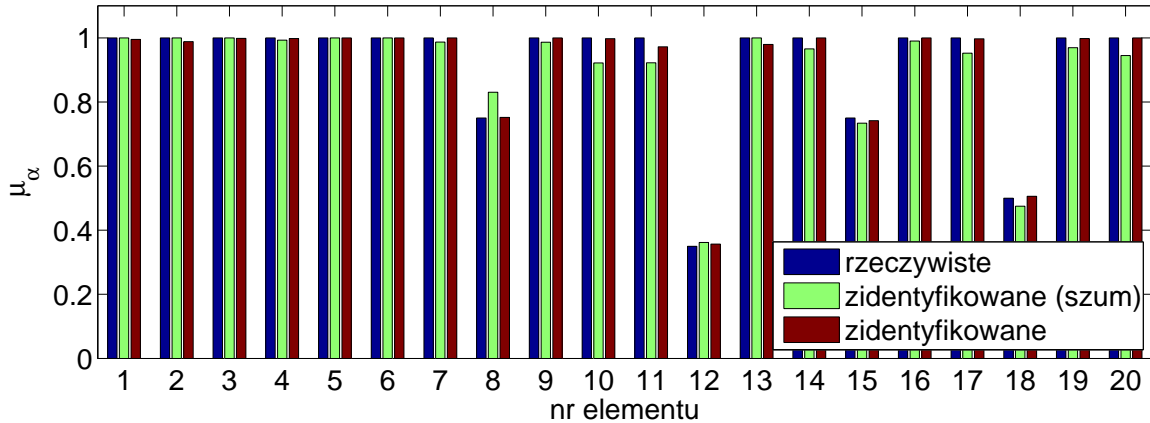
Proces optymalizacji funkcji celu w przypadku III został zatrzymany po 300-tu iteracjach, dając spadek funkcji celu o 2 rzędy wielkości, przy jednoczesnym braku tendencji do dalszej poprawy wyniku. Pomimo tego, otrzymany rozkład modyfikacji parametrów w konstrukcji można uznać za poprawny.

Na rysunku 4.8 przedstawiono porównanie wyników identyfikacji uszkodzeń dla przypadku II i III z rzeczywistymi defektami.

PRZYKŁAD 4.2: Identyfikacja uszkodzeń metodą (VDM-T)

W poprzednim przykładzie zademonstrowano analizę odwrotną metodą VDM-F, której podstawą były obliczone amplitudy odkształceń w każdym elemencie kratownicy. Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (VDM-T) umożliwia taką analizę na podstawie odpowiedzi zależnych od czasu, a zatem więcej informacji o zachowaniu konstrukcji jest zapamiętywanych. Skutkuje to mniejszą liczbą niezbędnych sensorów do identyfikacji parametrów konstrukcji.

Będziemy teraz rozpatrywać taki sam rozkład defektów jak w przypadku metody VDM-F, lecz modelowanym parametrem w każdym elemencie będzie moduł Young'a, tj. $\mu_{\alpha} = \frac{\hat{E}_{\alpha}}{E_{\alpha}}$ (por. tab 4.1).



Rysunek 4.8: Porównanie wyników analizy odwrotnej dla przypadku II i III.

Na rysunku (4.9a) przedstawiono przebieg obciążenia konstrukcji – trójkątnie modulowana funkcja sinus o amplitudzie $P = 200 N$.

Dla czterech sensorów (pionowe elementy, por rys. 4.5) obliczono odkształcenia konstrukcji początkowej. Przykładową odpowiedź dla elementu 1 (konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej) przedstawiono na rys. 4.9b. Wynik analizy odwrotnej zilustrowano i porównano na rys. 4.9c. Czas obliczeń potrzebny na wykonanie tego zadania wyniósł ok. 300 minut.

4.6.2 Belka wspornikowa

Następny przykład dotyczy belki wspornikowej o przekroju prostokątnym, w której modelowanymi parametrami będzie pole przekroju poprzecznego A_γ , oraz moment bezwładności J_γ . Nie precyzujemy rodzaju uszkodzenia przekroju poprzecznego (zmiany jego geometrii), a wielkości A_γ i J_γ będą modelowane niezależnie.

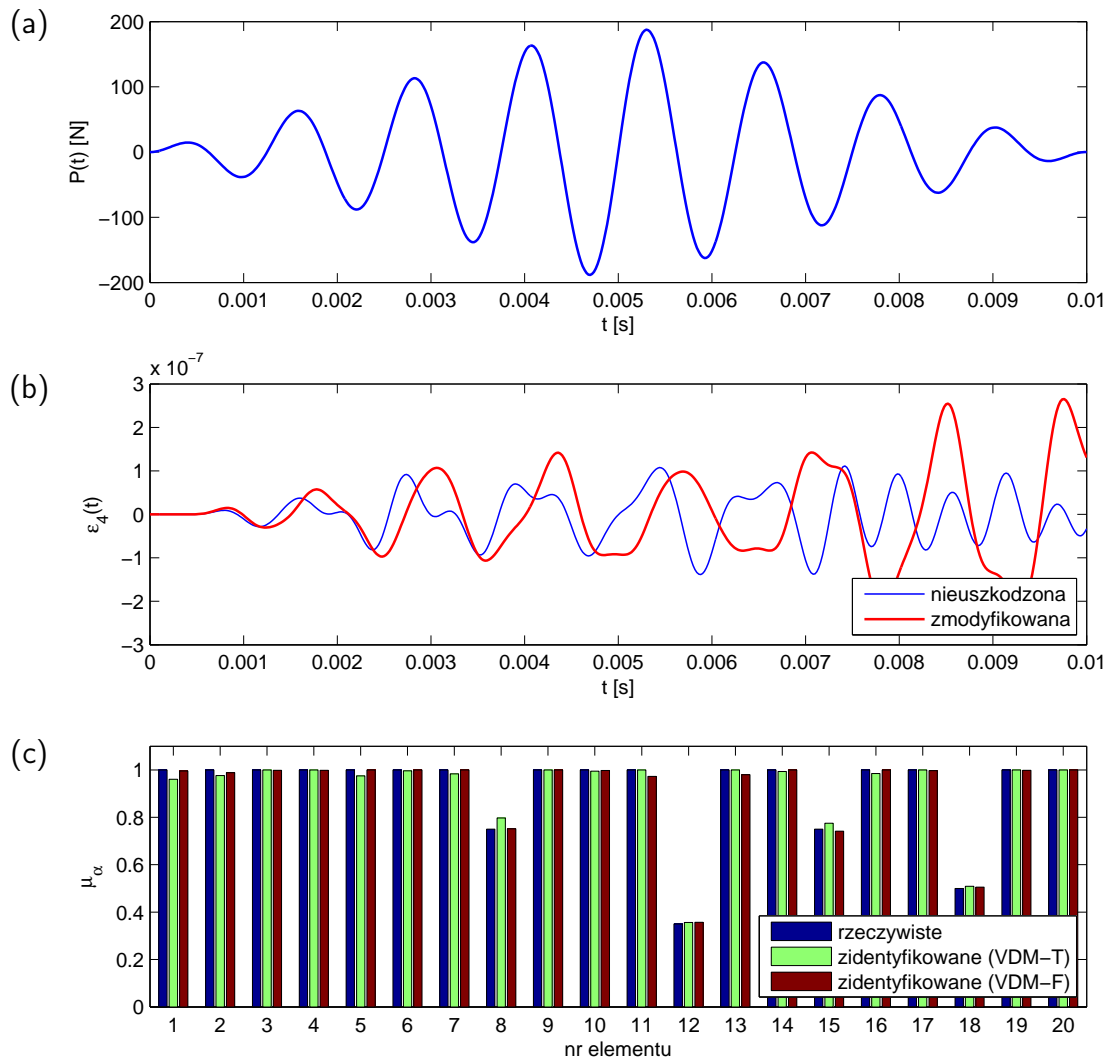
PRZYKŁAD 4.3: Belka wspornikowa

Rozważmy belkę wspornikową przedstawioną na rys. 4.10 o długości $L = 1 m$ i wymiarach przekroju poprzecznego $2 \times 0.5 [cm]$, którego pole wynosi $A = 1 cm^2$ oraz moment bezwładności $J = 2.0833 \cdot 10^{-4} cm^4$. Konstrukcja jest obciążona siłą osiową i momentem zginającym:

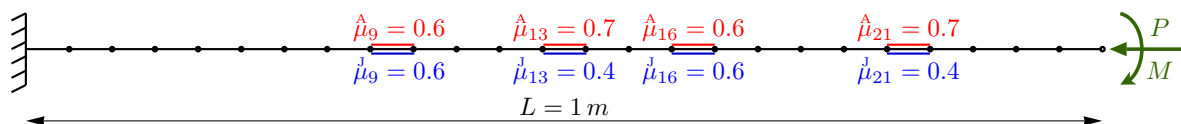
$$P_i = 100 \sin(\omega_i t) [N], \quad M = 1 \sin(\omega_i t) [Nm], \quad (4.29)$$

gdzie $\omega_i = 2\pi [10 \ 40 \ 155 \ 250]^T \frac{rad}{s}$.

Została ona podzielona na 25 elementów skończonych o jednakowej długości i w każdym z nich modelowane są modyfikacje pola przekroju ϑ_γ^A i momentu bezwładności ϑ_γ^J . Zakładamy, że sensory rozłożone są we wszystkich elementach skończonych i możemy mierzyć



Rysunek 4.9: Analiza dynamiczna kratownicy: (a) – obciążenie dynamiczne, (b) – odkształcenia elementu nr 1, (c) – porównanie rozkładu defektów uzyskanych z metod VDM-T i VDM-F.



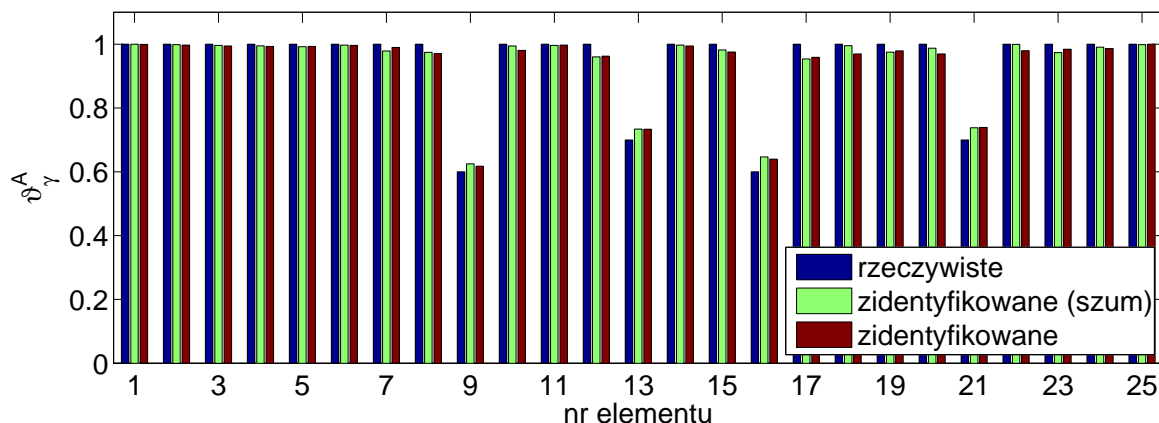
Rysunek 4.10: Testowana belka wspornikowa.

składowe odkształceń wzdłużnych i giętych. Te odpowiedzi dla konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej zostały numerycznie zasymulowane. Identyfikację uszkodzeń wykonano dla dwóch przypadków:

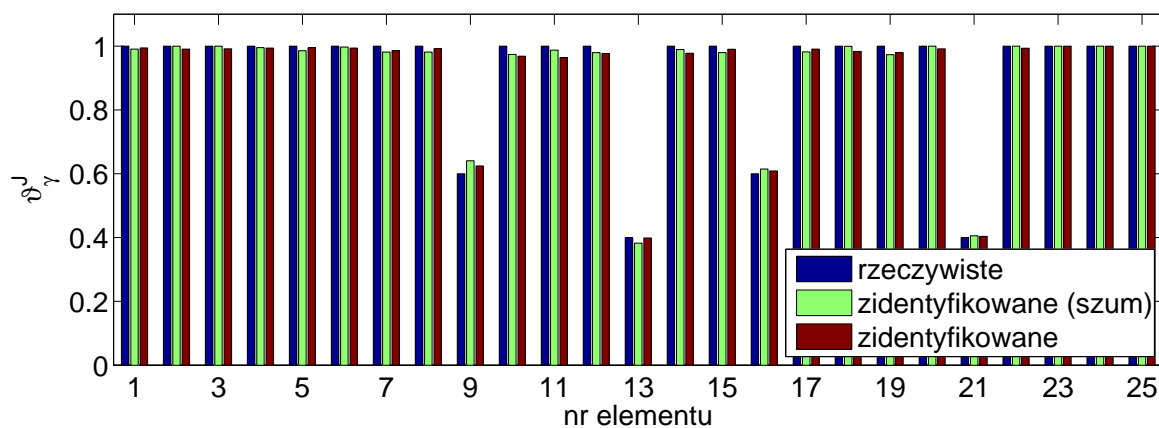
- przypadek I: bez symulacji błędów pomiarowych;

- przypadek II: z uwzględnieniem symulacji błędów pomiarowych;

W przypadku II błędy pomiarowe były symulowane analogicznie jak w przykładzie 4.1: każdą amplitudę składowych odkształceń konstrukcji zmodyfikowanej $\varepsilon_{\alpha\omega}^M$ zaburzono o przypadkową wartość do 10% jej początkowej wartości według zależności (4.28). Identyfikację parametrów przeprowadzono formułując funkcję celu analogicznie do (4.27), z uwzględnieniem wszystkich składowych odkształceń.



Rysunek 4.11: Identyfikacja parametrów ϑ_γ^A dla odpowiedzi symulowanych numerycznie z uwzględnieniem modelowania błędów pomiarowych.



Rysunek 4.12: Identyfikacja parametrów ϑ_γ^J dla odpowiedzi symulowanych numerycznie z uwzględnieniem modelowania błędów pomiarowych.

Wyniki analizy odwrotnej zostały zaprezentowane na rys. 4.11 oraz 4.12 odpowiednio dla parametrów modyfikacji ϑ_γ^A i ϑ_γ^J . Spadek funkcji celu osiągnął wartość 10^{-4} po 417 iteracjach (metoda największego spadku). Taką samą liczę iteracji zastosowano podczas analizy odwrotnej dla przypadku II, a czas obliczeń każdego z tych zadań wynosił ok. 10 minut.

4.7 Porównanie metod VDM-F i VDM-T

Do identyfikacji uszkodzeń z powodzeniem można stosować numeryczne narzędzia bazujące na Metodzie Dystorsji Wirtualnych: VDM-F i VDM-T. Tablica 4.2 zawiera porównanie podstawowych cech i wielkości tych sformułowań. Metody te dają porównywalne wyniki analizy odwrotnej, choć istnieją istotne różnice, które dotyczą głównie czasu analizy i liczby sensorów. Ze względu na quasi-statyczne sformułowanie metody VDM-F jest ona numerycznie efektywna, nawet w przypadku analizy o kilku częstościach wymuszeń. Z drugiej strony wymaga ona znacznie więcej informacji o konstrukcji – liczba sensorów jest tutaj znacząco większa niż w przypadku sformułowania VDM-T. ; zawierają amplitudy odpowiednich wielkości

Tabela 4.2: Porównanie metod VDM-F i VDM-T.

	VDM-F	VDM-T
sposób wymuszenia	wymuszenie harmoniczne, nierezonansowe o ustalonej częstości; problem quasi-statyczny	obciążenie i odpowiedzi są funkcjami czasu; problem dynamiczny
dystorsje wirtualne	harmoniczne $\tilde{\varepsilon}_\alpha(\omega, t)$, $\tilde{p}_i(\omega, t)$; zmiany parametrów modelowane są przez ich amplitudy	dystorsje wirtualne $\varepsilon_\alpha(t)$, $p_i(t)$ są funkcjami czasu
macierze wpływu	są obliczane niezależnie dla zadanych częstości, w tym odkształceniowe $D_{\alpha\beta\omega}^\varepsilon$, $D_{\alpha i\omega}^p$ przemieszczeniowe $B_{i\alpha\omega}^\varepsilon$, $B_{ik\omega}^p$ i ogólne $\check{D}_{N\beta\omega}^\varepsilon$, $\check{D}_{Nk\omega}^p$ macierze wpływu	jest obliczana odkształceniowa $D_{\alpha\beta}(t)$, przemieszczeniowa $B_{\alpha\beta}(t)$ i ogólna $\check{D}_{N\beta}(t)$ macierz wpływu; macierze te są wyznaczone w każdym kroku czasowym
sensory	duża liczba sensorów, dla kratownic porównywalna z liczbą elementów; zwiększenie zbioru częstości i lokalizacji wymuszeń może pomniejszyć ich liczbę	niewielka liczba sensorów; 2 lub 3 sensory optymalnie umieszczone na konstrukcji o kilkunastu elementach wystarczają do przeprowadzenia analizy odwrotnej

	VDM-F	VDM-T
czas analizy zadania odwrotnego	stosunkowo krótki czas obliczeń zadania odwrotnego nawet w przypadku kilku częstotliwości	długi czas obliczeń, silnie zależny od liczby dyskretyzacji czasowej
uwagi	wymaga odpowiedniego wyboru częstotliwości i lokalizacji wymuszeń	problem optymalnego przebiegu wymuszenia i lokalizacji wymuszenia, lokalizacja sensorów

Rozdział 5

Weryfikacja doświadczalna

5.1 Wprowadzenie

Tematem niniejszego rozdziału jest identyfikacja uszkodzeń w konstrukcjach w ujęciu eksperymentalnym. W pierwszej części rozdziału poruszony jest przeglądowo problem wyboru podstawowych elementów systemu monitorowania konstrukcji takich jak wzbudzenie drgań, rodzaj stosowanych sensorów, akwizycja danych, czy też wybór algorytmu identyfikacji uszkodzeń. Druga część jest poświęcona doświadczalnej identyfikacji uszkodzeń Metodą Dystorsji Wirtualnych zaprezentowanej w rozdziale 4 na przykładzie trójwymiarowej kratownicy. Defekty tej kratownicy zrealizowano poprzez wymianę dwóch jej elementów o zmodyfikowanym polu przekroju poprzecznego.

5.2 Elementy systemu monitorowania konstrukcji

Proces budowania systemu monitorowania konstrukcji wymaga już na wstępie określenia kilku podstawowych jego elementów i jest zależny m.in. od rodzaju obiektu, czynników środowiskowych, diagnozowanych parametrów konstrukcji. Te elementy z kolei determinują algorytm identyfikacji uszkodzeń. Ogólnie rzecz ujmując studia nad tym systemem można podzielić na cztery etapy:

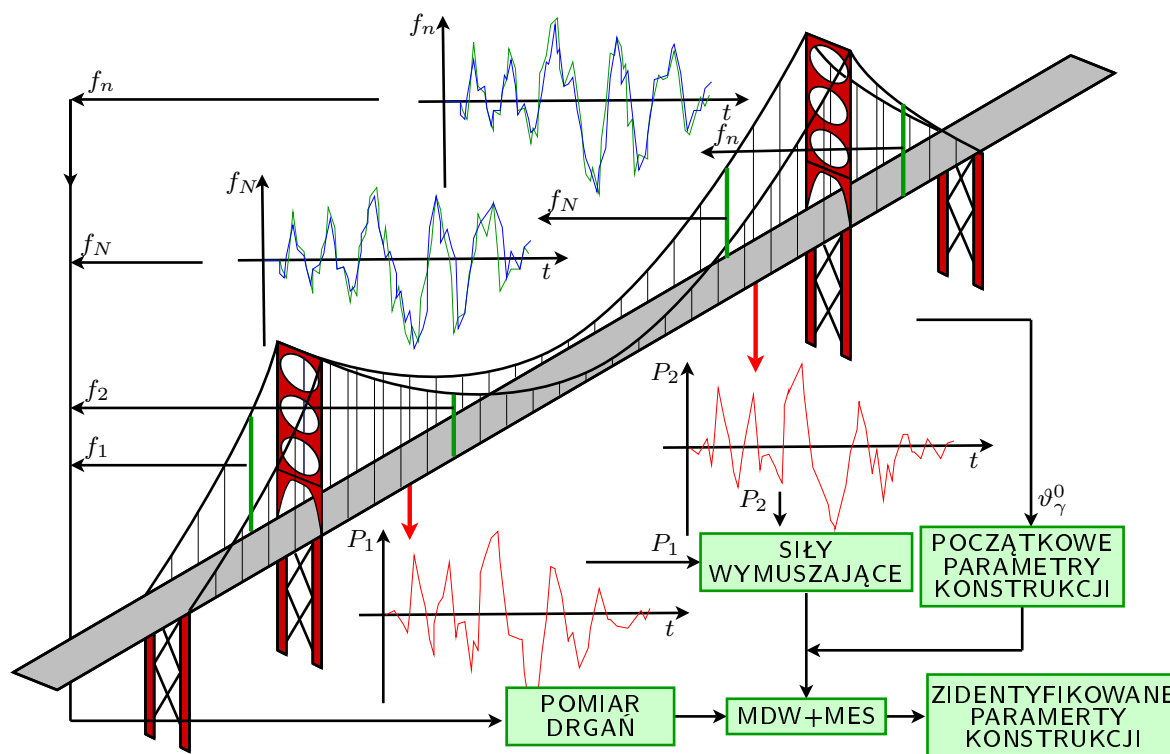
- sposób pobudzenia konstrukcji do drgań – w przypadku dużych konstrukcji (mosty) ekonomiczne względy przemawiają za wykorzystywaniem drgań konstrukcji wynikających z normalnego jej użytkowania (Ambient Vibration, AV). Są one

związane z ruchem pojazdów, taboru kolejowego, mogą być także wywołane obciążeniami środowiskowymi (obciążenie wiatrem, trzęsienia ziemi). Zaletą wykorzystania AV są niskie koszty, lecz w pewnych pasmach częstotliwości drgania konstrukcji mogą nie zostać wywołane i wobec tego wymagane są dodatkowe techniki, np. – hydrauliczne siłowniki, uderzająca masa. Natomiast do konstrukcji o stosunkowo niewielkich rozmiarach mogą być stosowane mechaniczne wzbudniki drgań, aktywatory piezoelektryczne czy też młotek modalny itp..

- wybór czujników pomiarowych – dużą grupę stanowią sensory piezoelektryczne ze względu na niską cenę (płytki ceramiczne) oraz możliwość ich stosowania w roli aktywatorów. Dodatkowym atutem są różne wielkości fizyczne, które można mierzyć za ich pomocą: siła, odkształcenie, ciśnienie, przyspieszenie. Powszechnie stosowane są również włókna optyczne, które można klasyfikować zależnie od zastosowania: na zewnątrz konstrukcji (sensory interferometryczne) bądź wewnątrz – włókna Bragg’a (Fibre Bragg Grating, FBG). Charakteryzują się dużą wrażliwością na deformacje (odkształcenie). Ponadto używane są jako sensory przetworniki elektromagnetyczne, elektromechaniczne (Micro-Electro Mechanical Systems, MEMS), mierniki laserowe (Laser Doppler Vibrometer, LDV).
- akwizycja danych i układ pomiarowy – obecnie najczęściej stosowany układ pomiarowy zbudowany jest ze scentralizowanego systemu akwizycji danych, do którego przewodowo podłączony jest zestaw czujników pomiarowych odpowiednio rozmieszczonych na konstrukcji. Rejestrowane sygnały analogowe są zamieniane na cyfrowe (przetworniki analogowo-cyfrowe) i przekazywane do jednostki analizującej dane. Budowa układu pomiarowego jest ściśle powiązana z rodzajem użytych czujników i metodologią identyfikacji uszkodzeń.
- zastosowanie algorytmu identyfikacji uszkodzeń – przed rozpoczęciem procesu identyfikacji zazwyczaj wymagane jest określenie wiarygodnego stanu referencyjnego konstrukcji wraz z modelem numerycznym. Oprócz techniki MES, stosowana jest metoda Elementów Brzegowych (Boundary Element Method, BEM) oraz metoda Elementów Spektralnych (Spectral Element Method, SEM). Zależnie od metody stosowane są różne kryteria oceny uszkodzeń: analiza częstotliwości, modów własnych, energia odkształceń modalnych itp.. Szeroko stosowane są sieci neuronowe i algorytmy genetyczne.

Na rysunku 5.1 jest przedstawiona ogólna koncepcja systemu monitorującego konstrukcję, u której podstaw leży MDW (VDM). Wymaga ona budowy modelu numerycznego obiektu referencyjnego (zwykle nieuszkodzonego tj. o parametrach projektowych) oraz znajomości działającego obciążenia. W przypadku dużych konstrukcji obciążenie jest realizowane za pomocą impulsu (np. uderzającej masy – VDM-T) lub wzbudników mechanicznych opartych na wirującej, mimośrodowo umieszczonej masie, wywołującej drgania harmoniczne (VDM-F). Drgania konstrukcji są rejestrowane przez układ odpowiednio rozmieszczonych czujników – do tego celu mogą zostać użyte zarówno sensory

piezoelektryczne jak i akcelerometry okresowo rejestrujące odpowiedzi na zadane obciążenie konstrukcji. Te sygnały są przekazywane do centralnej jednostki obliczeniowej za pomocą bezprzewodowych łącz telekomunikacyjnych (o ile jest to możliwe), gdzie następuje porównanie z odpowiedziami referencyjnymi konstrukcji. Jeśli okaże się, że w kolejnej sesji pomiarowej są one istotnie różne, przeprowadzana jest analiza odwrotna – identyfikacja uszkodzeń.



Rysunek 5.1: Koncepcja identyfikacji uszkodzeń w konstrukcjach.

5.3 Identyfikacja uszkodzeń w kratownicy

5.3.1 Stanowisko doświadczalne

Przedmiotem badania doświadczalnego jest trójwymiarowy dźwigar kratownicowy, którego widok ogólny jest przedstawiony na rys. 5.2. Jest on zbudowany na bazie układu „M12 System” firmy MERO-TSK [72]. Konstrukcja ta jest podparta w skrajnych czterech węzłach i z jednej strony możliwy jest przesuw poziomy wzdłuż jej osi głównej. Kratownica składa się z 26 stalowych węzłów, 70 elementów, z których 62 ma długość $L_{500} = 0.5\text{ m}$, a pozostałe 8 zaś $L_{707} = 0.707\text{ m}$. Każdy z nich ma rurowy przekrój poprzeczny, którego pole wynosi: $A = 0.597\text{ cm}^2$ (średnica zewnętrzna $\phi_{zew} = 22\text{ mm}$, średnica wewnętrzna $\phi_{wew} = 20\text{ mm}$). Całkowite wymiary kratownicy wynoszą odpowiednio: długość – 4 m , szerokość – 0.5 m oraz wysokość – 0.353 m .

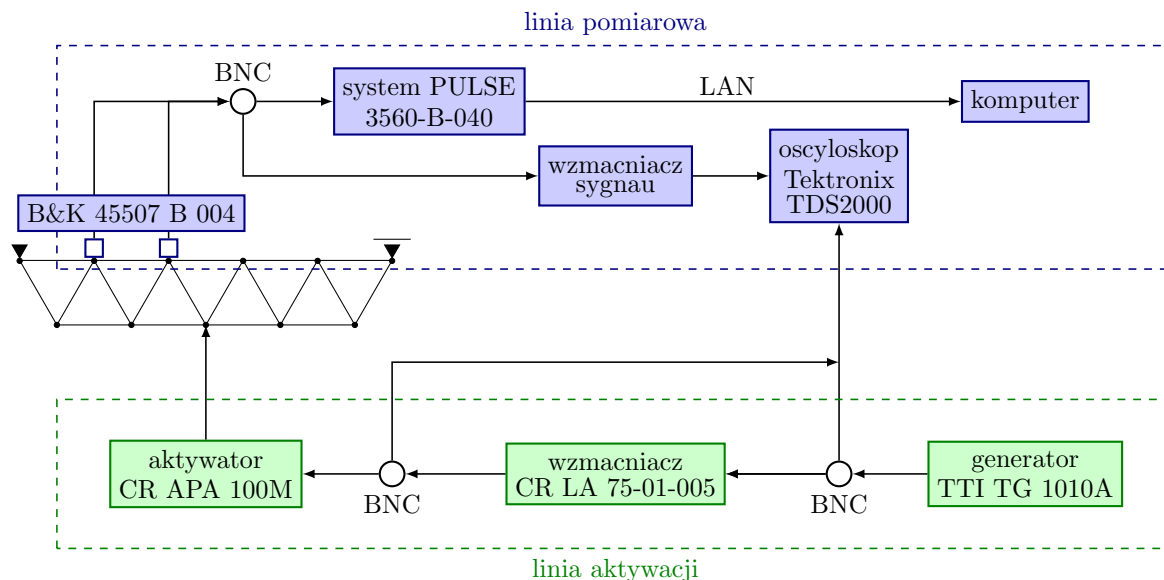


Rysunek 5.2: Stanowisko doświadczalne – trójwymiarowa kratownica. (a) widok ogólny, (b) piezo-sensor.

Drgania harmoniczne o częstotliwości 35 Hz są wywoływane za pomocą aktywatora piezoelektrycznego, umieszczonego w środkowej części konstrukcji pomiędzy podłogą a konstrukcją. Na każdym elemencie przyklejony jest sensor piezoelektryczny, na którego okładkach gromadzony jest ładunek elektryczny (por. rys. 5.2a). Ładunek ten jest proporcjonalny do odkształcenia elementu na którym umieszczony jest czujnik. Początkowo pomiary przeprowadzane były przy ich użyciu, lecz po wstępnych pomiarach problem z kalibracją modelu doświadczalnego był na tyle duży, że zastąpiono je akcelerometrami (Brüel & Kjaer, typ: 4507 B 004 [73]), umieszczonymi we wszystkich węzłach kratownicy (z wyłączeniem podporowych). Prawdopodobną przyczyną tego stanu rzeczy był w małym stopniu kontrolowany kontakt czujników piezoelektrycznych z elementami kratownicy. Wynikać to mogło z niedopasowania prętów kratownicy, które charakteryzują się dużą krzywizną (rurowy przekrój poprzeczny) oraz płaskich czujników piezoelektrycznych lub/i zastosowanego kleju.

Układ pomiarowy. Na rysunku 5.3 przedstawiony jest układ pomiarowy wykorzystany podczas sesji badawczych zarówno konstrukcji początkowej jak i zmodyfikowanej. Składa on się z dwóch zasadniczych części: linii aktywacyjnej – odpowiedzialnej za pobudzenie konstrukcji do drgań oraz linii pomiarowej, za pomocą której rejestrowane są drgania konstrukcji. Elementy linii aktywacyjnej, a mianowicie: generator funkcyjny (TTI, TG 1010A, zob. [74]), wzmacniacz (Cedrat Recherche, LA 75-01-005, zob. [75]) oraz aktywator piezoelektryczny (Cedrat Recherche, APA 100M, zob. [75]), połączone są złączami typu BNC. Zadaniem generatora jest wytworzenie sygnału harmonicznego. Ten następnie jest odpowiednio wzmacniany i przesyłany do aktywatora, który zamieniając energię elektryczną na mechaniczną wzbudza drgania konstrukcji. Układ ten zapewnia możliwość kontrolnego pomiaru sygnału aktywującego, zarówno przed

wzmocnieniem jak i po wzmocnieniu. Jest to istotne ze względu na zachowanie liniowej charakterystyki wzmocnienia. Podstawowe elementy linii pomiarowej to: akcelerometry



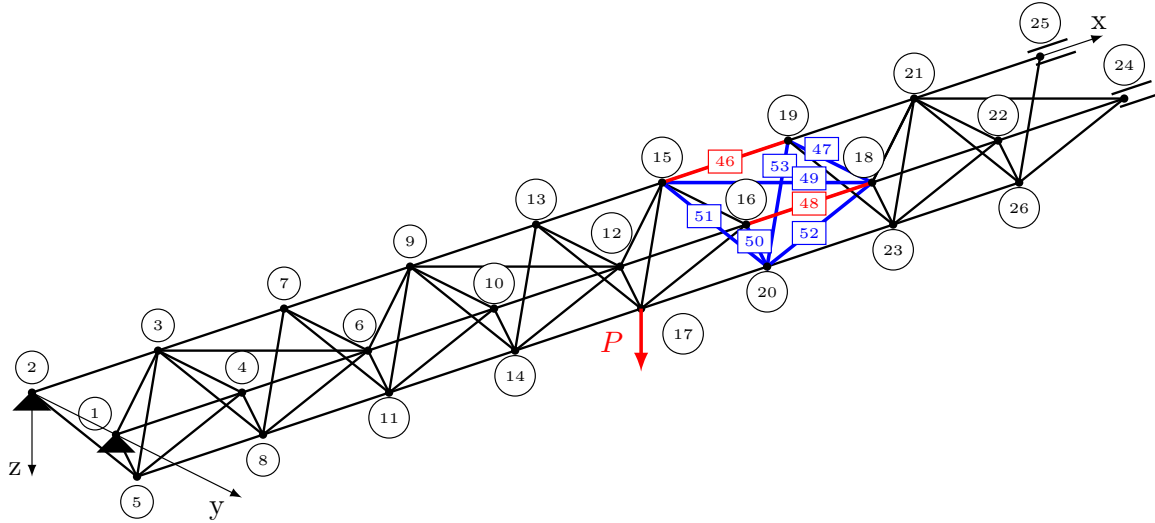
Rysunek 5.3: Układ pomiarowy stanowiska doświadczalnego.

(typy wspomniane powyżej), system PULSE (3560-B-040 zob. [73]), moduł pomiarowy wraz z oprogramowaniem oraz komputer. Akcelerometry posiadają wbudowany wzmacniacz sygnału dostosowany do systemu PULSE i nie wymagają one dodatkowej aparatury wzmacniającej sygnał. Inaczej sytuacja wygląda jeśli dokonywany jest pomiar kontrolny za pomocą oscyloskopu, w którym wymagane jest wzmocnienie sygnału. Harmoniczne odpowiedzi konstrukcji rejestrowane przez system PULSE (w domenie czasowej) przesyłane są za pomocą łącza LAN do komputera pomiarowego i tam obliczane są uśrednione amplitudy przyspieszeń (z kilkudziesięciu okresów).

5.3.2 Model numeryczny

Istotnym elementem identyfikacji uszkodzeń metodą VDM-F jest poprawny model numeryczny analizowanej konstrukcji. Szkic modelu numerycznego został zaprezentowany na rys. 5.4, na którym zaznaczono działającą harmoniczną siłę wymuszającą P w węźle nr 17. Ponadto wyróżniono te elementy, które w konstrukcji rzeczywistej wymieniono na inne (o zmodyfikowanych polach przekroju). Połączenia pomiędzy elementami zamodelowano jako idealnie przegubowe. W węzłach nr 1 i 2 nałożone są idealne więzy przemieszczeniowe we wszystkich kierunkach ($u_x = u_y = u_z = 0$), podczas gdy w węzłach 24 i 25 możliwy jest tylko ruch wzdłużny ($u_x \neq 0, u_y = u_z = 0$). Elementy tworzące konstrukcję zostały zważone. Ich wartości wynoszą odpowiednio:

$$m_{500} = 0.375 [kg], \quad m_{707} = 0.480 [kg], \quad (5.1)$$



Rysunek 5.4: Model numeryczny MES dźwigara kratowego.

i są zgodne z wartościami podanymi przez producenta. Te elementy są w rzeczywistości wyposażone na końcach w nagwintowane zaczepy, umożliwiające połączenie z węzłami. To oczywiście zaburza jednorodny rozkład masy, jednak w modelu numerycznym przyjęto równomierny jej rozkład. Przyjęto, że przekrój poprzeczny elementów jest rurowy na całej ich długości (o średnicach podanych przez producenta), a to z kolei prowadzi do niedoszacowania masy elementów:

$$\Delta m_{500} = m_{500} - \rho \frac{\pi}{4} (\phi_{zew}^2 - \phi_{wew}^2) L_{500} = 0.116 [kg], \quad (5.2)$$

$$\Delta m_{707} = m_{707} - \rho \frac{\pi}{4} (\phi_{zew}^2 - \phi_{wew}^2) L_{707} = 0.114 [kg]. \quad (5.3)$$

W modelu numerycznym ta różnica została uwzględniona jako masa skupiona, której połowę z danego elementu umieszczono w przyległych węzłach. W tabelicy 5.1 przedstawiono 5 dodatkowych mas Δm_i umieszczonych w węzłach kratownicy wraz ze związkami je definiującymi, wartościami oraz numerami węzłów, do których przypisano te masy. Zależą one od liczby i długości elementów połączonych w węzłach. Dane materiałowe zostały przyjęte dla stali – moduł Younga: $E = 205 \text{ GPa}$ oraz gęstość: $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. W tabelicy 5.2 przedstawiono rozkład masy w ujęciu globalnym – część masy pochodząca od elementów została umieszczona w węzłach, przy jednoczesnym zachowaniu masy całego układu.

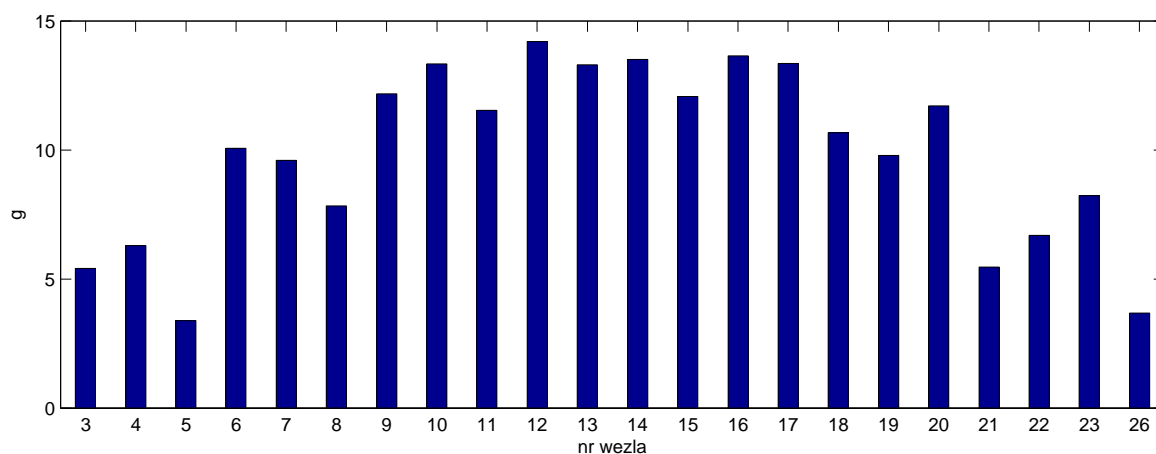
Kalibracja modelu numerycznego. Zajmijmy się teraz konstrukcją początkową, której wszystkie pola przekrojów poprzecznych elementów są identyczne. Na rysunku 5.5 zostały przedstawione pomierzone bezwzględne wartości amplitud przyspieszeń pionowych węzłów $\frac{M}{L} \ddot{u}_i$, których wartości są odniesione do przyspieszenia ziemskiego $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Amplituda siły wymuszającej, generowanej przez aktyuator piezoelektrycz-

Tabela 5.1: Ekwiwalentne masy skupione.

	Δm_1	Δm_2	Δm_3	Δm_4	Δm_5
związek	$2\frac{\Delta m_{500}}{2}$	$2\frac{\Delta m_{500}}{2} + \frac{\Delta m_{707}}{2}$	$5\frac{\Delta m_{500}}{2} + 2\frac{\Delta m_{707}}{2}$	$5\frac{\Delta m_{500}}{2}$	$6\frac{\Delta m_{500}}{2}$
masa [kg]	0.116	0.173	0.404	0.290	0.384
numery węzłów	2, 25	1, 24	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21	4, 5, 7, 10, 13, 16, 19, 22	8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

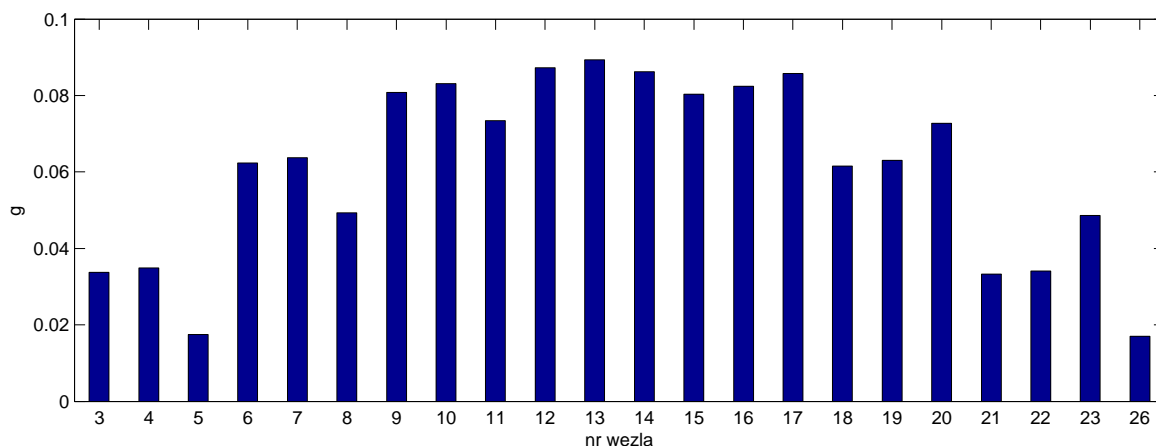
Tabela 5.2: Redystrybucja masy w modelu numerycznym.

	masa elementów L_{500}	masa elementów L_{707}	masa w węzłach	razem
rzeczywista [kg]	62×0.375	8×0.480	26×0.235	33.2
w modelu [kg]	62×0.259	8×0.366	26×0.235 62×0.116 8×0.114	33.2



Rysunek 5.5: Pomierzone amplitudy przyspieszeń pionowych węzłów.

ny, nie jest znana. Dlatego też w modelu numerycznym przyjęto wstępnie jednostkową amplitudę siły. Na rys. 5.6 zilustrowano amplitudy przyspieszeń \ddot{u}_i dla tego przypadku, wyrażone również poprzez g . Obliczone w ten sposób amplitudy przyspieszeń przeskalowano liniowo tak, aby średniokwadratowa różnica pomiędzy przeskalowanymi i

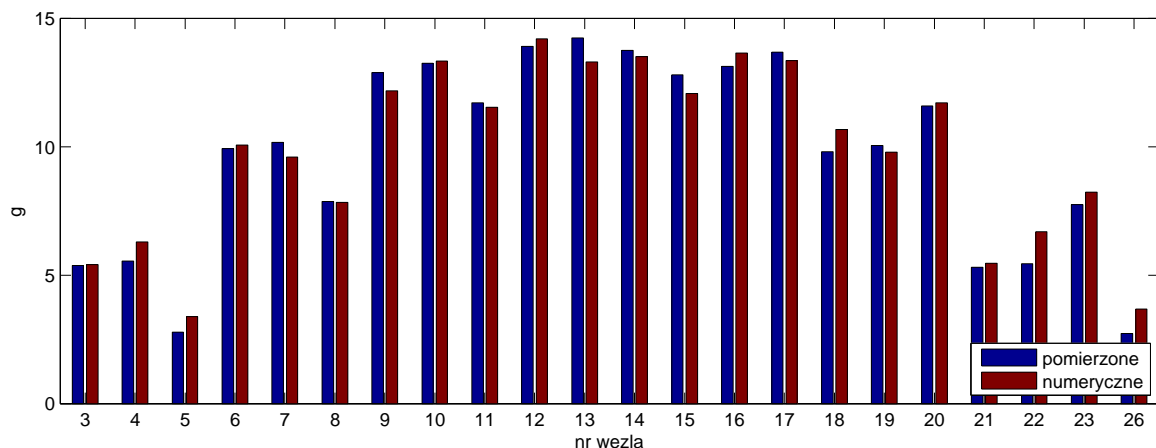


Rysunek 5.6: Obliczone numerycznie amplitudy przyspieszeń pionowych węzłów.

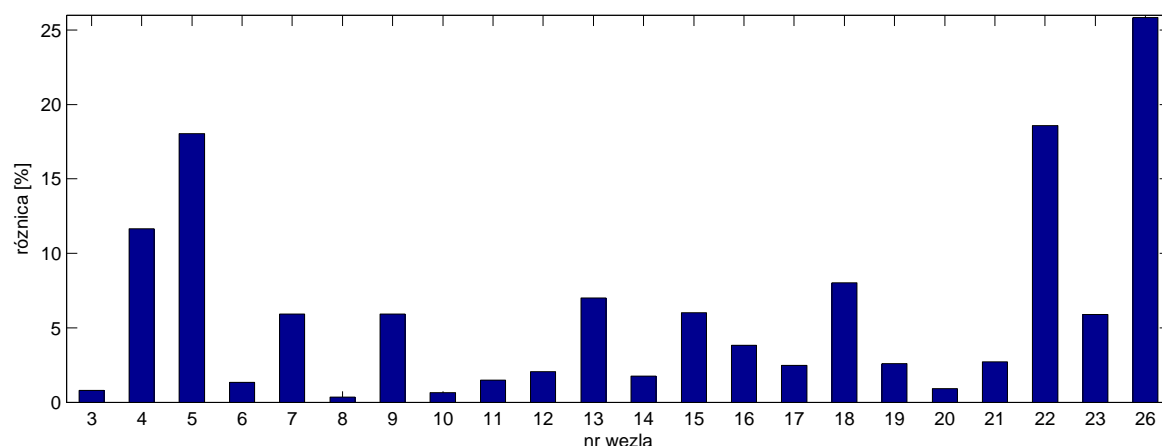
pomierzonymi amplitudami przyspieszeń była najmniejsza:

$$\frac{\overset{L}{\ddot{u}}_i}{\overset{L}{u}} \delta^0 \stackrel{!}{=} \frac{\overset{M}{L}}{\overset{L}{\ddot{u}}_i} \Rightarrow \delta^0 = \frac{\overset{L}{\ddot{u}}_i \overset{M}{L}}{\overset{L}{u} \overset{L}{\ddot{u}}_i} = 158.92. \quad (5.4)$$

Wyznaczone numerycznie amplitudy przyspieszeń zostały obliczone przy założeniu jednostkowej amplitudy siły wymuszającej, a zatem w ramach przyjętego liniowego zachowania układu możemy zinterpretować współczynnik skalujący jako amplitudę siły $P = 158.92 [N]$, generowanej przez aktywator. Na rysunku 5.7 przedstawione zostało porównanie przeskalowanych numerycznych oraz pomierzonych amplitud przyspieszeń.



Rysunek 5.7: Porównanie przeskalowanych numerycznych i pomierzonych amplitud przyspieszeń pionowych węzłów.



Rysunek 5.8: Różnice pomiędzy numerycznymi (przeskalowanymi) i pomierzonymi amplitudami przyspieszeń pionowych węzłów.

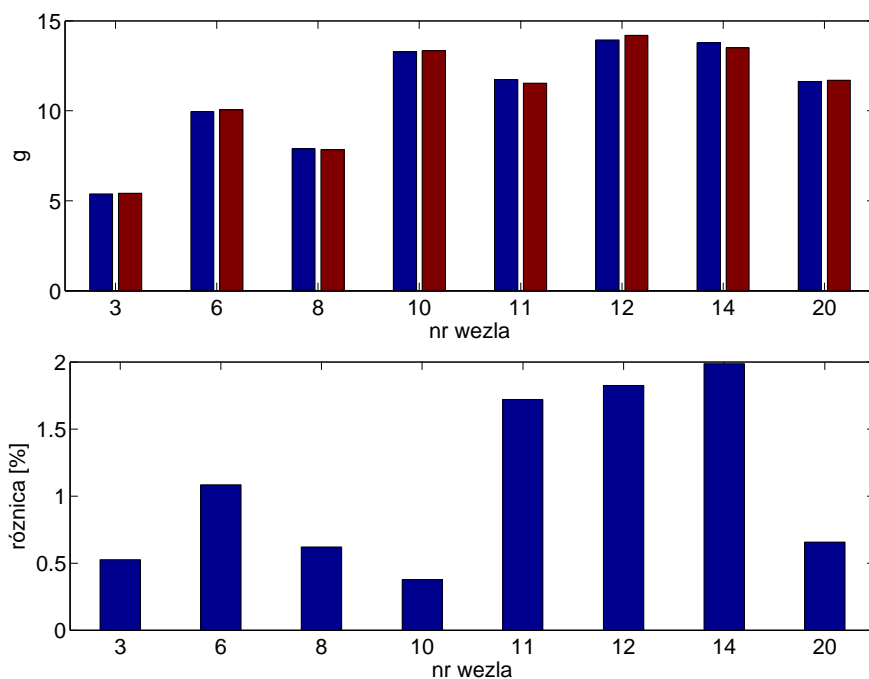
Jak widać na rysunku 5.8, różnice w amplitudach przyspieszeń w kilku węzłach są dość istotne i sięgają nawet 20%, a w węźle 26 różnica ta wynosi powyżej 25%. Rozbieżności te nie są akceptowalne w analizie odwrotnej i z tego względu uwzględnionych będzie 8 pomiarów wykazujących najlepszą zgodność z modelem numerycznym. Do dalszej analizy zostają wybrane węzły o numerach: 3, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 20. Dla tego zestawu węzłów został powtórnie obliczony mnożnik skalujący zgodnie ze wzorem (5.4), wynoszący teraz $\delta = 159.81$. Dla tego współczynnika na rys. 5.9 porównane zostały odpowiednie amplitudy przyspieszeń, a poniżej przedstawiono ich różnice.

Wyznaczony w ten sposób współczynnik skalujący δ dla wybranych węzłów sprawia, że bardzo dobrze korespondują obliczone i pomierzone amplitudy przyspieszeń i może być on uwzględniony w analizie odwrotnej dwójako. Numeryczne amplitudy przyspieszeń uzyskane od jednostkowej siły wymuszającej są skalowane przez δ lub pomierzone amplitudy przyspieszeń są skalowane przez $\frac{1}{\delta}$. W ramach przyjętego liniowego zachowania układu obydwa podejścia są równoważne.

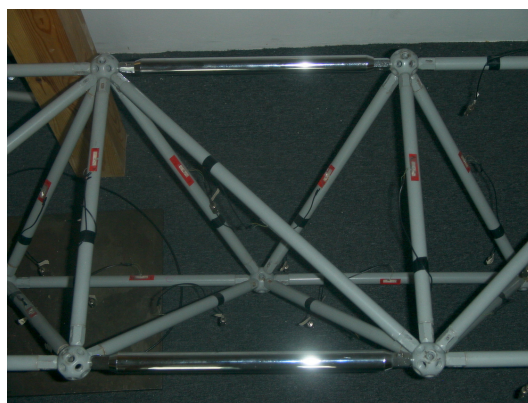
5.3.3 Analiza odwrotna

Konstrukcję zmodyfikowaną uzyskano przez wymianę 2 elementów na inne w wybranej sekcji (por. rys. 5.10). Te zmodyfikowane elementy są wykonane również ze stali – moduł Young’a E i gęstość pozostają bez zmian, lecz o zmienionym polu przekroju: $\hat{A} = 1.343 \text{ cm}^2$. Współczynnik modyfikacji sztywności elementów 46 i 48 wynosi tutaj $\vartheta_{46} = \vartheta_{48} = 2.04$. Celem zadania odwrotnego jest zlokalizowania i zidentyfikowanie tych parametrów. Drgania konstrukcji zmodyfikowanej zostały pomierzone (amplitudy) analogicznie jak w przypadku konstrukcji początkowej. Na rysunku 5.11 zostały one porównane z amplitudami przyspieszeń, uzyskanymi dla konstrukcji początkowej (zaprezentowanymi już powyżej por. rys. 5.9).

Wymiana 2 elementów w konstrukcji nie wywołuje istotnych zmian amplitud przy-



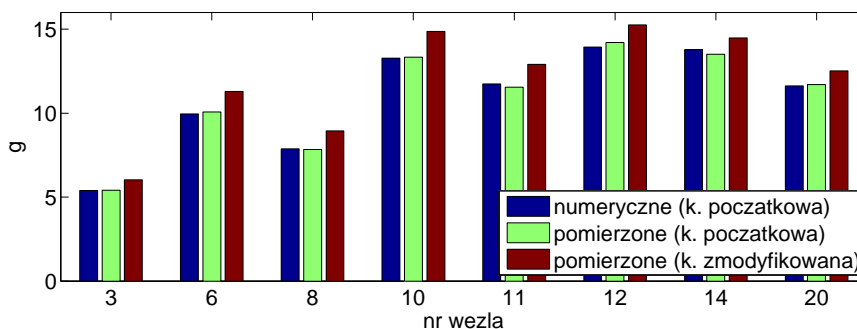
Rysunek 5.9: Różnice pomiędzy numerycznymi ($\delta = 159.81$) i pomierzonymi amplitudami przyspieszeń pionowych oraz ich różnice w wybranych węzłach.



Rysunek 5.10: Fragment dźwigaru kratownicowego, w którym zostały wymienione dwa elementy (nr 46 i 48).

spieszeń. Różnice pomiędzy pomierzonymi amplitudami przyspieszeń konstrukcji nieuszkodzonej i zmodyfikowanej są w zakresie ok. 6%-12%. Dlatego też istotne było uzyskanie możliwie zgodnych wartości amplitud pomierzonych i obliczonych numerycznie konstrukcji początkowej (rozbieżność poniżej 2%).

Identyfikacja uszkodzeń została wykonana według algorytmu 4.2, w którym funkcja celu jest wyrażona w zależności od wybranych amplitud przyspieszeń uzyskanych dla



Rysunek 5.11: Amplitudy przyspieszeń konstrukcji początkowej (numeryczne i pomierzone) oraz zmodyfikowanej (pomierzone).

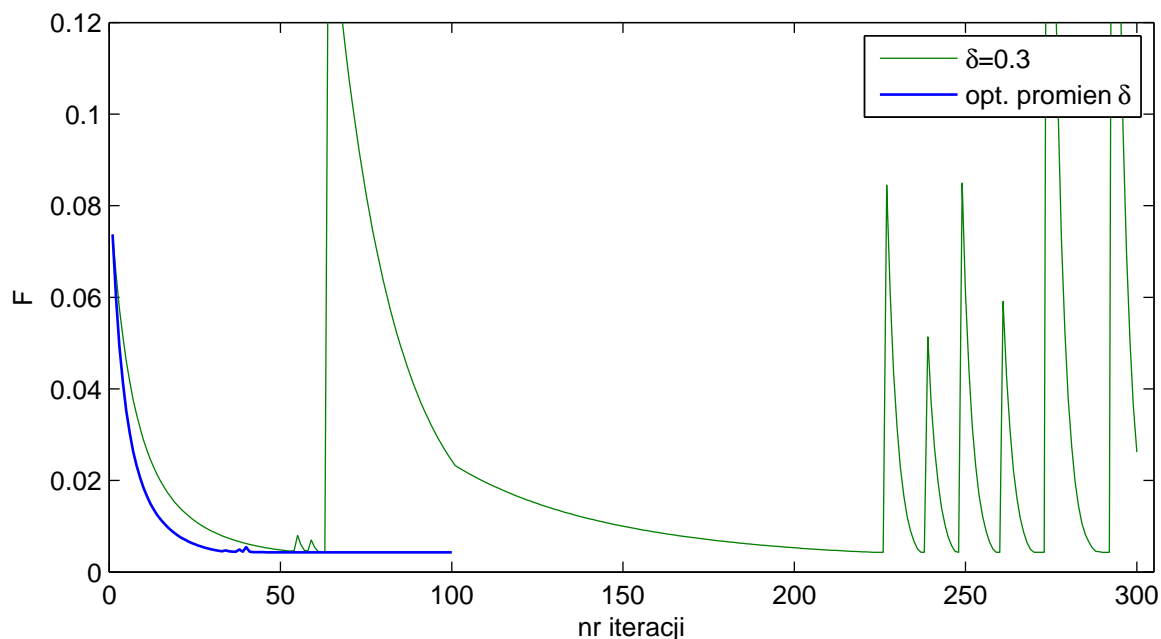
jednej częstotliwości wymuszenia $\omega = 2\pi \cdot 35 \left[\frac{rad}{s} \right]$:

$$F = \sum_i \left[\frac{\ddot{u}_i - \overset{M}{\ddot{u}}_i}{\overset{M}{\ddot{u}}_i} \right]^2, \quad (5.5)$$

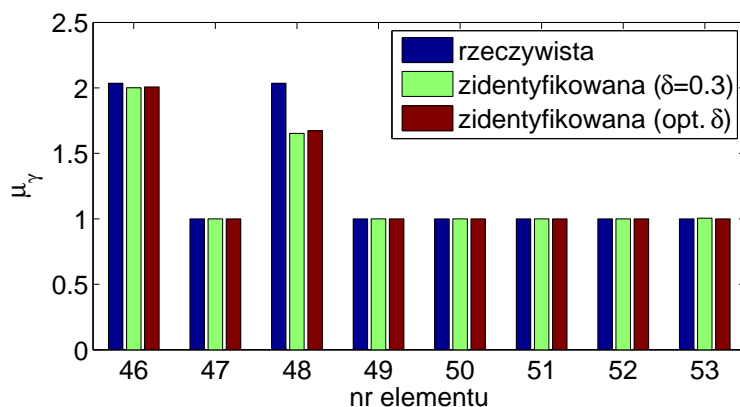
gdzie \ddot{u}_i stanowi numerycznie obliczoną amplitudę przyspieszenia pionowego (modelowaną amplitudami dystorsji wirtualnych) w węzle i , podczas gdy $\overset{M}{\ddot{u}}_i$ stanowi odpowiednio amplitudę pomierzoną. Zastosowane w tym zadaniu wymuszenie o jednej, ustalonej częstotliwości pozwala opuścić znak sumowania po ω we wzorze (5.5).

Początkowy wektor modyfikacji ϑ_γ^A w procesie optymalizacji został przyjęty jako wektor o jednostkowych składowych – charakteryzujący konstrukcję początkową. Ze względu na ograniczoną liczbę wiarygodnych 8 pomiarów amplitud przyspieszeń, zakres identyfikowanych parametrów został ograniczony tylko do tej sekcji, w której zostały wymienione elementy (por. rys. 5.4 i 5.10) (stąd $\gamma=1,2,\dots,8$).

Proces optymalizacji funkcji celu przeprowadzono metodą największego spadku dla dwóch przypadków: w pierwszym parametr $\lambda = 0.3$ jest ustalony arbitralnie w każdej iteracji oraz – drugi przypadek – jest on optymalizowany na każdej iteracji. Początkowa wartość funkcji celu w obu przypadkach wynosi $F^{(1)} = 7.372 e^{-2}$. Rysunek 5.12 przedstawia wartości funkcji celu w kolejnych iteracjach w tych przypadkach. Proces optymalizacji dla ustalonego parametru $\lambda = 0.3$ przeprowadzony w 300 iteracjach charakteryzuje wysoka niestabilność zbieżności rozwiązania. Jednak śledząc historię procesu optymalizacji można stwierdzić, że minimalna wartość funkcji celu została osiągnięta w 270 iteracji i wyniosła $F^{(300)} = 4.279 e^{-3}$, a odpowiadający jej zidentyfikowany wektor parametrów konstrukcji jest zilustrowany na rys. 5.13. Natomiast w drugim przypadku, gdy optymalizowany jest parametr λ , następuje szybka zbieżność i stabilność rozwiązania. Dlatego też proces optymalizacji został ograniczony do 100 iteracji, którego rezultat (z ostatniej iteracji, $F^{(100)} = 4.277 e^{-3}$) zaprezentowano na rys. 5.13. W obu przypadkach spadek funkcji celu wyniósł ok. $s = 0.058$. Mimo, że spadek wartości funkcji celu nie jest duży, to proces optymalizacji z zadowalającą dokładnością wskazuje na właściwie zlokalizowane intensywności uszkodzeń.



Rysunek 5.12: Wartości funkcji celu w kolejnych iteracjach.



Rysunek 5.13: Wyniki identyfikacji uszkodzenia przeprowadzonej dla danych doświadczalnych.

W tablicy 5.3 zawarto porównania wybranych parametrów optymalizacji metodą największego spadku przy stałej i zmiennej wartości współczynnika λ . Modyfikacja w elemencie 46 została wykryta precyzyjnie, podczas gdy w elemencie 48 różnica pomiędzy zidentyfikowanym a rzeczywistym polem przekroju poprzecznego wynosi ok. 18%. Zauważmy, że do tego problemu została zastosowana tylko jedna częstość wymuszenia. Wymuszenia o wyższych częstościach, ze względu na charakterystykę wzmacniacza, nie mogły zostać wykorzystane.

Tabela 5.3: Wybrane parametry zadnia odwrotnego.

parametr	optymalizacja NS	
λ	0.3	optymalizowany w iteracji
liczba iteracji	300	100
czas identyfikacji	0'50"	2'35"
zidentyfikowane parametry	$\vartheta_{46}^A = 2.000$	$\vartheta_{46}^A = 2.008$
		$\vartheta_{47}^A = 1.000$
	$\vartheta_{48}^A = 1.653$	$\vartheta_{48}^A = 1.673$
	$\vartheta_{49}^A = \vartheta_{50}^A = \vartheta_{51}^A = \vartheta_{52}^A = 1.000$	
	$\vartheta_{53}^A = 1.005$	$\vartheta_{53}^A = 1.000$
bezwzględny błąd [%]	$\Delta\vartheta_{46}^A = 1.73$	$\Delta\vartheta_{46}^A = 1.38$
	$\Delta\vartheta_{48}^A = 18.80$	$\Delta\vartheta_{48}^A = 17.82$

Rozdział 6

Podsumowanie

6.1 Oryginalne osiągnięcia pracy

W rozprawie opracowano Metodę Dystorsji Wirtualnych sformułowaną w domenie częstotliwości (VDM-F). Pozwala ona na efektywną i szybką reanalizę konstrukcji obciążonej harmonicznie, która została zastosowana do identyfikacji uszkodzeń w konstrukcjach prętowych. W szczególności zostały wykonane następujące zadania:

- Adaptacja Metody Dystorsji Wirtualnych do problemów ustalonych drgań konstrukcji – to zagadnienie zostało omówione w rozdziale 3, w którym opracowano podstawy teoretyczne, modelowanie parametrów konstrukcji za pomocą dystorsji wirtualnych przy wykorzystaniu dwójakiego rodzaju macierzy wpływu. Przeprowadzono również analizę wrażliwości pól dystorsji wirtualnych;
- Opracowano metodę szybkiej reanalizy konstrukcji dla zmodyfikowanych parametrów oraz poddanej drganiom harmonicznym, o ustalonych częstościach. Reanaliza ta pozwala na obliczenie zaktualizowanych odkształceń, przemieszczeń, przyspieszeń itp. dla całej konstrukcji lub jej części;
- Sformułowanie problemu identyfikacji uszkodzeń konstrukcji (rozdział 4) obciążonej harmonicznie – opracowano algorytmy wykorzystujące MDW do lokalizacji i intensywności defektów w konstrukcji. Zaproponowano gradientowe metody optymalizacji, których wynikiem jest rozkład modelowanych parametrów;
- Stworzono oprogramowanie, pakiet `jvdmf` w języku Java, w którym zaimplementowano opracowane algorytmy identyfikacji uszkodzeń (VDM-F) dla ram płaskich

oraz trójwymiarowych kratownic z uwzględnieniem utraty masy i sztywności. Zredukowano koszty obliczeniowe w porównaniu do Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (VDM-T), kosztem jednak zwiększonej liczby czujników pomiarowych;

- Zaproponowano metodę monitorowania stanu technicznego konstrukcji, opracowano układ pomiarowy i pomyślnie przeprowadzono doświadczalną weryfikację na przykładzie przestrzennej kratownicy (rozdział 5);

6.2 Wnioski końcowe

- Wprowadzono pojęcia wykorzystywane do opisu MDW oraz ustalono związki pomiędzy modyfikowanymi parametrami elementu skończonego i konstrukcji a składowymi dystorsji wirtualnych na podstawie problemu własnego macierzy sztywności;
- Sformułowano i oprogramowano MDW dla drgań ustalonych z uwzględnieniem modelowania zarówno zmiany sztywności konstrukcji – dystorsje wirtualne wprowadzane lokalnie jak i masy – dystorsje wirtualne wprowadzane globalnie;
- Opracowano i oprogramowano algorytmy analizy wrażliwości dystorsji wirtualnych względem modelowanych parametrów modyfikacji konstrukcji;
- Opracowano i oprogramowano algorytmy identyfikacji parametrów dla przestrzennych konstrukcji kratowych i ram płaskich, obciążonych harmonicznymi – analizowane są zmiany amplitudy drgań;
- Do identyfikacji zastosowano gradientowe metody optymalizacji: największego spadku z wykorzystaniem cząstkowego, jednowymiarowego problemu optymalizacji;
- Dokonano porównania na przykładach numerycznych sformułowań w domenie czasowej i częstościowej (VDM-T i VDM-F), z którego wynikają następujące wnioski:
 - czas analizy odwrotnej przy zastosowaniu algorytmów VDM-T jest ok. 300 razy dłuższy niż podobna analiza metodą VDM-F;
 - wymagana liczba sensorów dla VDM-F jest znacznie większa – o ile możliwe na całej konstrukcji – niż w alternatywnym sformułowaniu VDM-T;
 - rozkłady defektów otrzymane z przeprowadzonych analiz odwrotnych są porównywalne;

- Wykonano model numeryczny rzeczywistej, trójwymiarowej kratownicy dla której zamodelowano i pomierzono węzłowe przyspieszenia dla ustalonej częstotliwości co było podstawą wykonanej analizy odwrotnej potwierdzającej skuteczność zaprezentowanej metody;

6.3 Plany przyszłych badań

Przedstawiona w pracy koncepcja identyfikacji uszkodzeń pozwala na efektywną i skuteczną analizę odwrotną. Mimo to, pewne jej elementy muszą zostać dostosowane do konkretnego obiektu inżynierskiego. W szczególności zostaną przeprowadzone następujące zadania:

- rozwój narzędzi numerycznych, a w tym optymalna lokalizacja wymuszeń oraz wybór częstości wymuszających. W ten sposób można zwiększyć dokładność detekcji uszkodzeń lub/i zminimalizować liczbę sensorów. Liczba sensorów może mieć istotne znaczenie w przypadkach, gdy utrudniony jest dostęp do części badanego obiektu. Do oceny stanu technicznego konstrukcji będzie uwzględniona historia i rozwój uszkodzeń, której celem będzie oszacowania czasu, przy którym obiekt zapewnia bezpieczeństwo przy normalnym jego użytkowaniu.
- opracowanie konfiguracji sprzętowej z uwzględnieniem tanich czujników piezoelektrycznych, przedwzmacniaczy sygnału i wstępnego jego przetwarzania oraz sposobu ich trwałego montażu na konstrukcji. Wraz ze wzrostem odległości przesyłanego sygnału za pomocą kabli wpływ szumu może być tutaj istotnym ograniczeniem. Dlatego też, uzasadnione jest wykorzystanie do tego celu bezprzewodowej transmisji danych z czujników pomiarowych do centralnej jednostki zbierającej dane i dalej do centrum obliczeniowego. Do rozwiązania pozostaje również kwestia sposobu zasilania urządzeń elektronicznych.
- przetestowanie metody na obiekcie inżynierskim – przedmiotem badań realizującym omówioną koncepcję identyfikacji uszkodzeń będzie most kolejowy w Nieporęcie (zob. 1.1). Pośrednimi celami będzie:
 - ustalenie wpływu czynników środowiskowych na urządzenia elektroniczne, aparaturę i czujniki pomiarowe i rejestrowane sygnały podczas różnych pór roku;
 - porównanie wyników pomiarowych otrzymanych za pomocą transmisji bezprzewodowej i tradycyjną, przy użyciu kabli.

Bibliografia

- [1] Sohn H., Farrar C.R., Hemez F.M., Shunk D.D., Stinemates D.W., Nadler B.R. A review of structural health monitoring literature: 1996-2001,. Raport instytutowy, Los Alamos National Laboratory Report, 2003.
- [2] Muravin G. *Inspection, diagnostics and monitoring of construction materials by the acoustic emission methods*. Minerva Press, London, 2000.
- [3] Holroyd T. *The acoustic emission and ultrasonic monitoring handbook*. Coxmoor Publishing Company, Oxford, 2001.
- [4] Rose J.L. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press, 1999.
- [5] Biemans C., Staszewski W.J., Boller C., Tomlinson G.R. Crack detection in metallic structures using broadband excitation of acousto-ultrasonics. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 12(8):589–597, 2001.
- [6] Betz D., Thursby G., Culshaw B., Staszewski W.J. Acousto-ultrasonic sensing using fiber bragg gratings. *Smart Materials and Structures*, 12:122–128, 2003.
- [7] Ostachowicz W., Krawczuk M. Damage detection of structures using spectral element method. Holnicki-Szulc J., Mota Soares C.A., redaktorzy, *Advances in Smart Technologies in Structural Engineering*, strony 69–88. Springer, 2003.
- [8] Staszewski W.J. Structural health monitoring using guided ultrasonic waves. Holnicki-Szulc J., Mota Soares C.A., redaktorzy, *Advances in Smart Technologies in Structural Engineering*, strony 117–162. Springer, 2003.
- [9] Przemysław Kołakowski. Structural health monitoring – a review with the emphasis on low-frequency methods. *Engineering Transactions*, 2007.
- [10] Yang S.M., Lee G.S. Effects of modeling error on structure damage diagnosis by two-stage optimization. *Structural Health Monitoring 2000*, strony 871–880. Stanford University, 1999.

- [11] Ettouney M., Daddazio R., Hapij A. Optimal sensor locations for structures with multiple loading conditions. *Smart Structures and Materials 1999: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways, Proceedings of SPIE*, wolumen 3, strony 78–89, 1999.
- [12] Williams E.J., Messina A. Applications of the multiple damage location assurance criterion, damage assessment of structures. *Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS'99)*, strony 256–264, 1999.
- [13] Ho Y.K., Ewins D.J. Numerical evaluation of the damage index. *Structural Health Monitoring 2000*, strony 995–1011, 1999.
- [14] Zhang L., Quiong W., Link M. A structural damage identification approach based on element modal strain energy. *Proceedings of ISMA23, Noise and Vibration Engineering*, Leuven, Belgium, 1998.
- [15] Worden K., Manson G., Allman D. An experimental appraisal of the strain energy damage location method. *Damage Assessment of Structures, Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS'01)*, strony 35–46, Cardiff, UK, 25-28 June 2001.
- [16] Fritzen C.-P., Bohle K. Damage identification using a modal kinetic energy criterion and „output-only” modal data-application to the Z24-bridge. *Proc. of the 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring*, strony 185–194, Munich, Germany, 7-9 July 2004.
- [17] Maeck J., De Roeck G. Dynamic bending and torsion stiffness derivation from modal curvatures and torsion rates. *Journal of Sound and Vibration*, 225(1):153–170, 1999.
- [18] Stavroulakis G.E. *Inverse and crack identification problems in engineering mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [19] Stavroulakis G.E. Impact-echo from a unilateral interlayer crack. LCP-BEM modelling and neural identification. *Engineering Fracture Mechanics*, (62):165–184, 1999.
- [20] Hou Z., Noori M., Amand R.S. Wavelet-based approach for structural damage detection. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(7):677–683, 2000.
- [21] Hou Z., Hera A. A system identification technique using pseudo-wavelets. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 12(10):681–687, 2001.
- [22] Chang C.C., Chang T.Y.P., Xu Y.G., Wang M.L. Structural damage detection using an iterative neural network. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11(1):32–42, 2000.

- [23] Yana Y.J., Yam L.H., Jiang J.S. Vibration-based damage detection for composite structures using wavelet transform and neural network. *Composite Structures*, 60(4):403–412, 2003.
- [24] Chou J-H., Ghaboussi J. Genetic algorithm in structural damage detection. *Computers & Structures*, 79(14):1335–1353, 2001.
- [25] Farrar C.R., Duffey T.A., Doebling S.W., Nix D.A. A statistical pattern recognition paradigm for vibration based structural health monitoring. *Proc. 2nd International Workshop on “Structural Health Monitoring”*, strony 764–773, Stanford University, Palo Alto, USA, 8-10 September 1999.
- [26] Monaco E., Franco F., Lecce L. Experimental and numerical activities on damage detection using magnetostrictive actuators and statistical analysis. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11(7):567–578, 2000.
- [27] Sohn H., Worden K., Farrar C.R. Statistical damage classification under changing environmental and operational conditions. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 13(9):561–574, 2002.
- [28] Hunt S.R., Hebden I.G. Validation of the eurofighter typhoon structural health and usage monitoring system. *European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring*, strony 743–753, Madrid, Spain, 2000.
- [29] Kabashima S., Ozaki T., Takeda N. Damage detection of satellite structures by optical fiber with small diameter. *Smart Structures and Materials 2000: Smart Structures and Integrated Systems, Proceedings of SPIE*, wolumen 985, strony 343–351. 3, 2000.
- [30] Fritzen C.-P., Bohle K. Identification of damage in large scale structures by means of measured FRFs-procedure and application to the I40-highway bridge. *Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS'99)*, strony 310–319, Dublin, Ireland, 1999.
- [31] Maeck J., De Roeck G. Damage assessment using vibration analysis on the Z24 bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 71(1):133–142, 2003.
- [32] Teughels A., De Roeck G. Structural damage identification of the highway bridge Z24 by FE model updating. *Journal of Sound and Vibration*, 278(3):589–610, 2004.
- [33] Wang M.L., Xu F.L., Lloyd G.M. A systematic numerical analysis of the damage index method used for bridge diagnostics. *Smart Structures and Materials 2000: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways, Proceedings of SPIE*, wolumen 3, strony 154–164, Newport Beach, California, 2000.

- [34] Skjaerbaek P.S., Kirkegaard P.H., Nielsen S.R.K. Shaking table tests of reinforced concrete frames. *Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures, Proceedings of DAMAS'97*, strony 441–450, University of Sheffield, UK, 1997.
- [35] Holnicki-Szulc J., Kolakowski P., Nasher N. Leakage detection in water networks. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(3):207–219, 2005.
- [36] Cawley P. Long range inspection of structures using low frequency ultrasound. *Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures, Proceedings of DAMAS'97*, strony 1–17, University of Sheffield, UK, 1997.
- [37] Zak A., Krawczuk M., Ostachowicz W. Vibration of a laminated composite plate with closing delamination. *Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures, Proceedings of DAMAS'99*, strony 17–26, University College, Dublin, Ireland, 1999.
- [38] W. Nowacki. *Teoria sprężystości*. PWN, 1970.
- [39] W. Nowacki. Distortion problem in micropolar elasticity. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 21.
- [40] Jan Holnicki-Szulc. Prestress of truss and frame structures. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 105(3):1–15, 1979.
- [41] Jan Holnicki-Szulc. Distortion problems in bar structures. *Proc. Symposium of International Association for Shell and Spatial Structures on Industrialized Shell and Spatial Structures*, strony 231–243, Kielce, Poland, June 1973.
- [42] Jan Holnicki-Szulc. Theory of prestressing I and II. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1:1–21, 1973.
- [43] Jan Holnicki-Szulc. Problemy sprężania ośrodków dwufazowych. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 18(1):41–51, 1976.
- [44] Jan Holnicki-Szulc. Degradation of elastic structures – simulation by initial distortion. *Mechanics of Structures and Machines*, 15(1):1–15, 1987.
- [45] Jan Holnicki-Szulc. Optimal structural remodelling – simulation by virtual distortion. *Computations in Applied Numerical Methods*, 5(5):289–298, 1989.
- [46] Jan Holnicki-Szulc, J.T. Gierliński. Structural modifications simulated by initial distortion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(3):645–666, 1989.
- [47] Przemysław Kołakowski, Jan Holnicki-Szulc. Optimal remodelling of truss structures – simulation by virtual distortion. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4, 1997.

- [48] Przemysław Kołakowski. *Analiza wrażliwości i optymalne przeprojektowywanie konstrukcji kratowych Metodą Dystorsji Wirtualnych*. Prace IPPT PAN, 1998.
- [49] J. Holnicki-Szulc, Z. Mróz. Active control of stresses and deflections of elastic structures by means of imposed distortions. *Proc. of the 2nd Int. Symposium on Structural Control*, University of Waterloo, 1985.
- [50] J. Holnicki-Szulc. Optimal design of adaptive composites – virtual distortion method approach. *Proc. 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Germany, May 1994.
- [51] A. Maćkiewicz, J. Holnicki-Szulc, F. López-Almansa. Optimal location of actuators for active stress control. *Proc. of the 1st European Conference on Structural Control*, Barcelona, 29-31 May 1996.
- [52] J. Holnicki Szulc, R. Haftka. Vibration mode shape control by prestressing. *AIAA Journal*, 30(7), 1992.
- [53] J. Holnicki-Szulc. Damping of vibration by actively controlled initial distortions. *J. Aerospace Eng. ASCE*, 4(1), 1991.
- [54] J. Holnicki-Szulc, P. Pawłowski, M. Wikło. High performance impact absorbing materials – the concept, design tools and applications. *Smart Materials and Structures*, 12, 2003.
- [55] J. Holnicki-Szulc, M. Wikło. Adaptive multifolding microstructures. *Proc. Smart Technology Demonstrators and Devices*, Edinburgh, UK, 12-14 December 2001.
- [56] J. Holnicki-Szulc, M. Wikło. Adaptive microstructures. *Proc. VIII French-Polish Conference on Mechanics*, Warsaw University of Technology, SIMR, Warsaw, 2001.
- [57] D. Wiącek, J. Holnicki-Szulc. Damage prediction in historical buildings. *Proc. of the 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation*. Zakopane, 17-21 May 1997.
- [58] D. Wiącek, J. Holnicki-Szulc. Progressive damage analysis in historical buildings – VDM approach. *Proc. of the 5th International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, 17-20 March 1997.
- [59] D. Wiącek, J. Holnicki-Szulc. Optimal reinforcement of historical buildings (virtual distortion method approach). *Proc. of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation*, Buffalo, USA, 17-21 May 1999.
- [60] D. Wiącek. *Monitorowanie, ocena i przewidywanie rozwoju zniszczeń w budynkach historycznych*. Praca doktorska, IPPT, PAN, 2001.

- [61] Przemysław Kołakowski, Jan Holnicki-Szulc, Nagib Nasher. Identification of leakages in water networks – virtual distortion method approach. *Proc. of 5-th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Lido di Jesolo, Italy, 19-23 May 2003.
- [62] M. Kokot, J. Holnicki-Szulc. SHM concept applied to dynamical defect identification in electrical circuits. *Structural Health Monitoring - Third European Workshop*, Granada, Spain, 5-6 July 2006.
- [63] M. Kokot, J. Holnicki-Szulc. Health monitoring of electric circuits. *DAMAS 2005 6th International Conference on Damage Assessment of Structures*, Gdansk, Poland, 4-6 July 2005.
- [64] Anita Orłowska. *Delaminacja wiotkich ustrojów sprężystych, identyfikacja, sterowanie*. Praca doktorska, IPPT PAN, 2007.
- [65] M. Wikło, L. Jankowski, J. Holnicki. Impact load identification - forensic engineering. *2nd Int. Conf. on Nonsmooth Nonconvex Mechanics*, Thessaloniki, Greece, 7-8 July 2006.
- [66] Tomasz G. Zieliński. *Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych z zastosowaniem do modelowania i identyfikacji defektów w konstrukcjach*. Praca doktorska, IPPT PAN, 2004.
- [67] Klaus Jürgen Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, 1981.
- [68] R. Ciesielski, A. Gomuliński, Z. Kacprzyk, J. Kawecki, J. Langer, G. Rakowski, Z. Reipert, M. Witkowski. *Mechanika Budowli. Ujęcie komputerowe, Tom 2*. Arkady, Warszawa 1992.
- [69] Gustaw Rakowski, Zbigniew Kacprzyk. *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 1993.
- [70] Ray W. Clough, Joseph Penzien. *Dynamics of Structures*. McGRAW-HILL KOGAKUSHA, LTD, 1975.
- [71] Roman Gutowski, Walerij A. Swietlicki. *Dynamika i drgania układów mechanicznych*. PWN, 1986.
- [72] <http://www.mero-tsk.de/>.
- [73] <http://www.bksv.com/>.
- [74] <http://www.tti.co.uk/>.
- [75] <http://www.cedrat.com/>.