
Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

Praca doktorska

**Parametryzacje rotacji i algorytmy
rozwiązywania równań dynamiki z
rotacyjnymi stopniami swobody**

Piotr Sadłowski

Promotor: doc. dr hab. Krzysztof Wiśniewski

Warszawa 2007

Spis treści

1	Wstęp	4
1.1	Wprowadzenie	4
1.2	Cel pracy	5
1.3	Przegląd literatury	6
1.4	Zawartość pracy	9
1.5	Definicje i oznaczenia	12
1.6	Podstawowe własności algebraiczne	13
2	Opis i parametryzacje rotacji	15
2.1	Definicja i własności macierzy kosinusów kierunkowych i tensora rotacji	15
2.2	Wybrane parametryzacje macierzy rotacji	21
2.2.1	Reprezentacja sześcioparametrowa	21
2.2.2	Reprezentacja pięcioparametrowa	22
2.2.3	Reprezentacja czteroparametrowa. Parametry Eulera	25
2.2.4	Parametryzacja trójparametrowa kanoniczna	27
2.2.5	Parametryzacja trójparametrowa Cayleya	27
2.3	Równanie generujące rotacje i jego postaci dla poszczególnych rodzajów parametryzacji	29
2.4	Przegląd wybranych metod numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego	35
2.4.1	Przypadek równań nieliniowych	35
2.4.2	Przypadek układu równań liniowych	37
2.4.3	Ortogonalność operatorów dla przedstawionych metod	38
2.4.4	Stabilność przedstawionych metod	40
2.5	Przykłady numeryczne	46
2.5.1	Podsumowanie	58
3	Równania dynamiki dla ruchu obrotowego ciała sztywnego	59
3.1	Opis ruchu ciała sztywnego	59
3.2	Definicja pędu i momentu pędu	62
3.3	Równania ruchu obrotowego	64
3.4	Energia kinetyczna ruchu obrotowego	65

4	Algorytmy rozwiązywania równań dynamiki ciała sztywnego	67
4.1	Metody dla problemów z przemieszczeniowymi stopniami swobody . .	67
4.1.1	Rodzina metod Newmarka	67
4.1.2	Metoda ważonych residuów	72
4.2	Metody dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody	77
4.2.1	Algorytmy Newmarka dla rotacyjnych stopni swobody, A1 i A2	79
4.2.2	Algorytm zachowujący energię i moment pędu A3	84
5	Przykłady numeryczne z dynamiki ciała sztywnego	91
5.1	Niestabilna rotacja wokół osi o pośrednim momencie bezwładności . .	91
5.2	Ciężki symetryczny podparty bąk	100
5.2.1	Opis ruchu bąka symetrycznego	100
5.2.2	Wyniki obliczeń numerycznych	101
5.3	Podsumowanie	112
6	Podsumowanie	113
	Bibliografia	115
A	Wyprowadzenia, dowody, twierdzenia	119
A.1	Wyprowadzenie postaci równania generującego rotacje dla wybranych parametryzacji	119
A.1.1	Parametry Eulera	119
A.1.2	Parametryzacja Cayleya	121
A.2	Dowód dokładnego rozwiązywania równania generującego rotacje dla parametryzacji kanonicznej	124
A.3	Twierdzenie o postaci rozwiązania liniowego macierzowego równania różniczkowego o współczynnikach zmiennych w czasie	126
A.4	Operatory \mathbf{T} i \mathbf{T}^{-1}	127
A.4.1	Operator \mathbf{T}	127
A.4.2	Operator \mathbf{T}^{-1}	131
A.5	Operatory styczne dla algorytmów A1, A2 i A3	135
A.5.1	Algorytm A1	135
A.5.2	Algorytm A2	139
A.5.3	Algorytm A3	141

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

We współczesnej nauce i inżynierii w coraz większym stopniu wykorzystywane są możliwości symulowania komputerowego różnego rodzaju zjawisk fizycznych, zachowania się struktur mechanicznych i procesów technologicznych. Jest to jednak możliwe tylko w stopniu zależnym od stopnia zaawansowania oprogramowania, w tym metod obliczeniowych, oraz mocy obliczeniowej komputerów.

Możliwości zastosowań technologicznych stymulują rozwój wielu dziedzin nauki, w tym także metod komputerowych w mechanice. Rozwój ten przebiega, generalnie rzecz ujmując, w dwóch powiązanych ze sobą kierunkach:

1. rozwój algorytmów obliczeniowych, patrz np. [13], [20], [5]. Celem tego kierunku jest opracowywanie algorytmów o dobrze kontrolowanych własnościach, relatywnie dokładnych i efektywnych w istotnych klasach zastosowań.
2. rozwój metod aproksymacyjnych, takich jak np. metoda elementów skończonych, patrz np. [40], [19]. Celem tego kierunku jest rozwijanie elementów skończonych o dużej dokładności i efektywności, wolnych od pasożytniczych mechanizmów zakleszczania (ang. locking) i niewrażliwych na dystorsje kształtu.

Oba powyższe kierunki są ważne dla problemów nieliniowej mechaniki, a pierwszy kierunek obejmuje zagadnienia będące przedmiotem także niniejszej pracy.

Do opisu zachowania się ciała sztywnego oraz niektórych struktur mechanicznych, takich jak np. belki i powłoki, tradycyjnie wykorzystuje się, oprócz przemieszczeń, również rotacje. Dotyczy to nie tylko modeli numerycznych, ale także sformułowań ciągłych, wykorzystujących rozszerzoną przestrzeń konfiguracyjną zawierającą rotacje do modelowania ciał dwu- i trójwymiarowych, patrz np. [9], [10],[34] i [37]. W związku z zastosowaniem rotacji powstają dwa zasadnicze problemy:

1. Do opisu rotacji używa się macierzy ortogonalnych o wyznaczniku równym 1, tworzących grupę $SO(3)$, będącą trójwymiarową rozmaitością. Znanych jest

kilka sposobów parametryzacji grupy $SO(3)$, patrz np. [33], i ważne jest zbadanie ich przydatności do zastosowania w przyrostowych algorytmach numerycznych.

2. W układach równań dla tych zagadnień występują zarówno translacyjne (przemieszczeniowe) jak i rotacyjne zmienne (stopnie swobody). Powstaje zatem problem sposobu uogólnienia algorytmów rozwiniętych wcześniej dla translacyjnych stopni swobody na algorytmy dla rotacyjnych stopni swobody. Jest to zagadnienie nietrywialne ze względu na własności grupy $SO(3)$, oraz na konieczność podtrzymania zachowawczych własności algorytmu.

1.2 Cel pracy

Celem niniejszej pracy jest zbadanie:

1. sposobów parametryzacji grupy rotacji pod kątem ich zastosowania w algorytmach numerycznych przeznaczonych do rozwiązywania równań z rotacyjnymi stopniami swobody, oraz
2. algorytmów numerycznych jedno-krokowych przeznaczonych do rozwiązywania problemów dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody. Algorytmy będą badane dla równań ciała sztywnego, z zamiarem późniejszego zastosowania ich do bardziej skomplikowanych równań np. dla powłok, co jednak nie jest przedmiotem rozprawy.

Szczególne uwagi zostaną zwrócone na własności zachowawcze (konserwujące) algorytmów, dotyczące całkowitej energii oraz wektora momentu pędu, z poniższych powodów:

1. Zachowywanie energii całkowitej układu przez algorytm numeryczny jest związane z własnością bezwarunkowej stabilności algorytmu w sensie energetycznym, patrz [29], [14]. Bezwarunkowa stabilność to bardzo pożądana własność, umożliwiająca stosowanie dłuższych kroków czasowych podczas całkowania po czasie.
2. Własności zachowawcze są ważne ze względu na prawa zachowania dla zagadnień mechaniki. Dyssypacja algorytmiczna narusza te prawa, i zaburza rozwiązanie. Szczególnie skomplikowana jest sytuacja w zagadnieniach z dyssypacją fizyczną, np. z lepko-plastycznym zachowaniem się materiału lub z tarcieniem kontaktowym, dla których trudno jest rozróżnić efekty dyssypacji fizycznej i algorytmicznej.

Warto także wspomnieć o algorytmach z kontrolowaną dyssypacją, stosowanych głównie do modeli dyskretnych MES, a więc nie mających zastosowania w niniejszej pracy. Dla tych modeli algorytmicznie korzystna jest kontrolowana dyssypacja w obszarach wysokich częstotliwości, i wydaje się, że najlepszą strategią jest wprowadzenie jej jako modyfikacji algorytmów zachowawczych.

1.3 Przegląd literatury

Rotacje w mechanice. Rotacje są stosowane w wielu działach mechaniki, w tym:

1. w mechanice ciał odkształcalnych typu Cauchy; zastosowania rotacji omówiono np. w pracach [28] i [4]. Także w ośrodkach typu Cosserat, gdzie rotacje są niezależnymi zmiennymi, nie powiązanymi kinematycznie z przemieszczeniami.
2. w mechanice powłok; zastosowania rotacji omówiono np. w [9], [10] i [34], a kinematykę powłok z dodatkowymi parametrami rotacyjnymi w [35] i [36].
3. w algorytmach ewolucji dla równań konstytutywnych, np. w [16], gdzie przedstawiony został algorytm całkowania równań konstytutywnych obiektywny ze względu na duże przyrosty rotacji.
4. w mechanice ciała sztywnego; np. [12], [3], [38] i [31].

W niniejszej pracy ograniczamy się do mechaniki ciała sztywnego. Położenie punktu ciała sztywnego jest zdefiniowane poprzez położenie środka masy ciała i położenie punktu względem środka masy; do opisu tego drugiego wykorzystuje się tensory rotacji, patrz równanie (3.6).

Tensory rotacji tworzą grupę $SO(3)$, o własnościach zasadniczo różnych od własności wektorów przemieszczenia, i prowadzą do problemów związanych z: (1) wyborem sposobu parametryzacji grupy, i (2) algorytmicznym traktowaniem parametrów rotacyjnych.

Zastosowania algebry Liego do działań na elementach grupy rotacji $SO(3)$ opisano w pracach [1], [2], gdzie także podano obszerny przegląd wcześniejszych prac.

W [33] opisano kilka wybranych sposobów parametryzacji grupy obrotów i zastosowano je do wyprowadzenia równania generującego rotacje. Ta ostatnia praca jest bardzo ważna dla niniejszej rozprawy, ponieważ w Rozdz.2.3 weryfikowane są postaci równania generującego rotacje dla wybranych parametryzacji, a w Rozdz.2.4 i 2.5 opisane i testowane są wybrane metody numeryczne do rozwiązania tych równań.

Algorytmy dynamiki a zasady zachowania. Własności zachowania energii, pędu i momentu pędu są niezwykle istotnymi cechami algorytmów numerycznych stosowanych do rozwiązywania równań ruchu, i są przedmiotem badań w wielu dziedzinach nauki.

Jedną z nich jest dynamika punktu materialnego w polu zachowawczym, która znajduje zastosowanie w takich dziedzinach jak: (1) mechanika nieba, gdy wyznacza się trajektorie planet, satelitów i pojazdów kosmicznych, (2) kinetyka chemiczna, oraz (3) mechanika statystyczna i mechanika cieczy, wykorzystujące modelowanie za pomocą dużych systemów cząstek. W pracach [21] i [22], rozważano problem nieograniczonego odejścia rozwiązania numerycznego od dokładnego w symulacjach długotrwałych ruchów, występujący w przypadku stosowania takich metod jak: różnice skończone, metody typu predictor-corrector, metody Rungego-Kutty, i metody

bazujące na rozwinięciach Taylora. Metody te zachowują stałe ruchu, tzn. energię, pęd i moment pędu, tylko do rzędu błędu obciążenia metody, i w efekcie, w długotrwałych symulacjach, obserwuje się liniowe narastanie błędów.

W pracach [21] i [22] zaproponowano metodę, w której przyspieszenie nie jest zdefiniowane jako pochodna prędkości, lecz jest wektorem tak skonstruowanym by zachować energię i moment pędu. Warunek zachowania energii definiuje długość tego wektora, a warunek zachowania momentu pędu jego kierunek, i jest on wyznaczony przez średnią wektora położenia na początku i na końcu kroku.

W dynamice konstrukcji, do wyznaczania rozwiązań równań ruchu powszechnie stosowana jest rodzina metod Newmarka, a w szczególności jej wersja nazywana metodą średniego przyspieszenia, patrz wzory (4.6) i (4.7). Jest to metoda o dokładności drugiego rzędu, bezwarunkowo stabilna dla układów liniowych, [13], i o promieniu spektralnym równym 1 dla wszystkich częstotliwości. Warto porównać dwie algorytmiczne relacje pomiędzy prędkością \mathbf{v} i przyspieszeniem \mathbf{a} ,

$$\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n) \Delta t \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n = \mathbf{a}_n \Delta t, \quad (1.1)$$

gdzie indeksy n i $n+1$ odnoszą się do chwil czasu t_n i t_{n+1} , i $\Delta t \doteq t_{n+1} - t_n$. Pierwsza z tych relacji jest używana przez metodę średniego przyspieszenia a druga w pracach [21] i [22], przy czym \mathbf{a}_n zastępowane jest przez odpowiednio skonstruowane \mathbf{a}^* .

Metoda średniego przyspieszenia zachowuje energię całkowitą dla układów liniowych w przypadku braku obciążeń zewnętrznych, ale własność ta nie przenosi się na zagadnienia nieliniowe.

W pracy [27] pokazano, na przykładzie nieliniowej sprężyny i dla dłuższych kroków czasowych, że gdy sztywność sprężyny się zmniejsza to metoda ta jest niestabilna, natomiast gdy sztywność wzrasta to metoda ta wprowadza dodatkowe tłumienie. Badano równanie $\ddot{x} + N(x) = 0$ z $x(0) = 0$ i $\dot{x} = v_0$, dla różnych postaci $N(x)$ i różnych wartości prędkości początkowej v_0 . Warunkowa stabilność tej metody ma konsekwencje w przypadku układów z wieloma stopniami swobody; dla modów o wysokiej częstotliwości krok całkowania jest zawsze relatywnie za duży i należy spodziewać się propagacji błędu do modów o niskiej częstotliwości.

W pracy [15] zmodyfikowano metodę średniego przyspieszenia, uwzględniając warunek zachowania energii w pojedynczym kroku w postaci,

$$E_{n+1} - E_n = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^T (\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_n), \quad (1.2)$$

gdzie $E_n = E(\mathbf{d}_n, \mathbf{v}_n)$ i $E_{n+1} = E(\mathbf{d}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1})$ to energia całkowita w chwilach czasu t_n i t_{n+1} , \mathbf{d} to przemieszczenie, a \mathbf{F} to obciążenie zewnętrzne. Prawa strona tego równania odpowiada całce $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{d}}(\tau)^T \mathbf{F}(\tau) d\tau$ obliczonej w punkcie środkowym. W pracy tej skonstruowano funkcjonał dla którego równanie algorytmiczne na przemieszczenie \mathbf{d}_{n+1} jest równaniem Eulera-Lagrangea, i dołączono

warunek zachowania energii w pojedynczym kroku wykorzystując metodę mnożników Lagrange. Metoda ta wymaga wprowadzenia tylko jednego mnożnika Lagrangea, i może być efektywnie zaimplementowana nawet dla bardzo dużych układów równań. Sformułowanie to było wykorzystywane wcześniej w nieco innej postaci także w innych pracach, patrz [15].

Algorytmy dynamiki dla ciała sztywnego. Powyżej omówiony przykład konstruowania algorytmów zachowawczych dotyczył dynamiki dla układów z translacyjnymi stopniami swobody. Algorytmy przeznaczone dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody są dodatkowo trudne ze względu na konieczność: (1) odmiennego algorytmicznego traktowania parametrów rotacyjnych w tym ich aktualizacji, i (2) uwzględniania także zachowania momentu pędu. Notabene, moment pędu jest uwzględniany w algorytmach dla dynamiki punktu materialnego, ale nie w algorytmach dla dynamiki konstrukcji, takich jak np. z pracy [15].

Algorytmy dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody stanowią przedmiot zainteresowania wielu badaczy, patrz np. [32],[6], [31].

W pracy [32] opisano adaptację klasycznego algorytmu Newmarka dla rotacyjnych stopni swobody, i zastosowano go do rozwiązania równań dynamiki pręta. Algorytm ten nie posiada własności zachowywania energii całkowitej i wektora momentu pędu.

Dwa algorytmy zaproponowano w pracy [31]. Pierwszy jest modyfikacją algorytmu z pracy [32], który został zapisany dla punktu środkowego, i w efekcie posiada własność zachowywania energii całkowitej oraz normy wektora momentu pędu. Drugi algorytm jest oparty jest na metodzie ważonych residuów z pracy [39], i dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów zachowuje on wektor momentu pędu ciała. Dla pewnych wartości tych parametrów zachowuje ponadto energię kinetyczną. Jest on wówczas również bezwarunkowo stabilny i posiada dokładność drugiego rzędu. Wydaje się, że jest to najlepszy do tej pory algorytm jedno-krokowy w tej klasie zagadnień.

Na zakończenie, warto także wspomnieć o algorytmach z kontrolowaną dyssypacją, mających zastosowanie głównie do modeli dyskretnych. W przypadku stosowania schematów zachowawczych, zwiększenie gęstości siatki MES wywołuje dodatkowe oscylacje o wysokiej częstotliwości, patrz np.[7], Rys.14, które powodują problemy ze zbieżnością algorytmów dla nieliniowych równań ruchu. Problemów tych nie można uniknąć zmniejszając długość kroku, bo wtedy w rozwiązaniu pojawiają się oscylacje o jeszcze wyższej częstotliwości. Dlatego, kontrolowana dyssypacja w obszarach wysokich częstotliwości jest korzystna algorytmicznie, i wydaje się, że najlepszą strategią jest wprowadzanie jej z poziomu algorytmów zachowawczych.

1.4 Zawartość pracy

Praca składa się z sześciu rozdziałów, uwzględniając Wstęp i Uwagi końcowe, oraz jednego Dodatku składającego się z pięciu części.

Rozdział 2 przedstawia wybrane typy parametryzacji specjalnej grupy macierzy ortogonalnych $SO(3)$, służących do opisu rotacji. Opisano 5 typów parametryzacji, i podano odwzorowania definiujące macierze rotacji przy pomocy danych parametrów, oraz odwzorowania do nich odwrotne.

Następnie wprowadzono tzw. równanie generujące tensory rotacji dla zadanego tensora prędkości kątowej (skośnie-symetrycznego). Dla każdego typu parametryzacji z osobna, równanie to zostało przekształcone do postaci wyrażonej przez parametry rotacyjne. Postaci końcowe tych przekształceń zostały podane bez dowodu w pracy [33], natomiast w rozprawie podano jawne ich wyprowadzenia dla parametrów Eulera i Cayleya. Są one dość skomplikowane, i stanowią oryginalny wynik rozprawy.

Dla reprezentacji Cayleya, równanie generujące tensory rotacji przyjmuje postać równania Ricattiego. Wykorzystując twierdzenia ogólne, wyznaczono rozwiązanie analityczne tego równania dla tensora prędkości kątowej stałego w czasie. Pokazano, że rozwiązanie analityczne jest postaci odpowiadającej rozwiązaniu równania pierwotnego generującego tensory rotacji.

Równanie generujące rotacje, ze względu na swoją (względną) prostotę, bardzo dobrze nadaje się do testowania różnych typów parametryzacji $SO(3)$. Są to równania różniczkowe rzędu pierwszego, liniowe bądź nieliniowe, w zależności od typu parametryzacji. Najpierw dokonano przeglądu wybranych schematów numerycznych służących do rozwiązywania równań różniczkowych powyższych typów. Zdefiniowano metodę punktu środkowego i metody trapezoidalne, w szczególności metodę trapezów, która jest niejawna i dodatkowo stosowana jest bądź z metodą Newtona bądź z predyktorem prowadzącym do równania jawnego, co daje tzw. zmodyfikowaną metodę trapezów.

Dla równań liniowych, odpowiadających parametryzacji cztero- i sześćo-parametrowej, zbadano ortogonalność operatorów \mathbf{A} odwzorowujących wektor parametrów $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}_{n+1}$, dla metod punktu środkowego i trapezoidalnych. Następnie podjęto kwestię stabilności zastosowanych schematów, wykorzystując metodę analizy spektralnej.

Rozdział zakończono prezentacją obliczeń numerycznych dla równania generującego rotacje w postaciach zależnych od zastosowanej parametryzacji. Testowane są omówione wcześniej schematy numeryczne, a uzyskane wyniki są porównane z dokładnym rozwiązaniem analitycznym. Pozwala to oszacować błędy poszczególnych metod parametryzacji i schematów numerycznych w funkcji kroku całkowania.

Rozdział 3 zawiera opracowanie podstawowych równań dynamiki bryły sztywnej, uwzględniające ruch obrotowy w postaci odpowiedniej dla skończonych (nieograniczonych) rotacji. Dla tych właśnie równań, w dalszej części pracy budowane i testowane są algorytmy numeryczne.

Najpierw wprowadzono podstawowe pojęcia, takie jak masa, środek masy ciała i położenie punktu ciała. Zdefiniowano ruch sztywny, i podano jego postać zdekomponowaną na translację środka masy i rotację względem środka masy. Prędkość punktu ciała sztywnego wyrażono w postaci zależnej od przestrzennej i materialnej prędkości kątowej, i wprowadzono odpowiadające wektory przyspieszenia kątowego. Zdefiniowano pęd i moment pędu ciała sztywnego, oraz przestrzenny i materialny tensor bezwładności ciała, przy czym ten drugi w dwóch równoważnych postaciach.

Podano drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu postępowego i obrotowego. Wprowadzono inercjalny układ odniesienia, co pozwala ograniczyć rozważania do ruchu obrotowego względem środka masy ciała. Następnie wyprowadzono postaci równania ruchu w opisie przestrzennym i materialnym, i dołączono odpowiednie warunki początkowe. Rozdział zakończono zdefiniowaniem energii kinetycznej dla ruchu obrotowego, także dla opisu przestrzennego i materialnego.

Rozdział 4 opisuje wybrane algorytmy rozwiązywania równań dynamiki należące do rodziny metod jedno-krokowych; najpierw dla problemów z translacyjnymi stopniami swobody, a następnie ich uogólnienia dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody.

Przedstawione metody dla translacyjnych stopni swobody to: metoda Newmarka, oraz metoda ważonych residuów.

Metodę Newmarka omówiono najpierw dla układów liniowych, definiując algorytm metody, i podając zakresy parametrów β, γ , dla których jest ona bezwarunkowo i warunkowo stabilna. Metodę średniego przyspieszenia otrzymuje się dla $\beta = 1/4$ i $\gamma = 1/2$. Omówiono tzw. a-implementację metody, w ramach której najpierw obliczmy przyspieszenie, a dopiero później uaktualniamy przemieszczenie i prędkość. Następnie zdefiniowano metodę Newmarka dla równań nieliniowych. Pokazano, że a-implementacja prowadzi do nieliniowego równania ze względu na przyspieszenie; równanie to można rozwiązać stosując np. metodę Newtona. Obie wersje metody Newmarka przetestowano numerycznie na przykładzie oscylatora.

Następnie omówiono tzw. metodę ważonych residuów, w której przemieszczenia i prędkości są niezależnymi zmiennymi związanymi dodatkowym równaniem, i w której całkuje się ważne residua równania ruchu i równania wiążącego zmienne. W metodzie tej przyspieszenie jest stałe w danym przedziale czasowym, i nie występuje w rozwiązywanych równaniach, lecz można je dodatkowo wyznaczyć. Metoda ta wykorzystuje całą obciążenia dla danego przedziału czasowego, a nie obciążenie w wybranej chwili, co odfiltrowuje obciążenia wysoko-częstotliwościowe, bez negatywnych skutków dla modów o niskiej częstotliwości. Podano relację pomiędzy parametrami α, θ tej metody i parametrami β, γ metody Newmarka. Opisano implementację metody, w której układ równań rozwiązywany jest względem przemieszczenia $\mathbf{d}_{n+\theta}$,

i obliczono przykład z obciążeniem sinusoidalnym o niskiej i wysokiej częstotliwości, który potwierdził prawidłowość implementacji.

Następnie rozważano metody dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody. Rozdział rozpoczął przytaczając równania dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej w opisie materialnym, dla których konstruowane będą algorytmy numeryczne. Są to równania nie tylko zależne od czasu ale i silnie nieliniowe, i są wykorzystywane w tym rozdziale do testowania algorytmów dynamiki. Tensor rotacji parametryzowany jest za pomocą kanonicznego wektora rotacji Θ , i stosowana jest prawa reguła składania rotacji.

Najpierw rozważano dwa algorytmy będące uogólnieniem wcześniej rozważanej wersji metody Newmarka dla równań nieliniowych. W pierwszym, oznaczonym jako A1 i opisanym w [32] dla dynamiki belki, równanie ruchu zapisano w chwili $n + 1$, natomiast w drugim, zmodyfikowanym, w chwili $n + 1/2$, tzn. w punkcie środkowym. Ten drugi algorytm opisano w [31] i oznaczony jest jako A2. Podczas gdy A1 nie zachowuje ani energii kinetycznej ani kierunku i normy wektora momentu pędu, własności algorytmu A2 są dużo lepsze; energia kinetyczna i norma wektora momentu pędu są zachowywane.

Następnie rozważano algorytm będący uogólnieniem omówionej wcześniej metody ważonych residuów, oznaczony jako A3, i pochodzący z pracy [31], gdzie oznaczono go jako ALGO-C1. Ten algorytm ma najlepsze własności konserwujące, bo zachowuje wszystkie kontrolowane wielkości, tzn. energię kinetyczną oraz kierunek i normę wektora momentu pędu.

Dla wszystkich powyższych algorytmów wyprowadzono wzory na operator styczny \mathbf{K} i operator styczny \mathbf{K}_m dla zewnętrznego momentu zależącego od położenia, patrz Dodatku A.5. Z wyprowadzeniem i postaciami operatorów stycznych wiąże się szereg elementów oryginalnych rozprawy podsumowanych w Rozdz.6.

Rozdział 5 przedstawia przykłady numeryczne rozwiązane za pomocą opisanych algorytmów A1, A2 i A3 dla rotacyjnych stopni swobody.

Przeprowadzono obliczenia porównawcze dla dwóch silnie nieliniowych zagadnień: (1) dla ruchu z niestabilną rotacją wokół osi o pośrednim momencie bezwładności, i (2) dla wirującego bąka i dla momentu zewnętrznego wywołanego polem grawitacyjnym, tzn. zależącego od położenia środka masy. W obliczeniach monitorowano energię kinetyczną, unormowany wektor momentu pędu i normę momentu pędu, w celu potwierdzenia własności konserwujących badanych algorytmów. Przedstawiono także wykresy wielkości kinematycznych: wektora rotacji i prędkości kątowej, dla obu zagadnień, oraz przyspieszenia kątowego dla zagadnienia (1) i wektora położenia środka masy dla zagadnienia (2).

Wyniki tych testów potwierdzają poprawność wyprowadzonych operatorów stycznych i skomplikowanych implementacji algorytmów. Szczególną uwagę zwrócono na własności konserwujące badanych algorytmów oraz na ich związek z dokładnością wyników.

Rozdział 6 zawiera podsumowanie oryginalnych rezultatów pracy.

Dodatek A zawiera dowody twierdzeń i wyprowadzenia tych wzorów, które pominięto w głównej części pracy, w tym: (1) wyprowadzenie postaci równania generującego rotacje dla parametryzacji Eulera i Cayleya, (2) dowód dokładnego rozwiązywania równania generującego rotacje dla parametryzacji kanonicznej, (3) twierdzenie o postaci rozwiązania liniowego macierzowego równania różniczkowego o współczynnikach zmiennych w czasie, (4) wyprowadzenie operatorów \mathbf{T} i \mathbf{T}^{-1} , i (5) wyprowadzenie operatorów stycznych dla algorytmów A1, A2 i A3, dla momentu zewnętrznego niezależnego i zależnego od położenia ciała.

1.5 Definicje i oznaczenia

Na początek, wprowadzimy definicje pojęć, które pojawią się w dalszej części pracy, oraz oznaczenia jakimi się będziemy posługiwać.

Przez *układ odniesienia* w przestrzeni \mathbb{R}^3 , będziemy rozumieli parę

$$((\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), (x_1, x_2, x_3)) \quad (1.3)$$

złożoną z bazy ortonormalnej (tzn. złożonej z 3 wektorów wzajemnie ortogonalnych, o długości 1) oraz punktu przestrzeni \mathbb{R}^3 , który będziemy nazywali *środkiem układu odniesienia*. Wektory bazy będziemy nazywali *osiąmi układu*. O układzie odniesienia (1.3) mówimy, że jest *prawoskrętny* jeżeli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, oraz że jest *lewoskrętny*, jeżeli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1$.

Wektory będziemy oznaczali małymi literami, pisanymi czcionką pogrubioną np. \mathbf{x} . Macierze oraz tensory o walencji większej niż 1 będziemy oznaczali dużymi literami, pisanymi czcionką pogrubioną np. \mathbf{A} . Macierz jednostkową stopnia n będziemy oznaczali przez \mathbf{I}_n , opuszczając ewentualnie indeks dolny, gdy będzie wiadomo o jaki wymiar macierzy chodzi. Wektor lub macierz zerową będziemy oznaczali symbolem $\mathbf{0}$, przy czym to, czy jest to wektor czy macierz i jaki ma wymiar (wymiar), będzie wynikać z kontekstu w jakim ten symbol się pojawi. We wszystkich wyrażeniach i równaniach, gdzie będzie występowało mnożenie macierzy, będziemy przyjmowali, że wektory są macierzami o jednej kolumnie tzn. że są to wektory kolumnowe.

W pracy będziemy posługiwali się konwencją sumacyjną, tzn. w zapisie sumy będziemy opuszczali znak sumowania zakładając, że przebiega ono po indeksach występujących w jednomianie parami np.

$$x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Indeks sumacyjny i przebiega liczby od 1, do takiej, jaka wynika z wymiaru przestrzeni liniowej, liczby elementów danego zbioru itp.

1.6 Podstawowe własności algebraiczne

Przed przejściem do dalszej części pracy przypomnimy pewne podstawowe własności z algebry wektorów. Dowolny wektor \mathbf{x} w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej \mathbb{R}^3 , w której mamy ustaloną pewną bazę

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad (1.4)$$

możemy przedstawić w jednoznaczny sposób w postaci kombinacji liniowej wektorów tej bazy

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i. \quad (1.5)$$

Wektory o elementach, którymi są współrzędne danego wektora w ustalonej bazie, będziemy oznaczali małymi literami z podkreśleniem, np. dla wektora \mathbf{x} wektor jego współrzędnych oznaczmy $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Posługując się zapisem macierzowym, jeżeli \underline{x} oznacza wektor współrzędnych wektora \mathbf{x} w bazie (1.4), natomiast macierz \mathbf{E} złożona jest z kolumn, którymi są wektory tej bazy, $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, wówczas wzór (1.5) zapisać można krócej

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\underline{x}. \quad (1.6)$$

Iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, których współrzędne w pewnej ustalonej bazie ortonormalnej są równe $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ oraz $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, jest zdefiniowany jako działanie $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, określone następująco

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i. \quad (1.7)$$

Normą euklidesową wektora \mathbf{x} będziemy nazywali liczbę

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (1.8)$$

Jeżeli w tekście nie będzie napisane inaczej, symbol $\|\cdot\|$ będzie oznaczał normę euklidesową wektora.

Iloczyn wektorowy wektorów \mathbf{x} oraz \mathbf{y} , o wektorach współrzędnych w bazie ortonormalnej $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ równych $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3]$ i $\underline{y} = [y_1, y_2, y_3]$, jest wektorem równym

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\mathbf{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{e}_3. \quad (1.9)$$

Wprowadzimy dalej następujące oznaczenie. Jeżeli \underline{x} jest wektorem współrzędnych wektora \mathbf{x} , \tilde{x} oznacza macierz skośnie-symetryczną postaci

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Dla dowolnej macierzy skośniasymetrycznej, wektor \mathbf{x} , którego współrzędne pozwalają przedstawić tę macierz w takiej postaci jak we wzorze (1.10), nazywamy *wektorem osiowym* tej macierzy. Wzór (1.9) można zapisać teraz krócej w postaci

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{y}. \quad (1.11)$$

Jeżeli oznaczymy przez $\tilde{\mathbf{x}}$ tensor, którego macierzą współrzędnych jest \tilde{x} , wówczas wzór (1.11) można zapisać krócej

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{y}. \quad (1.12)$$

Zatem w wyniku iloczynu macierzowego $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{y}$ otrzymujemy wektor współrzędnych iloczynu wektorowego $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, w tej samej bazie, w której przedstawione są wektory \mathbf{x} oraz \mathbf{y} .

Wyprowadzimy teraz pewne zależności, które będą potrzebne w dalszej części pracy. Można pokazać, że zachodzą następujące własności iloczynu wektorowego:

$$\begin{aligned} (a) \quad & (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \\ (b) \quad & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Z powyższych własności można wyprowadzić jeszcze następującą

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c}). \quad (1.14)$$

Zapiszmy równość (1.13 b) we współrzędnych w pewnej ustalonej bazie ortonormalnej. Mamy

$$\tilde{a}\tilde{b}\mathbf{c} = \mathbf{a}^T\mathbf{c}\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{c} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T\mathbf{c} - \mathbf{a}^T\mathbf{b}\mathbf{c} = (\mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Stąd, z dowolności wektora \mathbf{c} , otrzymujemy własność

$$\tilde{a}\tilde{b} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{b}. \quad (1.15)$$

Uwzględniając dowolność przyjętej bazy, możemy powyższą równość zapisać tensorowo,

$$\tilde{a}\tilde{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{I}. \quad (1.16)$$

Podobnie, dla tożsamości (1.14)

$$(\tilde{a}\tilde{b})\mathbf{c} = \tilde{a}\tilde{b}\mathbf{c} - \tilde{b}\tilde{a}\mathbf{c}.$$

Z dowolności wektora \mathbf{c} otrzymujemy

$$(\tilde{a}\tilde{b}) = \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{b}\tilde{a}. \quad (1.17)$$

Rozdział 2

Opis i parametryzacje rotacji

Rozdział ten przedstawia wybrane typy parametryzacji specjalnej grupy macierzy ortogonalnych $SO(3)$, służących do opisu rotacji. Wyprowadzono tzw. równanie generujące rotacje, i przekształcono je do postaci wyrażonej przez parametry rotacyjne. Otrzymano równania różniczkowe rzędu pierwszego, liniowe bądź nieliniowe, w zależności od typu parametryzacji, które rozwiązywano numerycznie w celu oceny przydatności poszczególnych rodzajów parametryzacji.

2.1 Definicja i własności macierzy kosinusów kierunkowych i tensora rotacji

Rozważmy na początek dwie dowolne bazy ortonormalne w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ oraz $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Załóżmy, że obie bazy tworzą bądź układ prawo-skrętny bądź lewo-skrętny. Każdy wektor z bazy drugiej można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy pierwszej,

$$\mathbf{e}'_i = r_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Mnożąc powyższy wzór skalarnie stronami przez \mathbf{e}_k , $k = 1, 2, 3$, otrzymamy

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k = r_{ik}. \quad (2.2)$$

Macierz współczynników $\mathbf{R} = [r_{ij}]_{i,j \leq 3}$ nazywamy *macierzą kosinusów kierunkowych* bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$ względem $\{\mathbf{e}_i\}$, gdyż iloczyn skalarny $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k$ równy jest kosinusowi kąta zawartego między wektorem i -tym bazy drugiej a wektorem k -tym bazy pierwszej. Macierz \mathbf{R} nazywamy również *macierzą przejścia* z bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ do bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Kolejną własność macierzy \mathbf{R} otrzymamy mnożąc przez siebie skalarnie dwa wektory z bazy drugiej

$$\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = (r_{ik} \mathbf{e}_k) \cdot (r_{jl} \mathbf{e}_l) = r_{ik} r_{jl} \delta_{kl} = r_{ik} r_{jk}.$$

Zapisując powyższą równość w postaci macierzowej otrzymamy

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}. \quad (2.3)$$

Wiersze macierzy \mathbf{R} stanowią zatem układ ortogonalny. Wynika stąd, że

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad (2.4)$$

oraz

$$|\det \mathbf{R}| = 1. \quad (2.5)$$

Przypadek, kiedy $\det \mathbf{R} = -1$ dotyczy sytuacji, gdy jedna z baz tworzy układ prawoskrętny a druga lewoskrętny. Tym przypadkiem nie będziemy się zajmować, gdyż interesuje nas tylko sytuacja, gdy druga z baz powstaje przez obrót pierwszej.

Zauważmy, że z (2.4) wynika także, że

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (2.6)$$

a zatem kolumny macierzy \mathbf{R} również tworzą układ ortonormalny. Macierz \mathbf{R} spełniająca warunek (2.3) lub (2.6) nazywamy *macierzą ortogonalną*. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n tworzy grupę oznaczoną symbolem $O(n)$. Zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia n o wyznaczniku równym 1, tworzy podgrupę grupy $O(n)$, oznaczoną symbolem $SO(n)$.

Zatem dowolna macierz kosinusów kierunkowych, opisująca wzajemne położenie dwóch baz ortonormalnych, jest elementem grupy $SO(3)$ złożonej ze wszystkich macierzy ortogonalnych stopnia trzeciego, takich, że $\det \mathbf{R} = 1$. Jeżeli z wektorów obu baz utworzymy macierze, tak aby wektory te były ich kolumnami

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{E}' = [\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3], \quad (2.7)$$

wówczas wzór (2.1) można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{E}'^T = \mathbf{R} \mathbf{E}^T \quad \text{lub} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} \mathbf{R}^T. \quad (2.8)$$

Stąd wynika zależność,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \mathbf{R}, \quad (2.9)$$

którą można zapisać w postaci

$$\mathbf{e}_j = r_{ij} \mathbf{e}'_i. \quad (2.10)$$

Zatem, macierz przejścia z bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$ do bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ jest macierzą transponowaną (odwrotną) do macierzy przejścia z bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ do bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Wyprowadzimy teraz ważną własność macierzy kosinusów kierunkowych. Oznaczmy przez $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ i $\mathbf{x}' = [x'_1, x'_2, x'_3]$ wektory współrzędnych wektora \mathbf{x} odpowiednio w bazach \mathbf{E} i \mathbf{E}' . Mamy wówczas

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{e}'_i = x'_i r_{ij} \mathbf{e}_j,$$

a stąd, porównując współczynniki przy odpowiednich wektorach bazy \mathbf{E} , otrzymamy

$$x_j = r_{ij} x'_i, \quad (2.11)$$

czyli

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^T \mathbf{x}'. \quad (2.12)$$

Stąd, na podstawie wzoru (2.3), wynika ostatecznie

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}, \quad (2.13)$$

lub

$$x'_i = r_{ij} x_j. \quad (2.14)$$

Zatem macierz kosinusów kierunkowych jest jednocześnie macierzą transformacji współrzędnych wektora z bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ do bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$.

Zauważmy, że związki (2.11) i (2.14), na transformację współrzędnych wektora \mathbf{x} w bazach $\{\mathbf{e}_i\}$ i $\{\mathbf{e}'_i\}$, są analogiczne do związków (2.10) i (2.1) między wektorami tych baz.

W tym miejscu należy podkreślić różnicę między macierzą ortogonalną a tensorem ortogonalnym. Macierz jest jedynie tablicą dziewięciu liczb, które w przypadku macierzy ortogonalnej, są kosinusami kierunkowymi wektorów jednej bazy względem innej. Tensor natomiast jest operatorem liniowym, przekształcającym przestrzeń \mathbb{R}^n w \mathbb{R}^n . Tensor \mathbf{R} , analogicznie jak miało to miejsce w przypadku macierzy, nazywamy *ortogonalnym* jeżeli

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}. \quad (2.15)$$

Zbiór wszystkich tensorów ortogonalnych, stopnia n , tworzy grupę, którą oznaczać będziemy, analogicznie jak w przypadku macierzy, przez $O(n)$. Tensor ortogonalny posiada bardzo ważną cechę. Zachowuje on mianowicie iloczyn skalarny dwóch wektorów. Istotnie, niech $\mathbf{R} \in O(n)$ i $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Mamy wówczas

$$(\mathbf{R}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{R}\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (2.16)$$

Zauważmy, że z (2.16) wynika, że tensor ortogonalny nie zmienia długości wektora. Istotnie, niech $\mathbf{R} \in O(n)$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mamy

$$\|\mathbf{R}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{R}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{R}\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2, \quad (2.17)$$

stąd

$$\|\mathbf{R}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|. \quad (2.18)$$

Podobnie jak miało to miejsce w przypadku macierzy ortogonalnych z (2.15) wynika, że

$$|\det \mathbf{R}| = 1. \quad (2.19)$$

Przypadek, gdy $\det \mathbf{R} = -1$ odnosi się do sytuacji, gdy tensor \mathbf{R} przekształca daną bazę prawoskrętną (lewoskrętną) $\{\mathbf{e}_i\}$ na bazę lewoskrętną (prawoskrętną) $\{\mathbf{e}'_i\}$. Przypadkiem tym nie będziemy się zajmować, dlatego będziemy zakładać, podobnie jak dla macierzy kosinusów kierunkowych, że $\det \mathbf{R} = 1$ i wówczas tensor \mathbf{R} będzie przekształcać daną bazę ortogonalną zachowując jej skrętność.

Zbiór wszystkich tensorów ortogonalnych stopnia n , o wyznaczniku równym 1, tworzy podgrupę grupy $O(n)$ nazywaną *specjalną grupę tensorów ortogonalnych* i oznaczaną, analogicznie jak w przypadku macierzy, przez $SO(n)$. W dalszej części pracy, mówiąc o tensorze ortogonalnym, będziemy mieli na myśli element grupy $SO(3)$.

Interesować nas teraz będzie związek, jaki występuje między danym tensorem ortogonalnym, przekształcającym daną bazę ortonormalną $\{\mathbf{e}_i\}$ na $\{\mathbf{e}'_i\}$, a macierzą kosinusów kierunkowych bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$ względem $\{\mathbf{e}_i\}$. Niech $\mathbf{R} \in SO(3)$ przekształca bazę ortonormalną $\{\mathbf{e}_i\}$ na $\{\mathbf{e}'_i\}$, a $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{i,j \leq 3}$ niech będzie macierzą kosinusów kierunkowych bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$ względem $\{\mathbf{e}_i\}$. Niech $\mathbf{R} = [r_{ij}]$ będzie macierzą współrzędnych tensora \mathbf{R} w bazie $\{\mathbf{e}_i\}$. Mamy wówczas

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.20)$$

Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ oraz niech

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Oznaczmy przez $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ wektor współrzędnych wektora \mathbf{x} w bazie $\{\mathbf{e}_i\}$ a przez $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ i $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, y'_3)$ wektory współrzędnych wektora \mathbf{y} odpowiednio w bazach $\{\mathbf{e}_i\}$ i $\{\mathbf{e}'_i\}$. Zapisując wzór (2.21) we współrzędnych w bazie \mathbf{e}_i mamy

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

Ze wzoru (2.9) mamy

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}'. \quad (2.23)$$

Z (2.22) i (2.23) otrzymujemy

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}'. \quad (2.24)$$

Ponieważ wektor \mathbf{y} jest przekształconym przez tensor \mathbf{R} wektorem \mathbf{x} , analogicznie jak wektory bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$ są przekształconymi przez ten tensor wektorami bazy $\{\mathbf{e}_i\}$, zatem zgodnie z własnością zachowywania iloczynu skalarnego przez tensor ortogonalny, współrzędne \mathbf{y} w bazie $\{\mathbf{e}'_i\}$ są równe współrzędnym \mathbf{x} w bazie $\{\mathbf{e}_i\}$. Istotnie, dla $i = 1, 2, 3$ mamy

$$y'_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}'_i = (\mathbf{R}\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{R}\mathbf{e}_i) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_i. \quad (2.25)$$

Z powyższego i (2.24) mamy

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x}. \quad (2.26)$$

Z dowolności wektora \mathbf{x} otrzymujemy

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T. \quad (2.27)$$

Zatem macierz współrzędnych tensora ortogonalnego, przekształcającego bazę ortonormalną $\{\mathbf{e}_i\}$ na $\{\mathbf{e}'_i\}$, w bazie pierwszej równa jest macierzy transponowanej do macierzy kosinusów kierunkowych bazy $\{\mathbf{e}'_i\}$ względem $\{\mathbf{e}_i\}$.

Twierdzenie Eulera. Przedstawimy teraz twierdzenie, które będzie ważne w dalszej części pracy. Rozważmy dla tensora $\mathbf{R} \in SO(3)$ zagadnienie własne

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (2.28)$$

Z faktu, że tensor ortogonalny nie zmienia długości wektora (wzór (2.18)) i powyższej relacji wynika, że

$$\|\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|. \quad (2.29)$$

Ponieważ wektor własny jest niezerowy, stąd

$$|\lambda| = 1, \quad (2.30)$$

czyli wszystkie wartości własne tensora \mathbf{R} mają moduł równy 1. Zachodzi też własność

$$\det \mathbf{R} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad (2.31)$$

a ponieważ współczynniki wielomianu charakterystycznego tensora \mathbf{R} są rzeczywiste, zatem dwa spośród jego pierwiastków będą zespolone, wzajemnie sprzężone, a jeden rzeczywisty. Stąd, z własności (2.30), (2.31) i faktu, że $\det \mathbf{R} = 1$ wynika, że jedna z wartości własnych jest równa 1, a zatem odpowiadający jej wektor własny spełnia równanie

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}. \quad (2.32)$$

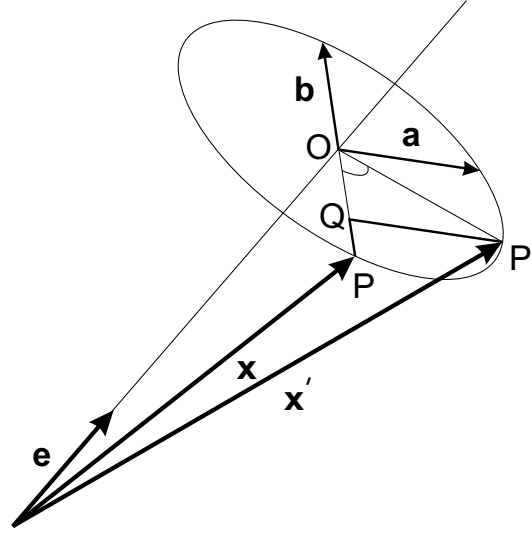
Zatem dla każdego tensora ortogonalnego $\mathbf{R} \in SO(3)$ istnieje przynajmniej jeden wektor, który jest przekształcany przez ten tensor na samego siebie. Wynika stąd następujące twierdzenie

Twierdzenie Eulera. *Dla dwóch dowolnych baz ortonormalnych $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ oraz $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ istnieje wektor, oraz kąt taki, że obracając jedną z baz wokół tego wektora o ten kąt, otrzymamy drugą z nich. Wektor ten jest równoległy do wektora własnego tensora ortogonalnego przekształcającego bazę $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ na $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, odpowiadającego wartości własnej 1.*

Ze względu na powyższe twierdzenie, tensory należące do grupy $SO(3)$ będziemy nazywali *tensorami rotacji*. Natomiast bazy $\{\mathbf{e}_i\}$ i $\{\mathbf{e}'_i\}$ będziemy nazywali odpowiednio bazą wyjściową i obróconą.

Określimy teraz odwzorowanie, które danemu wektorowi, będącemu osią obrotu oraz kątowi obrotu, przyporządkuje tensor rotacji. Zakładamy że obrót następuje zgodnie z zasadą śruby prawoskrętnej, tzn. dodatni kąt oznacza obrót w prawą stronę patrząc zgodnie ze zwrotem osi obrotu. Mamy zatem cztery parametry, które opisują ten tensor. Łatwo zauważyć, że nie jest to odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne, gdyż zmieniając kierunek osi obrotu na przeciwny oraz wartość kąta obrotu na przeciwny, otrzymamy takie samo przekształcenie.

Aby znaleźć tensor rotacji odpowiadający obrotowi układu wokół danej osi o dany kąt, sprawdzimy w jaki sposób transformuje się dowolny wektor \mathbf{x} , podczas jego obrotu. Niech wektor jednostkowy \mathbf{e} będzie osią obrotu a ϕ niech będzie kątem obrotu. Niech \mathbf{x}' będzie obróconym wektorem \mathbf{x} . Zgodnie z rys. (2.1) zachodzi wówczas związek



Rysunek 2.1: Obrót wektora \mathbf{x} dookoła osi \mathbf{e} .

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \overline{PQ} + \overline{QP}' \quad (2.33)$$

Wektory \overline{PQ} oraz \overline{QP}' można zapisać w postaci

$$\overline{PQ} = (1 - \cos \phi) \mathbf{b}, \quad \overline{QP}' = \sin \phi \mathbf{a}, \quad (2.34)$$

gdzie

$$\mathbf{a} = \mathbf{e} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{a} = \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}). \quad (2.35)$$

Stąd otrzymujemy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (1 - \cos \phi) \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) + \sin \phi \mathbf{e} \times \mathbf{x}. \quad (2.36)$$

Na podstawie wzoru (1.12) możemy powyższy wzór zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + (1 - \cos \phi) \tilde{\mathbf{e}}^2 \mathbf{x} + \sin \phi \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{x} \\ &= [\mathbf{I} + \sin \phi \tilde{\mathbf{e}} + (1 - \cos \phi) \tilde{\mathbf{e}}^2] \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie $\mathbf{S} \doteq \tilde{\mathbf{e}}$, wówczas tensor, który przekształca wektor \mathbf{x} w obrócony wektor \mathbf{x}' , wyraża się wzorem

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{S} + (1 - \cos \phi) \mathbf{S}^2. \quad (2.37)$$

Można sprawdzić, że tensor \mathbf{R} jest ortogonalny oraz ma wyznacznik równy 1.

2.2 Wybrane parametryzacje macierzy rotacji

Każda macierz $\mathbf{R} \in SO(3)$ składa się z dziewięciu wyrazów r_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, przy czym dodatkowo muszą być spełnione warunki

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \quad \text{czyli} \quad r_{ik}r_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{dla } i < j \\ 1, & \text{dla } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.38)$$

oraz

$$\det \mathbf{R} = 1. \quad (2.39)$$

Dlatego można zmniejszyć liczbę parametrów generujących elementy $SO(3)$. Przedstawimy teraz niektóre z rodzajów parametryzacji tej grupy.

2.2.1 Reprezentacja sześcioparametrowa

Można udowodnić, że każda macierz $\mathbf{R} \in SO(3)$ jest postaci

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Dowód. Oznaczmy elementy macierzy \mathbf{R} następująco

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Zakładamy, że \mathbf{R} spełnia warunki (2.38) i (2.39), tzn.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1, \quad (2.42)$$

oraz, z ortogonalności kolumn 1 i 3 oraz 2 i 3 macierzy \mathbf{R} i wzoru Sarusa na wyznacznik macierzy stopnia trzeciego,

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)x_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)x_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)x_3 = 1. \end{cases} \quad (2.43)$$

Współczynniki ostatniego równania tworzą iloczyn wektorowy wektorów $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ i $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$. Oznaczmy je jako współrzędne wektora $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$. Wówczas macierz układu (2.43) ma wyznacznik równy $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \|\mathbf{c}\|^2$ czyli 1, a zatem jest nieosobliwa. Rozwiązując układ metodą Cramera otrzymamy wyznaczniki macierzy uzupełnionych równe odpowiednio c_1 , c_2 i c_3 , a stąd rozwiązaniem układu będzie wektor \mathbf{c} , przy tym $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Stąd rozwiązaniem $\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, wraz z wektorami \mathbf{a} i \mathbf{b} , spełnia warunki (2.38), tzn. $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$ oraz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = 0$.

□

Zatem każdy element grupy $SO(3)$ może być reprezentowany przez sześcioparametrowy wektor, którego pierwsze trzy i ostatnie trzy elementy, tworzą podwektory stanowiące układ ortonormalny

Prawdziwe jest także stwierdzenie odwrotne, że każda macierz postaci (2.40), gdzie \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 są wektorami ortonormalnymi, jest macierzą ortogonalną o wyznaczniku równym 1. Istnieje zatem wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie pomiędzy grupą $SO(3)$ a zbiorem

$$L = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0, \|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| = 1 \right\}. \quad (2.44)$$

2.2.2 Reprezentacja pięcioparametrowa

Reprezentacja pięcioparametrowa, którą poniżej przedstawimy, jest ściśle związana z powyższą reprezentacją sześcioparametrową. Rozważmy, podobnie jak poprzednio, zbiór wszystkich wektorów, których elementy stanowią wyrazy dwóch pierwszych kolumn macierzy $(1/\sqrt{2})\mathbf{R}$, dla wszystkich $\mathbf{R} \in SO(3)$. Zbiór wszystkich takich wektorów oznaczmy przez M

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2], \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0, \|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| = 1 \right\}. \quad (2.45)$$

Zbiór M można opisać też w inny sposób

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \mathbf{x}^T \mathbf{J}_i \mathbf{x} = 0 \right\}, \quad (2.46)$$

gdzie

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Pierwsza z relacji $\mathbf{x}^T \mathbf{J}_i \mathbf{x} = 0$ oznacza, że obie kolumny macierzy, z której pochodzi wektor \mathbf{x} , mają jednakową długość (normę). Druga z tych relacji mówi, że kolumny te są ortogonalne. Założyliśmy przy tym, że są to kolumny macierzy $(1/\sqrt{2})\mathbf{R}$, aby otrzymany wektor \mathbf{x} miał normę równą 1, co ułatwi nam później obliczenia. Zbiór $M \subset \mathbb{R}^6$ jest we wzajemnie jednoznaczny sposób odwzorowywany w grupę $SO(3)$, a przy tym zawiera się on w sferze jednostkowej w przestrzeni \mathbb{R}^6 , $M \subset S^5$. Widzimy również, że nie zawiera on wszystkich jej punktów np: $(1, 0, 0, 0, 0, 0) \notin M$. Jeżeli wybierzemy na sferze jeden punkt $\mathbf{a} \notin M$, wówczas możemy zbiór M rzutować stereograficznie na hiperpłaszczyznę pięciowymiarową ortogonalną do \mathbf{a} i otrzymać w ten sposób wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru M – a zatem również i grupy $SO(3)$ – w przestrzeń \mathbb{R}^5 . Aby to wykonać, rozważmy układ ortonormalny wektorów

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5 \in \mathbb{R}^6, \quad (2.48)$$

ortogonalnych do wektora \mathbf{a} . Stanowi on bazę pięciowymiarowej podprzestrzeni wektorowej przestrzeni \mathbb{R}^6 , ortogonalnej do \mathbf{a} . Przestrzeń tę oznaczmy przez A . Wówczas

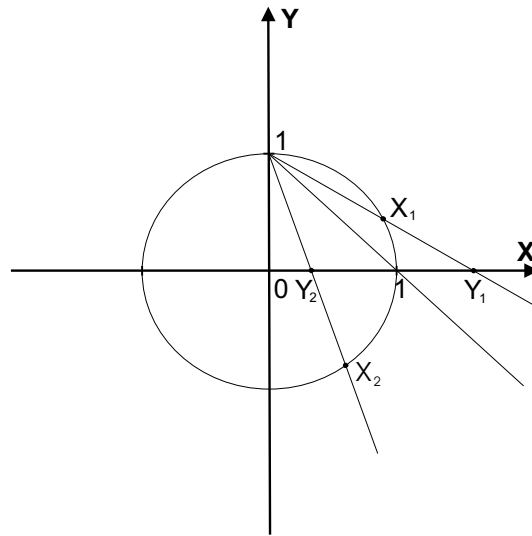
dla dowolnego wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$ jego rzut na podprzestrzeń A , który będziemy oznaczali przez $\pi(\mathbf{x})$, jest postaci

$$\pi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^5 \mathbf{v}_i^T \mathbf{x} \mathbf{v}_i. \quad (2.49)$$

Jeżeli przez \mathbf{V} oznaczymy macierz, której wierszami są wektory układu (2.48), wówczas powyższy wzór można zapisać prościej

$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{x}. \quad (2.50)$$

Rzut stereograficzny na płaszczyźnie punktów zbioru $O(0, 1) \setminus \{(0, 1)\}$, względem punktu $(0, 1)$, wygląda następująco. Jeżeli punkt $X = (x_1, x_2) \in O(0, 1) \setminus \{(0, 1)\}$, wówczas jego rzutem jest punkt $Y = (y_1, y_2) \in OX$, będący przecięciem się prostej przechodzącej przez punkty $(0, 1)$ oraz X z osią OX . Na Rys.2.2 pokazano przykłady rzutu trzech punktów: rzutem punktu X_1 jest punkt Y_1 , punktu X_2 punkt Y_2 , natomiast rzutem punktu $(1, 0)$ jest ten sam punkt. Współrzędna y_1 punktu Y ,



Rysunek 2.2: Ilustracja rzutu stereograficznego na płaszczyźnie

będącego rzutem dowolnego punktu $X \in O(0, 1) \setminus \{(0, 1)\}$, dana jest wzorem

$$y_1 = \frac{x_1}{1 - x_2}. \quad (2.51)$$

Wzór powyższy wynika ze związków podobieństwa trójkątów na płaszczyźnie i zachodzi dla wszystkich punktów $X \in O(0, 1) \setminus \{(0, 1)\}$, gdyż dla wszystkich tych punktów mamy $x_2 < 0$.

Przejdźmy teraz do rzutu stereograficznego w przestrzeni \mathbb{R}^6 . Niech $\mathbf{x} \in S^5 \setminus \{\mathbf{a}\}$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}) &= \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{x} && \text{– rzut wektora } \mathbf{x} \text{ na podprzestrzeń } A, \\ \mathbf{b} &= \pi(\mathbf{x}) / \|\pi(\mathbf{x})\| && \text{– rzut wektora } \mathbf{x} \text{ unormowany do długości } 1, \\ \tilde{x}_1 &= \|\pi(\mathbf{x})\|, \quad \tilde{x}_2 = \mathbf{a}^T \mathbf{x} && \text{– współrzędne wektora } \mathbf{x} \text{ (długości rzutów)} \\ &&& \text{w układzie wersorów } \mathbf{a} \text{ i } \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Wektory \mathbf{a} i \mathbf{b} tworzą bazę ortonormalną podprzestrzeni dwuwymiarowej, w której możemy zastosować wzór (2.51). Stąd rzut stereograficzny wektora \mathbf{x} na podprzestrzeń A jest postaci

$$\bar{\mathbf{y}} = \frac{\tilde{x}_1}{1 - \tilde{x}_2} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}{1 - \mathbf{a}^T \mathbf{x}}. \quad (2.52)$$

Wektor współrzędnych wektora $\bar{\mathbf{y}}$ w bazie $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$ jest postaci

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{V} \mathbf{x}}{1 - \mathbf{a}^T \mathbf{x}}. \quad (2.53)$$

Otrzymujemy zatem wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru $S^5 \setminus \{\mathbf{a}\}$ w przestrzeń \mathbb{R}^5 .

Zajmijmy się teraz odwzorowaniem odwrotnym, tzn. przyporządkowaniem wektorowi $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^5$ punktu w zbiorze $S^5 \setminus \{\mathbf{a}\}$. Podobnie jak poprzednio rozważmy najpierw przypadek dwuwymiarowy. Jeżeli punkt $Y = (y_1, 0)$ leży na osi OY , wówczas jego obrazem tj. przecięciem prostej przechodzącej przez punkty Y oraz $(0, 1)$ z okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu równym 1, będzie punkt $X = (x_1, x_2)$, o współrzędnych równych

$$x_1 = \frac{2y_1}{1 + y_1^2}, \quad x_2 = \frac{y_1^2 - 1}{y_1^2 + 1}. \quad (2.54)$$

Niech $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^5$ będzie wektorem, którego obrazu szukamy. Wówczas wektor $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{V}^T \mathbf{y}$ będzie odpowiadającym mu elementem w podprzestrzeni A . W przestrzeni \mathbb{R}^6 wprowadźmy bazę złożoną z dwóch ortogonalnych wersorów \mathbf{a} oraz \mathbf{b} , gdzie

$$\mathbf{b} = \frac{\bar{\mathbf{y}}}{\|\bar{\mathbf{y}}\|}. \quad (2.55)$$

Współrzędne wektora $\bar{\mathbf{y}} \in A$ w bazie \mathbf{a}, \mathbf{b} są równe

$$\tilde{y}_1 = \|\bar{\mathbf{y}}\|, \quad \tilde{y}_2 = 0. \quad (2.56)$$

Przy tym

$$\|\bar{\mathbf{y}}\| = \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}. \quad (2.57)$$

Stąd wzór na odwrotny rzut stereograficzny $\bar{\mathbf{y}}$, na podstawie (2.54) jest postaci

$$\mathbf{x} = \frac{2\tilde{y}_1}{1 + \tilde{y}_1^2} \mathbf{b} + \frac{\tilde{y}_1^2 - 1}{\tilde{y}_1^2 + 1} \mathbf{a} = \frac{2\|\bar{\mathbf{y}}\|}{1 + \mathbf{y}^T \mathbf{y}} \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{y}}{\|\bar{\mathbf{y}}\|} + \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1}{\mathbf{y}^T \mathbf{y} + 1} \mathbf{a}. \quad (2.58)$$

Skąd ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1) \mathbf{a} + 2\mathbf{V}^T \mathbf{y}}{1 + \mathbf{y}^T \mathbf{y}}. \quad (2.59)$$

Przy tym odwzorowania dane wzorami (2.53) i (2.59) są wzajemnie odwrotne. Obrazem zbioru M w przestrzeni \mathbb{R}^5 będzie zbiór

$$N = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^5 : (\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1)^2 \mathbf{a}^T \mathbf{J}_i \mathbf{a} + 4(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1) \mathbf{a}^T \mathbf{J}_i \mathbf{V}^T \mathbf{y} + 4\mathbf{y}^T \mathbf{V} \mathbf{J}_i \mathbf{V}^T \mathbf{y} = 0, i = 1, 2 \right\}. \quad (2.60)$$

2.2.3 Reprezentacja czteroparametrowa. Parametry Eulera

Jeżeli wykorzystamy następujące tożsamości trygonometryczne

$$1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}, \quad \sin \phi = 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}, \quad (2.61)$$

oraz wprowadzimy następujące oznaczenia

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \mathbf{q} = \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e}, \quad (2.62)$$

wówczas równanie (2.36) można zapisać w postaci

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + 2\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{x}) + 2q_0 \mathbf{q} \times \mathbf{x}. \quad (2.63)$$

Zauważmy, że jeżeli oznaczymy przez $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ wektor współrzędnych \mathbf{q} w dowolnej bazie, wówczas parametry q_i , $i = 0, 1, 2, 3$, spełniają równość

$$\sum_{i=0}^3 q_i^2 = 1, \quad (2.64)$$

gdyż współrzędne wektora \mathbf{e} spełniają w dowolnej bazie warunek $\sum_{i=1}^3 e_i^2 = 1$.

Korzystając ze wzoru (1.12), możemy równanie (2.46) zapisać w postaci

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + 2\tilde{\mathbf{q}}^2 \mathbf{x} + 2q_0 \tilde{\mathbf{q}} \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} + 2\tilde{\mathbf{q}}^2 + 2q_0 \tilde{\mathbf{q}} \right) \mathbf{x}. \quad (2.65)$$

Wyrażenie w nawiasach jest zatem szukanym tensorem rotacji \mathbf{R} , przekształcającym wektor \mathbf{x} w \mathbf{x}' . Przekształcimy występujący w nawiasie wzór do prostszej postaci. Posługując się własnością (1.16) i korzystając z własności (2.47) parametrów q_0 i \mathbf{q} , możemy zapisać iloczyn $\tilde{\mathbf{q}}^2$ w postaci

$$\tilde{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} - (1 - q_0^2) \mathbf{I}. \quad (2.66)$$

Podstawiając powyższy wynik do (2.65), otrzymamy następujący wzór na tensor rotacji

$$\mathbf{R} = (2q_0^2 - 1) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + q_0 \tilde{\mathbf{q}}). \quad (2.67)$$

Możemy też zapisać macierz współrzędnych \mathbf{R} w pewnej przyjętej bazie, w której $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$. Mamy,

$$\mathbf{R} = 2 \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - \frac{1}{2} & q_1 q_2 - q_0 q_3 & q_1 q_3 + q_0 q_2 \\ q_1 q_2 + q_0 q_3 & q_0^2 + q_2^2 - \frac{1}{2} & q_2 q_3 - q_0 q_1 \\ q_1 q_3 - q_0 q_2 & q_2 q_3 + q_0 q_1 & q_0^2 + q_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Parametry q_i , występujące w powyższym wzorze nazywamy *parametrami Eulera*. Spełniają one równanie (2.64) a zatem zbiór wszystkich wektorów $[q_0, q_1, q_2, q_3]$ parametryzujących grupę $SO(3)$, zawiera się w sferze jednostkowej w przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Przypuśćmy teraz, że mamy daną macierz $\mathbf{R} \in SO(3)$, i chcemy znaleźć odpowiadające jej parametry Eulera. Obliczając ślad macierzy \mathbf{R} we wzorze (2.68) mamy

$$\text{tr}\mathbf{R} = 4q_0^2 - 1. \quad (2.69)$$

Stąd możemy obliczyć

$$q_0^2 = \frac{\text{tr}\mathbf{R} + 1}{4}. \quad (2.70)$$

Z wyrazów na głównej przekątnej możemy obliczyć następnie wartości pozostałych parametrów

$$q_1^2 = \frac{r_{11} - 2q_0^2 + 1}{2}, \quad q_2^2 = \frac{r_{22} - 2q_0^2 + 1}{2}, \quad q_3^2 = \frac{r_{33} - 2q_0^2 + 1}{2}. \quad (2.71)$$

Aby znaleźć znaki parametrów q_i , $i = 0, \dots, 3$, należy użyć wyrazów spoza głównej przekątnej. Z własności (2.64) wynika, że przynajmniej jeden z parametrów Eulera jest różny od zera. Jeśli $q_0 \neq 0$, wówczas odejmując wyrazy po przeciwnych stronach głównej przekątnej otrzymamy

$$q_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{4q_0}. \quad (2.72)$$

Znak q_0 możemy przyjąć dowolny. Jeżeli zmienimy go na przeciwny, wówczas zmienią się też znaki q_1, q_2, q_3 , jednak ponieważ wszystkie wyrazy macierzy (2.68) są sumami składników stopnia drugiego, otrzymamy tę samą macierz.

Jeżeli $q_0 = 0$ wówczas któryś z parametrów q_1, q_2, q_3 musi być różny od 0. Macierz (2.68) jest wówczas symetryczna. Dodając do siebie wyrazy po przeciwnych stronach głównej przekątnej otrzymamy

$$q_1 q_2 = \frac{r_{12} + r_{21}}{4}, \quad q_1 q_3 = \frac{r_{13} + r_{31}}{4}, \quad q_2 q_3 = \frac{r_{23} + r_{32}}{4}. \quad (2.73)$$

Znak niezerowego parametru q_1, q_2 lub q_3 , obliczonego z równań (2.71), przyjmujemy dowolny i wybierając dwa z powyższych równań w których on występuje, obliczamy pozostałe dwa parametry. Znaki tych parametrów zmieniają się, jeżeli zmienimy znak niezerowego parametru na przeciwny i podobnie jak w przypadku $q_0 \neq 0$, da nam to tę samą macierz ortogonalną.

2.2.4 Parametryzacja trójparametrowa kanoniczna

Parametryzację trójparametrową uzyskujemy korzystając ze wzoru (2.37),

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \mathbf{S} + (1 - \cos \phi) \mathbf{S}^2.$$

Wprowadzamy tzw. *kanoniczny pseudowektor rotacji*, $\boldsymbol{\psi} = \phi \mathbf{e}$, gdzie \mathbf{e} jest wektorem osiowym tensora \mathbf{S} , o długości 1. Podobnie jak przy wyprowadzaniu wzoru (2.37), \mathbf{e} jest wersorem osi wokół której następuje obrót, a ϕ jest kątem obrotu. Jeżeli przez $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ oznaczymy tensor skośnie symetryczny, którego wektorem osiowym jest $\boldsymbol{\psi}$, wówczas wzór (2.37) można zapisać w postaci

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2, \quad (2.74)$$

gdzie $\phi = \|\boldsymbol{\psi}\| = \sqrt{-\frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2)}$. Grupę tensorów ortogonalnych $\text{SO}(3)$ możemy zatem reprezentować przez zbiór tensorów skośnie symetrycznych, a każdy tensor skośnie symetryczny można reprezentować w wybranej bazie, przy pomocy trzech współrzędnych jego wektora osiowego. Zatem uzyskaliśmy reprezentację specjalnej grupy tensorów ortogonalnych przy pomocy trzech liczb, bez nałożenia na nie dodatkowych ograniczeń.

Wzór (2.74) można zapisać jeszcze w inny sposób. Zauważmy, że dla każdego tensora skośnie symetrycznego $\boldsymbol{\psi}$ o wektorze osiowym $\boldsymbol{\psi}$, zachodzą zależności

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}^{2n} = (-1)^{n-1} \|\boldsymbol{\psi}\|^{2n-2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2, \quad \tilde{\boldsymbol{\psi}}^{2n+1} = (-1)^n \|\boldsymbol{\psi}\|^{2n} \tilde{\boldsymbol{\psi}}. \quad (2.75)$$

Zastępując we wzorze (2.74) $\sin \phi$ i $\cos \phi$ ich rozwinięciami w szereg Maclaurina, korzystając z powyższych relacji i porządkując odpowiednio wyrazy otrzymanego szeregu, otrzymamy wzór

$$\mathbf{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}^n}{n!} = \exp(\tilde{\boldsymbol{\psi}}). \quad (2.76)$$

Wzór (2.76) nazywamy *postacią eksponentialną* tensora rotacji \mathbf{R} .

2.2.5 Parametryzacja trójparametrowa Cayleya

Parametryzacja ta również oparta jest na wzorze (2.37), i polega na wprowadzeniu, tzw. *pół-tangensowego pseudowektora rotacji* w postaci $\boldsymbol{\psi} = \text{tg} \frac{\phi}{2} \mathbf{e}$. Jeżeli oznaczymy $t = \text{tg} \frac{\phi}{2}$, wówczas mamy

$$\sin \phi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (2.77)$$

Podobnie jak poprzednio, oznaczając przez $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ tensor skośnie symetryczny o wektorze osiowym $\boldsymbol{\psi}$, otrzymujemy ze wzorów (2.37) i (2.77) wyrażenie postaci

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{1+t^2}\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{2}{1+t^2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 = \mathbf{I} + \frac{2}{1+t^2}(\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2), \quad (2.78)$$

gdzie $t = \|\boldsymbol{\psi}\| = \sqrt{-\frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2)}$. Korzystając ze wzoru na macierz odwrotną wyprowadzonego z tw. Cayleya-Hamiltona, powyższy wzór można przekształcić do postaci,

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\psi}})(\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\psi}})^{-1}. \quad (2.79)$$

Korzystając z postaci (2.78) można wyprowadzić wzór na przekształcenie odwrotne

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{R}^T}{1 + \text{tr}\mathbf{R}}. \quad (2.80)$$

Przy pomocy parametryzacji Cayleya nie można parametryzować macierzy rotacji, dla których zachodzi $\text{tr}\mathbf{R} = -1$, tzn. gdy macierz ta reprezentuje obrót o kąt równy π . Istotnie, na podstawie wzoru, podającego wartość kąta obrotu dla danej macierzy rotacji, patrz np. [34] str. 22,

$$\phi = \arccos \frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{R} - 1), \quad (2.81)$$

wynika, że kąt obrotu ϕ jest równy π wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{tr}\mathbf{R} = -1$.

Korzystając z postaci (2.79) tensora rotacji, można wyprowadzić alternatywny wzór na przekształcenie odwrotne

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1}, \quad (2.82)$$

który można przekształcić do postaci

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{1+\alpha} [\alpha\mathbf{I} - (1+\alpha)\mathbf{R} + \mathbf{R}^2], \quad (2.83)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{tr}\mathbf{R} = \text{tr} \left[\mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_k + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^2 \right] = 1 + 2 \cos \phi, \\ \phi &= \|\boldsymbol{\psi}_k\| = -\frac{1}{2} \sqrt{\text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}_k^2)}, \end{aligned}$$

przy tym $\boldsymbol{\psi}_k$ w powyższym wzorze oznacza kanoniczny pseudowektor rotacji. Zachodzi ponadto

$$\alpha = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.84)$$

Zatem dla tensora rotacji \mathbf{R} , dla którego kanoniczny pseudowektor rotacji ma długość π (tzn. kąt obrotu dla tensora \mathbf{R} jest równy π), wzoru (2.83) nie można stosować, co jest własnością parametryzacji Cayleya, której nie można używać do reprezentacji tensorów rotacji opisujących obrót o kąt π .

Pół-tangensowe pseudowektory rotacji dobrze nadają się do składania rotacji. Iloczyn (lewe złożenie) tensorów rotacji o pseudowektorach $\boldsymbol{\psi}$ i $\boldsymbol{\theta}$, daje tensor rotacji dla pseudowektora

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\theta}} [\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\theta}], \quad (2.85)$$

tzn. $\mathbf{R}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi})$, patrz np.[34], wzór (2.54).

2.3 Równanie generujące rotacje i jego postaci dla poszczególnych rodzajów parametryzacji

Niech będzie dane odwzorowanie, które chwili czasu $t \in [0, T]$ przyporządkowuje tensor rotacji, $\mathbf{R} : [0, T] \rightarrow SO(3)$. Różniczkując warunek ortogonalności $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ względem czasu, otrzymamy równanie

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0},$$

które możemy przekształcić do postaci

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R},$$

gdzie $\boldsymbol{\Omega} \doteq \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \in so(3)$ jest (*lewym*) *przestrzennym tensorem prędkości kątowej*, patrz definicje (3.9). Jest to tzw. *równanie generujące rotacje* dla znanego tensora $\boldsymbol{\Omega}$. Tak więc, rozwiązać mamy następujące równanie różniczkowe

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{I}, \quad (2.86)$$

gdzie

$\mathbf{R}(t)$ – tensor rotacji w funkcji czasu,

$\boldsymbol{\Omega}(t)$ – tensor skośnie symetryczny o macierzy współrzędnych postaci

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wektor osiowy tensora $\boldsymbol{\Omega}$ oznaczamy $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$ i nazywamy *przestrzennym wektorem prędkości kątowej*. Wyznacza on chwilową oś wokół której zachodzi obrót.

Rozważmy dwa przypadki.

1. Jeżeli $\boldsymbol{\Omega}$ nie zależy od czasu, wówczas rozwiązanie równania (2.86) jest postaci

$$\mathbf{R}(t) = e^{\boldsymbol{\Omega}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\Omega}^k t^k}{k!} = \mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \boldsymbol{\Omega} + \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \boldsymbol{\Omega}^2, \quad (2.87)$$

gdzie $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\| = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}\boldsymbol{\Omega}^2}$. Ostatnia postać pokazuje, że tensor skośnie-symetryczny $\boldsymbol{\Omega}$ jest związany z kanoniczną parametryzacją \mathbf{R} , porównaj z (2.74).

2. Jeżeli elementy $\boldsymbol{\Omega}$ są ciągłymi funkcjami czasu, wówczas rozwiązanie równania (2.86) jest postaci

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{I}_3 + \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) d\tau + \int_0^t \boldsymbol{\Omega}(\tau) \int_0^{\tau} \boldsymbol{\Omega}(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \dots, \quad (2.88)$$

patrz dowód w dodatku A.3.

Przekształćmy teraz równanie generujące rotacje (2.86) do postaci równoważnej, uwzględniając poszczególne typy parametryzacji zdefiniowane w rozdziale 2.2, tzn. podstawiając $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(\mathbf{y}(t))$, gdzie \mathbf{y} jest wektorem parametrów, i przekształcając otrzymane równanie do postaci normalnej.

Reprezentacja sześcioparametrowa

W przypadku parametryzacji sześcioparametrowej (2.44), równanie (2.86) jest równoważne równaniu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}, \quad (2.89)$$

oraz $\mathbf{x} \in L$. Widzimy, że \mathbf{A} jest macierzą skośnie-symetryczną, tzn. $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, oraz $\det \mathbf{A} = 0$.

Reprezentacja pięcioparametrowa

Dla parametrów \mathbf{x} zdefiniowanych w (2.46), analogicznie jak dla parametryzacji sześcioparametrowej, otrzymamy równanie równoważne (2.86) w postaci (2.89). Jeżeli teraz zróżniczkujemy równanie (2.53) względem czasu, otrzymamy

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{(1 - \mathbf{a}^T \mathbf{x}) \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{a}^T \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{V} \mathbf{x}}{(1 - \mathbf{a}^T \mathbf{x})^2}. \quad (2.90)$$

Podstawiając do powyższego (2.89) i wykonując pewne przekształcenia otrzymamy

$$\dot{\mathbf{y}} = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{y}^T \mathbf{y} - 1) \mathbf{I}_5 - \mathbf{y} \mathbf{y}^T \right] \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{a} + \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \mathbf{y}. \quad (2.91)$$

Otrzymane w ten sposób równanie dla 5 parametrowego wektora \mathbf{y} , jest równoważne wyjściowemu równaniu (2.86).

Reprezentacja czteroparametrowa

Dla parametryzacji czteroparametrowej równanie (2.86) jest równoważne równaniu

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad (2.92)$$

gdzie, dla $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$, mamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3],$$

patrz [33] oraz wyprowadzenie w dodatku A.1.1. Zauważmy, że macierz \mathbf{A} jest skośnie-symetryczna, lecz $\det \mathbf{A} = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 \neq 0$.

Reprezentacja trójparametrowa kanoniczna

Dla parametryzacji kanonicznej danej wzorem (2.74), równanie (2.86) sprowadza się do postaci,

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\Omega} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\psi}} - \tilde{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\Omega}) + \left[\frac{2 - \phi \operatorname{ctg}(\phi/2)}{2\phi^2} \right] (\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 - 2\tilde{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\psi}}), \quad (2.93)$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ jest tensorem skośnie-symetrycznym, o wektorze osiowym $\boldsymbol{\psi}$ który jest kanonicznym pseudowektorem rotacji, a $\phi = \|\boldsymbol{\psi}\| = \sqrt{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2)}$, patrz [33] str.428. Wyprowadzenie powyższego wzoru jest dość skomplikowane i zostanie tu pominięte.

Reprezentacja trójparametrowa Cayleya

Dla parametryzacji Cayleya (wzór 2.78 i 2.79), równanie (2.86) sprowadza się do następującej równoważnej postaci

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \frac{1}{2} (\tilde{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\psi}} - \tilde{\boldsymbol{\psi}} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\Omega}), \quad (2.94)$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ to tensor skośnie-symetryczny, o wektorze osiowym $\boldsymbol{\psi}$ który jest pół-tangensowym pseudowektorem rotacji, patrz [33] oraz wyprowadzenie w dodatku A.1.2. Równanie (2.94) to równanie różniczkowe Ricattiego. Jego rozwiązanie analityczne, w przypadku gdy $\boldsymbol{\Omega}$ nie zależy od czasu, możemy znaleźć wykorzystując poniższe twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech dane będzie macierzowe równanie różniczkowe Ricattiego o stałych współczynnikach zapisane w postaci*

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \mathbf{A}_{12} \mathbf{X} + \mathbf{A}_{22} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{21}, \quad (2.95)$$

spełniające warunek początkowy

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad (2.96)$$

gdzie \mathbf{X} jest funkcją macierzową o wartościach w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n , $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, zmiennej rzeczywistej, $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i, j = 1, 2$, $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Rozwiązanie równania (2.95) spełniające warunek początkowy (2.96) ma postać

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y}_2 \mathbf{Y}_1^{-1}, \quad (2.97)$$

gdzie $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ są funkcjami macierzowymi o wartościach w zbiorze $\mathbb{R}^{n \times n}$, zmiennej rzeczywistej, spełniającymi liniowy układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_1 \\ \dot{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.98)$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(t_0) \\ \mathbf{Y}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{X}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Dowód podano w pracy [18], str. 365.

Zgodnie z powyższym twierdzeniem, rozwiązanie równania (2.94) jest postaci

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{Y}_2(t) \mathbf{Y}_1^{-1}(t), \quad (2.100)$$

gdzie funkcje \mathbf{Y}_1 i \mathbf{Y}_2 spełniają układ równań

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_1 \\ \dot{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & -\boldsymbol{\Omega} \\ -\boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

z warunkiem początkowym

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(t_0) \\ \mathbf{Y}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Zakładamy, $t_0 = 0$ oraz $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_0 = \mathbf{0}$. Rozwiązanie układu (2.101) z warunkiem początkowym (2.102), i przy założeniu, że $\boldsymbol{\Omega}$ jest stałą funkcją czasu, ma postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(t) \\ \mathbf{Y}_2(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.103)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & -\boldsymbol{\Omega} \\ -\boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Znajdźmy postać macierzy $e^{\mathbf{A}t}$. Posłużymy się w tym celu wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a-Sylwestera (patrz np. [18], Rozdz.5.3.2). W tym celu musimy znaleźć tzw. wielomian minimalny macierzy \mathbf{A} . Na początek znajdziemy wartości własne \mathbf{A} . Jeżeli jest to macierz postaci (2.104), gdzie $\mathbf{\Omega} \in so(3)$, wówczas można sprawdzić, że wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać

$$\det(\lambda \mathbf{I}_6 - \mathbf{A}) = \lambda^4(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega). \quad (2.105)$$

Związek między wielomianem charakterystycznym a wielomianem minimalnym dowolnej macierzy wyraża następujące twierdzenie (patrz [18], Tw.5.3).

Twierdzenie. *Jeżeli macierz kwadratowa \mathbf{A} ma wielomian charakterystyczny postaci*

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r},$$

to wielomian minimalny tej macierzy ma postać

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r},$$

przy czym $1 \leq m_i \leq n_i$ dla $i = 1, \dots, r$.

Można sprawdzić, że wielomianem zerującym macierzy \mathbf{A} najniższego stopnia, posiadającym te same pierwiastki co jej wielomian charakterystyczny, jest wielomian

$$\psi(\lambda) = \lambda(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega). \quad (2.106)$$

Na podstawie ostatniego twierdzenia, jest to zatem jej wielomian minimalny.

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a-Sylwestera, wyrażający wartość dowolnej, odpowiednio gładkiej funkcji f zmiennej rzeczywistej, od argumentu którym jest macierz \mathbf{A} , o wielomianie minimalnym postaci

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad (2.107)$$

dany jest wzorem

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^r \left[\alpha_{i1} \mathbf{I}_n + \alpha_{i2} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) + \dots + \alpha_{im_i} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)^{m_i-1} \right] \psi_i(\mathbf{A}), \quad (2.108)$$

gdzie

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{d\lambda^{j-1}} \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_i(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_i}, \quad \psi_i(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}}. \quad (2.109)$$

Dla macierzy \mathbf{A} danej wzorem (2.104), wielomiany ψ_i mają postaci:

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega), \\ \psi_2(\lambda) &= \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - i\omega} = \lambda(\lambda + i\omega), \\ \psi_3(\lambda) &= \frac{\psi(\lambda)}{\lambda + i\omega} = \lambda(\lambda - i\omega), \end{aligned}$$

współczynniki α_{ij} dane są wzorami:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_1(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_1} = \left[\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega)} \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{\omega^2}, \\ \alpha_{21} &= \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_2(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_2} = \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\lambda + i\omega)} \right]_{\lambda=i\omega} = \frac{e^{i\omega t}}{-2\omega^2}, \\ \alpha_{31} &= \left[\frac{f(\lambda)}{\psi_3(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_3} = \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\lambda - i\omega)} \right]_{\lambda=-i\omega} = \frac{e^{-i\omega t}}{-2\omega^2}.\end{aligned}$$

Ponadto $\psi_i(\mathbf{A})$ we wzorze (2.108) jest postaci (2.107), z pominiętym czynnikiem $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, z tym, że λ należy zastąpić macierzą \mathbf{A} a λ_i macierzami $\lambda_i \mathbf{I}_6$. Stąd,

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{\omega^2} (\mathbf{A} - i\omega \mathbf{I}_6) (\mathbf{A} + i\omega \mathbf{I}_6) - \frac{e^{i\omega t}}{2\omega^2} \mathbf{A} (\mathbf{A} + i\omega \mathbf{I}_6) - \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega^2} \mathbf{A} (\mathbf{A} - i\omega \mathbf{I}_6). \quad (2.110)$$

Wymnażając wyrażenia w nawiasach oraz stosując wzór $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, wyrażenia zawierające jednostkę urojoną i upraszczają się i ostatecznie otrzymujemy wzór postaci

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_6 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \mathbf{A} + \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \mathbf{A}^2. \quad (2.111)$$

Zauważając, że

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \Omega^2 \end{bmatrix},$$

oraz, uwzględniając wzór (2.87) na postać rozwiązania równania (2.86),

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_3 + \frac{\sin(\omega t)}{2\omega} \Omega + \frac{1 - \cos(\omega t)}{2\omega^2} \Omega^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{I}_3 + e^{\Omega t}), \\ -\frac{\sin(\omega t)}{2\omega} \Omega - \frac{1 - \cos(\omega t)}{2\omega^2} \Omega^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{I}_3 - e^{\Omega t}),\end{aligned}$$

możemy macierz $e^{\mathbf{A}t}$ zapisać w postaci

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 + e^{\Omega t} & \mathbf{I}_3 - e^{\Omega t} \\ \mathbf{I}_3 - e^{\Omega t} & \mathbf{I}_3 + e^{\Omega t} \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Wracając do wzoru (2.103) na postać rozwiązania równania (2.101), mamy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1(t) \\ \mathbf{Y}_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 + e^{\Omega t} \\ \mathbf{I}_3 - e^{\Omega t} \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

Zatem rozwiązanie równania (2.94), dane wzorem (2.100), ma ostatecznie postać

$$\tilde{\psi}(t) = \mathbf{Y}_2(t) \mathbf{Y}_1^{-1}(t) = (\mathbf{I}_3 - e^{\Omega t}) (\mathbf{I}_3 + e^{\Omega t})^{-1}. \quad (2.114)$$

Otrzymane rozwiązanie, na podstawie wzoru (2.82), wyraża parametry Cayleya odpowiadające rozwiązaniu (2.87) wyjściowego równania (2.86), dla Ω stałego w czasie.

2.4 Przegląd wybranych metod numerycznych rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego

W tym rozdziale przedstawione zostaną metody numeryczne użyte do rozwiązania zagadnienia (2.86). Należą one do grupy metod Rungego-Kutty rzędu drugiego, patrz [11], Rozdz.2.3. Mamy dane równanie różniczkowe zwyczajne w postaci normalnej

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (2.115)$$

gdzie $\mathbf{y} : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$, i $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$.

Najpierw przedstawimy wybrane metody numeryczne w postaci ogólnej, a następnie pokażemy ich postać w przypadku, gdy (2.115) jest równaniem liniowym. Warto zauważyć, że równanie (2.86) przekształcone do postaci równoważnej dla parametryzacji pięcio- i trójparametrowych: kanonicznej i Cyleya, jest nieliniowym wektorowym równaniem różniczkowym. Natomiast dla parametryzacji sześć- i czteroparametrowej jest liniowym wektorowym równaniem różniczkowym. W tym przypadku, dla otrzymanej postaci schematów numerycznych, będzie można sprawdzić, czy dana metoda zachowuje ortogonalność macierzy rotacji i wartość wyznacznika równą 1.

2.4.1 Przypadek równań nieliniowych

Metoda punktu środkowego. W metodzie tej równanie (2.115) zapisujemy w punkcie $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2}$. Pochodną w $t_{n+\frac{1}{2}}$ aproksymujemy za pomocą wartości funkcji w punktach t_n i t_{n+1}

$$\frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}), \quad (2.116)$$

a wartość funkcji w punkcie $\mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}}$ obliczamy stosując metodę Eulera

$$\mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n), \quad (2.117)$$

gdzie h to krok po czasie. Z (2.116) i (2.117) otrzymujemy wzór na wartość funkcji \mathbf{y} w chwili t_{n+1}

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \mathbf{f} \left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n), t_n + \frac{h}{2} \right). \quad (2.118)$$

Widzimy, że jest to metoda jawna.

Metody trapezoidalne. Jest to rodzina metod, w której równanie (2.115) zapisujemy w punkcie $t_{n+\alpha} = (1 - \alpha)t_n + \alpha t_{n+1}$, $\alpha \in [0, 1]$. Pochodną w $t_{n+\alpha}$ aproksymujemy za pomocą wartości funkcji w punktach t_n i t_{n+1}

$$\dot{\mathbf{y}}(t_{n+\alpha}) \approx \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h}.$$

Stąd, równanie (2.115) ma postać

$$\frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{h} \approx \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}). \quad (2.119)$$

Wartość funkcji \mathbf{f} w punkcie $t_{n+\alpha}$ obliczamy na podstawie jej wartości w punktach t_n i t_{n+1} w następujący sposób

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}) \approx (1 - \alpha)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1}). \quad (2.120)$$

Ze wzorów (2.119) i (2.120) otrzymujemy schemat numeryczny

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \left[(1 - \alpha)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1}) \right]. \quad (2.121)$$

Dla $\alpha = \frac{1}{2}$ otrzymujemy *metodę trapezów*

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1}) \right]. \quad (2.122)$$

Wzór (2.122) można otrzymać również w następujący sposób. Rozwijając pochodną funkcji \mathbf{y} w otoczeniu punktu t_n w szereg Taylora do wyrazu rzędu pierwszego mamy

$$\dot{\mathbf{y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{y}}_n + h\ddot{\mathbf{y}}_n + O(h^2). \quad (2.123)$$

Następnie rozwijamy wartość funkcji \mathbf{y} w otoczeniu punktu t_n do wyrazu rzędu drugiego

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\dot{\mathbf{y}}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{y}}_n + O(h^3). \quad (2.124)$$

Ze wzoru (2.123) obliczamy $\ddot{\mathbf{y}}_n$, i wstawiając do (2.124) mamy

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(2\dot{\mathbf{y}}_n + h\ddot{\mathbf{y}}_n) + O(h^3) = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\dot{\mathbf{y}}_n + \dot{\mathbf{y}}_{n+1}) + O(h^3). \quad (2.125)$$

Wykorzystując wzór (2.115) zapisany dla t_n i t_{n+1} otrzymamy postać (2.122).

We wzorach (2.121) i (2.122) występuje po prawej stronie wartość \mathbf{y}_{n+1} , są to zatem metody niejawne. W celu obliczenia \mathbf{y}_{n+1} dla danego \mathbf{y}_n , możemy postąpić na dwa sposoby:

1. Obliczyć \mathbf{y}_{n+1} stosując iteracyjną metodę Newtona. To podejście zostanie opisane i przetestowane w Rozdz.4.
2. Zastąpić \mathbf{y}_{n+1} po prawej stronie np. stosując schemat Eulera, $\mathbf{y}_{n+1} \approx \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n)$, co prowadzi do jawnego wyrażenia

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \left[(1 - \alpha)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n), t_{n+1}) \right], \quad (2.126)$$

oraz, dla $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n), t_{n+1}) \right]. \quad (2.127)$$

Metodę (2.127) nazywamy *zmodyfikowaną metodą trapezów*.

2.4.2 Przypadek układu równań liniowych

W przypadku układów liniowych równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (2.128)$$

tzn. gdy $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$, gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i nie zależy od czasu, $\mathbf{y} : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$, przedstawione metody przyjmują następujące postaci.

Metoda punktu środkowego. Ze wzoru (2.118) mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n), t_n + \frac{h}{2}\right) \\ &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{A}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{A}\mathbf{y}_n\right) = \mathbf{y}_n + h\mathbf{A}\mathbf{y}_n + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{y}_n. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Zatem otrzymujemy schemat

$$\mathbf{y}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2\right) \mathbf{y}_n. \quad (2.130)$$

Metody trapezoidalne. Ze wzoru (2.121) mamy

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\left[(1 - \alpha)\mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \alpha\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1})\right] = \mathbf{y}_n + h(1 - \alpha)\mathbf{A}\mathbf{y}_n + h\alpha\mathbf{A}\mathbf{y}_{n+1}. \quad (2.131)$$

Przenosząc ostatni człon na lewą stronę otrzymujemy układ równań na \mathbf{y}_{n+1}

$$(\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A})\mathbf{y}_{n+1} = [\mathbf{I} + h(1 - \alpha)\mathbf{A}]\mathbf{y}_n. \quad (2.132)$$

Układ powyższy ma jednoznaczne rozwiązanie gdy macierz $(\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A})$ jest nieosobliwa. Będzie tak np. w przypadku, gdy macierz \mathbf{A} jest skośnie symetryczna, stopnia trzeciego, bowiem wtedy

$$\det(\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A}) = 1 + h^2\alpha^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) > 0,$$

dla \mathbf{A} w postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wzór na \mathbf{y}_{n+1} możemy zatem zapisać następująco

$$\mathbf{y}_{n+1} = (\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A})^{-1} [\mathbf{I} + h(1 - \alpha)\mathbf{A}]\mathbf{y}_n. \quad (2.133)$$

Tak więc widzimy, że niejawne równanie (2.121), prowadzi w przypadku układu równań liniowych do schematu, który co prawda wymaga jednokrotnego odwrócenia macierzy, jednak nie wymaga iterowania.

Dla $\alpha = \frac{1}{2}$, tzn. dla metody trapezów, z równania (2.133) otrzymamy

$$\mathbf{y}_{n+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right) \mathbf{y}_n. \quad (2.134)$$

Dla jawnej postaci metod trapezoidalnych otrzymanej z użyciem wzoru Eulera (2.126) otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h [(1 - \alpha) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) + \alpha \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n), t_{n+1})] \\ &= \mathbf{y}_n + h [(1 - \alpha) \mathbf{A} \mathbf{y}_n + \alpha \mathbf{A}(\mathbf{y}_n + h \mathbf{A} \mathbf{y}_n)] = \mathbf{y}_n + h (\mathbf{A} \mathbf{y}_n + \alpha h \mathbf{A}^2 \mathbf{y}_n) \\ &= (\mathbf{I} + h \mathbf{A} + h^2 \alpha \mathbf{A}^2) \mathbf{y}_n. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Dla $\alpha = \frac{1}{2}$, tzn. dla zmodyfikowanej metody trapezów, wzór powyższy ma postać

$$\mathbf{y}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h \mathbf{A} + \frac{h^2}{2} \mathbf{A}^2 \right) \mathbf{y}_n, \quad (2.136)$$

która jest identyczna ze wzorem (2.130). Widzimy, że w przypadku układu równań liniowych, zmodyfikowana metoda trapezów daje nam taki sam schemat jak metoda punktu środkowego.

2.4.3 Ortogonalność operatorów dla przedstawionych metod

Zauważmy, że każda z powyższych metod dla liniowych układów równań daje nam schemat w postaci

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}_n, \quad (2.137)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda}$ jest pewną macierzą. W przypadku gdy zmienna \mathbf{y} jest macierzą rotacji, ważne jest aby macierz $\mathbf{\Lambda}$ była ortogonalna i miała wyznacznik równy 1, bo wówczas, jeżeli \mathbf{y}_n jest ortogonalny to również będzie \mathbf{y}_{n+1} . Podobnie jest gdy \mathbf{y} jest podmacierzą macierzy rotacji złożoną z jej dwóch pierwszych kolumn (reprezentacja sześcioparametrowa) lub gdy \mathbf{y} jest wektorem parametrów Eulera (reprezentacja czteroparametrowa).

Poniżej zbadamy czy operator $\mathbf{\Lambda}$ posiada wymienione cechy dla metody punktu środkowego i metody trapezów zastosowanych do rozwiązania: (a) wyjściowego równania rotacji (2.86), oraz (b) jego postaci równoważnych dla reprezentacji sześcioparametrowych, (2.89) i (2.92).

Metoda punktu środkowego. Macierz $\mathbf{\Lambda}$ ma w tym przypadku postać wynikającą z równania (2.130)

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I} + h \mathbf{A} + \frac{h^2}{2} \mathbf{A}^2. \quad (2.138)$$

Zakładamy przy tym, że metodę tę stosujemy do rozwiązania równania rotacji w postaci wyjściowej (2.86), lub w jednej z postaci równoważnych, tzn. (2.89) dla reprezentacji sześcioparametrowej lub (2.92) dla reprezentacji czteroparametrowej. W każdym z tych przypadków macierz równania \mathbf{A} jest macierzą skośnie symetryczną.

Badamy ortogonalność macierzy $\mathbf{\Lambda}$.

$$\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^T = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2 \right) \left(\mathbf{I} - h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2}\mathbf{A}^2 \right) = \mathbf{I} + \frac{h^4}{4}\mathbf{A}^4. \quad (2.139)$$

Jak widzimy operator $\mathbf{\Lambda}$ nie jest ortogonalny, jednak gdy krok czasowy h jest mały oraz norma $\|\mathbf{A}\|$ jest mała, to wyrażenie po prawej stronie jest w przybliżeniu macierzą jednostkową.

Obliczymy teraz wyznacznik macierzy $\mathbf{\Lambda}$ w przypadku gdy $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega} \in so(3)$ (tzn. gdy rozwiązujemy równanie wyjściowe (2.86)). Można to zrobić np. poprzez zapisanie wzoru (2.138) dla $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}$ w postaci wskaźnikowej, a następnie skorzystanie ze wzoru Sarusa na wyznacznik macierzy stopnia trzeciego. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymamy

$$\det \mathbf{\Lambda} = 1 + \frac{h^4}{4} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^2 = 1 + \frac{h^4}{4} \|\boldsymbol{\omega}\|^4. \quad (2.140)$$

Możemy zauważyć pewne podobieństwo powyższego wzoru do wzoru (2.139). Wyznacznik macierzy $\mathbf{\Lambda}$ różni się od 1 wyrazem proporcjonalnym do h^4 i $\|\boldsymbol{\omega}\|^4$ i podobnie jak w przypadku ortogonalności $\mathbf{\Lambda}$, dla małych h i $\|\boldsymbol{\omega}\|$ jest w przybliżeniu równy 1. Identyczny wzór na $\det \mathbf{\Lambda}$ otrzymujemy dla reprezentacji sześcioparametrowej i czteroparametrowej.

Metody trapezoidalne. Macierz $\mathbf{\Lambda}$ ma w tym przypadku postać wynikającą ze wzoru (2.133), tzn.

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{I} - h\alpha\mathbf{A})^{-1} [\mathbf{I} + h(1 - \alpha)\mathbf{A}]. \quad (2.141)$$

Udowodnimy teraz, że macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest ortogonalna dla $\alpha = \frac{1}{2}$. W tym celu wykorzystamy następujący lemat (patrz [16] str. 1864).

Lemat. *Jeżeli \mathbf{A} , \mathbf{B} i $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ są kwadratowymi macierzami nieosobliwymi, wówczas zachodzą równości*

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}. \quad (2.142)$$

Dla $\alpha = \frac{1}{2}$ macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest postaci

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2}\mathbf{A} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2}\mathbf{A} \right). \quad (2.143)$$

Zauważmy, że:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2} \mathbf{A} \right), \quad (2.144)$$

$$\mathbf{\Lambda}^T = \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2} \mathbf{A} \right) \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} - \frac{h}{2} \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \quad (2.145)$$

Do drugiego składnika powyższego wyrażenia stosujemy równanie (2.142), przyjmując, że $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ i $\mathbf{B} = \frac{h}{2} \mathbf{A}$. Wtedy

$$\mathbf{\Lambda}^T = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} - \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\frac{h}{2} \mathbf{A} \right) = \left(\mathbf{I} + \frac{h}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{h}{2} \mathbf{A} \right). \quad (2.146)$$

Z porównania (2.144) i (2.146) wynika, że $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^T$, zatem macierz $\mathbf{\Lambda}$ jest ortogonalna.

Dla $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega} \in so(3)$ wyznacznik operatora $\mathbf{\Lambda}$, dla dowolnego α , wyraża się wzorem

$$\det \mathbf{\Lambda} = \frac{1 + h(1 - \alpha)}{1 + h\alpha}, \quad (2.147)$$

i dla $\alpha = \frac{1}{2}$ jest on równy 1.

2.4.4 Stabilność przedstawionych metod

Opisane w tym podrozdziale metody należą do grupy metod Rungego-Kutty rzędu drugiego. W przypadku liniowych układów równań różniczkowych o współczynnikach stałych w czasie, można przeprowadzić analizę ich stabilności. W tym celu możemy posłużyć się np. metodą analizy spektralnej (patrz np. [14] Rozdz.8.2 lub [13]).

W tym celu sprowadzamy najpierw rozwiązywany przez nas układ równań do układu równań rozprzężonych, zapisanych dla poszczególnych wartości własnych macierzy układu \mathbf{A} . Jeżeli macierz \mathbf{A} jest diagonalizowalna, tzn. gdy istnieje macierz nieosobliwa \mathbf{S} taka, że

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}, \quad (2.148)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wówczas, dokonując zamiany zmiennych w postaci $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S} \mathbf{z}(t)$ i $\mathbf{y}_0 = \mathbf{S} \mathbf{z}_0$, układ równań (2.128) można zapisać następująco

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0. \quad (2.149)$$

Układ powyższy może być zapisany w postaci układu n niezależnych zagadnień początkowych

$$\dot{z}_i(t) = \lambda_i z_i(t), \quad z_i(0) = z_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.150)$$

Powyższy sposób postępowania nazywamy sprowadzeniem układu równań (2.128) do postaci dla pojedynczego stopnia swobody.

W naszym przypadku rozwiązywać będziemy układy równań liniowych (2.89) i (2.92) dla parametryzacji sześciu i czteroparametrowej. Macierze tych układów są macierzami skośnie symetrycznymi. Macierze skośnie symetryczne o współczynnikach rzeczywistych są tzw. *macierzami normalnymi*, tzn. spełniają równość:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*, \quad (2.151)$$

gdzie macierz \mathbf{A}^* nazywamy *macierzą sprzężoną względem \mathbf{A}* i jest ona zdefiniowana następująco

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T. \quad (2.152)$$

Macierz \mathbf{A} jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^*, \quad (2.153)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ oraz $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} , a \mathbf{U} jest *macierzą unitarną* tzn.

$$\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^* = \mathbf{I}. \quad (2.154)$$

Można przy tym pokazać, że kolumny \mathbf{U} są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A} odpowiadającymi wartościom własnym λ_i (patrz np. Lancaster, Tismenetsky [23] Rozdz.5.2, Tw.1). Macierze rozwiązywanych układów równań są zatem diagonalizowalne, jednak ich wartości własne, a zatem i wyrazy na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{\Lambda}$, są zespolone.

Wartości własne macierzy tych układów są postaci:

1. Dla parametryzacji sześcioparametrowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.155)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy \mathbf{A} jest w tym przypadku postaci

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_6) = \lambda^2 (\lambda^2 + \omega^2)^2, \quad (2.156)$$

gdzie $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$. Posiada on trzy podwójne pierwiastki: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = i\omega$ i $\lambda_5 = \lambda_6 = -i\omega$.

2. Dla parametryzacji czteroparametrowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.157)$$

Wielomian charakterystyczny macierzy \mathbf{A} ma w tym przypadku postać

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4) = (\lambda^2 + \omega^2)^2. \quad (2.158)$$

Posiada on dwa podwójne pierwiastki: $\lambda_1 = \lambda_2 = i\omega$ i $\lambda_3 = \lambda_4 = -i\omega$.

Następnie sprowadzimy do postaci dla pojedynczego stopnia swobody schematy numeryczne odpowiadające poszczególnym metodom. Zakładamy przy tym ogólnie, że macierz \mathbf{A} jest diagonalizowalna przy pomocy macierzy nieosobliwej \mathbf{S} .

Metoda punktu środkowego i zmodyfikowana metoda trapezów. Jak już to zostało opisane, w przypadku układów równań liniowych metoda punktu środkowego i zmodyfikowana metoda trapezów dają taki sam schemat numeryczny. Mnożąc obie strony wzoru (2.130) lewostronnie przez macierz \mathbf{S}^{-1} , mamy

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{2} \mathbf{A}^2 \right) \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}_n. \quad (2.159)$$

Zamieniając analogicznie jak poprzednio zmienne w postaci $\mathbf{y}_n = \mathbf{S} \mathbf{z}_n$, dla $n = 1, \dots, N$ mamy

$$\mathbf{z}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{\Lambda} + \frac{h^2}{2} \mathbf{\Lambda}^2 \right) \mathbf{z}_n. \quad (2.160)$$

Wzór powyższy możemy zapisać jako układ niezależnych równań postaci

$$z_{n+1(i)} = \left(1 + h\lambda_i + \frac{h^2}{2} \lambda_i^2 \right) z_{n(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.161)$$

przy czym $z_{0(i)}$ dane jest w warunku początkowym układu równań (2.150).

Metody trapezoidalne. Pomnóżmy lewostronnie przez macierz \mathbf{S}^{-1} wzór przedstawiający rodzinę metod trapezoidalnych w postaci (2.132),

$$\mathbf{S}^{-1} (\mathbf{I} - \alpha h \mathbf{A}) \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1} [\mathbf{I} + (1 - \alpha) h \mathbf{A}] \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}_n. \quad (2.162)$$

Mamy wówczas

$$(\mathbf{I} - \alpha h \mathbf{\Lambda}) \mathbf{z}_{n+1} = [\mathbf{I} + (1 - \alpha) h \mathbf{\Lambda}] \mathbf{z}_n, \quad (2.163)$$

co po zapisaniu w postaci układu niezależnych równań ma postać

$$(1 - \alpha h \lambda_i) z_{n+1(i)} = [1 + (1 - \alpha) h \lambda_i] z_{n(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.164)$$

Analiza stabilności. Rozwiązanie wyjściowego układu równań w postaci modalnej, zapisanego dla poszczególnych wartości własnych (2.150), w chwili t_{n+1} , dla warunku początkowego zadanego w chwili t_n , dane jest wzorem

$$z_i(t_{n+1}) = e^{\lambda_i(t_{n+1}-t_n)} z_i(t_n). \quad (2.165)$$

W przypadku rozwiązywanych przez nas układów równań liniowych (2.89) i (2.92), macierze tych układów będą miały wartości własne mające jedną z trzech postaci: 0 lub $\pm i\omega$. Rozwiązanie (2.165) będzie miało wówczas postać

$$\begin{cases} z(t_{n+1}) = z(t_n), & \text{gdy } \lambda = 0, \\ z(t_{n+1}) = e^{\pm i\omega(t_{n+1}-t_n)} z(t_n), & \text{gdy } \lambda = \pm i\omega. \end{cases} \quad (2.166)$$

W drugim przypadku rozwiązanie to możemy zapisać w postaci

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) [\cos(\omega(t_{n+1} - t_n)) \pm i \sin(\omega(t_{n+1} - t_n))]. \quad (2.167)$$

Zatem dla $\lambda = \pm i\omega$ rozwiązanie musi posiadać następującą cechę

$$|\Re(z(t_{n+1}))| \leq |z(t_n)|, \quad |\Im(z(t_{n+1}))| \leq |z(t_n)|. \quad (2.168)$$

Dwa powyższe warunki możemy zastąpić silniejszym warunkiem postaci

$$|z(t_{n+1})| \leq |z(t_n)|. \quad (2.169)$$

Zatem ostatecznie rozwiązanie (2.165), dla wartości własnych o podanej postaci, musi spełniać warunki

$$\begin{cases} z(t_{n+1}) = z(t_n), & \text{gdy } \lambda = 0, \\ |z(t_{n+1})| \leq |z(t_n)|, & \text{gdy } \lambda = \pm i\omega. \end{cases} \quad (2.170)$$

Będziemy teraz wymagać, żeby analogiczne warunki spełnione były w przypadku stosowanych przez nas schematów numerycznych (2.161) i (2.164). Będziemy zatem wymagali aby

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n, & \text{gdy } \lambda = 0, \\ |z_{n+1}| \leq |z_n|, & \text{gdy } \lambda = \pm i\omega. \end{cases} \quad (2.171)$$

Powyższe wymagania określają warunki stabilności dla stosowanych przez nas metod.

Określimy teraz jakie ograniczenia długości kroku h , dla różnych wartości parametru α , wynikają z powyższych warunków w przypadku poszczególnych metod numerycznych.

1. Metoda punktu środkowego i zmodyfikowana metoda trapezów.

Schemat numeryczny (2.161) można zapisać w postaci

$$z_{n+1} = Az_n, \quad (2.172)$$

gdzie $A = 1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2$ nazywamy *współczynnikiem wzmocnienia*. Jak widzimy, dla $\lambda = 0$ pierwszy warunek stabilności (2.171) jest spełniony przez powyższy schemat. Gdy $\lambda = \pm i\omega$, aby spełniony był drugi, musi zachodzić

$$|A| \leq 1, \quad (2.173)$$

czyli

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2 \right| \leq 1. \quad (2.174)$$

Podstawiając w powyższej nierówności $\lambda = i\omega$ (przyjmujemy w tym przypadku, że $\omega \neq 0$) i wprowadzając pomocniczą zmienną $z \doteq \omega h$ mamy

$$\left| 1 + iz - \frac{z^2}{2} \right|^2 = 1 + \frac{z^4}{4}. \quad (2.175)$$

Stąd, nierówność (2.174) będzie równoważna nierówności

$$z^4 \leq 0. \quad (2.176)$$

Zgodnie z definicją $z \neq 0$, zatem powyższa nierówność jest sprzeczna dla dopuszczalnych wartości z . Zatem dla metody punktu środkowego warunek stabilności (2.171) nie jest spełniony dla żadnej wartości kroku czasowego h . Dla macierzy układu \mathbf{A} o wartościach własnych czysto urojonych, metoda ta zatem będzie zawsze niestabilna.

2. Metody trapezoidalne.

Dla przyjętych w naszym przypadku dopuszczalnych wartości własnych, schemat (2.164) można zapisać w postaci

$$z_{n+1} = \frac{1 + (1 - \alpha)h\lambda}{1 - \alpha h\lambda} z_n. \quad (2.177)$$

Dla $\lambda = 0$ pierwszy z warunków stabilności (2.171) jest spełniony. Dla $\lambda = \pm i\omega$, żeby zapewnić spełnienie drugiego, współczynnik wzmocnienia w powyższym schemacie musi spełniać warunek

$$\left| \frac{1 + (1 - \alpha)h\lambda}{1 - \alpha h\lambda} \right| \leq 1. \quad (2.178)$$

Zastępując $\lambda = i\omega$, przy założeniu, że $\omega \neq 0$, wprowadzając zmienną pomocniczą $z = \omega h$ i stosując wzór na odwrotność liczby zespolonej mamy

$$\left| \frac{(1 + i(1 - \alpha)z)(1 + i\alpha z)}{1 + \alpha^2 z^2} \right| \leq 1. \quad (2.179)$$

Podnosząc powyższą nierówność stronami do kwadratu mamy

$$|1 - \alpha(1 - \alpha)z^2 + iz|^2 \leq (1 + \alpha^2 z^2)^2. \quad (2.180)$$

Stąd, korzystając ze wzoru na moduł liczby zespolonej, otrzymamy nierówność

$$(1 - 2\alpha)(1 + \alpha^2 z^2) z^2 \leq 0. \quad (2.181)$$

Ponieważ $z \neq 0$, dlatego $(1 + \alpha^2 z^2) z^2 > 0$, i wystarczy zbadać nierówność $(1 - 2\alpha) \leq 0$. Mamy następujące dwa przypadki:

- (a) $\alpha < \frac{1}{2}$; wtedy nierówność (2.181) jest sprzeczna dla dopuszczalnych wartości z .
- (b) $\alpha \geq \frac{1}{2}$; wtedy nierówność (2.181) jest spełniona dla wszystkich dopuszczalnych wartości z .

Otrzymujemy zatem następujące przypadki, gdy wartości własne macierzy układu są czysto urojone:

- $\alpha \in [0; \frac{1}{2})$ – rodzina metod trapezoidalnych jest niestabilna dla dowolnej wartości kroku h .
- $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$ – rodzina metod trapezoidalnych jest bezwarunkowo stabilna.

2.5 Przykłady numeryczne

W celu zbadania przydatności poszczególnych rodzajów parametryzacji, rozwiązano numerycznie równanie generujące rotacje (2.86) w postaci charakterystycznej dla każdej z opisanych parametryzacji.

Do przeprowadzenia obliczeń napisano program w języku Fortran 90, przy użyciu zmiennych o podwójnej precyzji.

Do rozwiązania użyto opisane w Rozdz.2.4 metody jawne: punktu środkowego i zmodyfikowaną metodę trapezów. W przypadku gdy równanie w postaci równoważnej było równaniem liniowym, tzn. dla parametryzacji sześć- i czteroparametrowej, użyto metody trapezów, stosując wzór (2.134).

Równanie rozwiązano w przedziale czasu $[0, 10]$ dla dwóch przypadków:

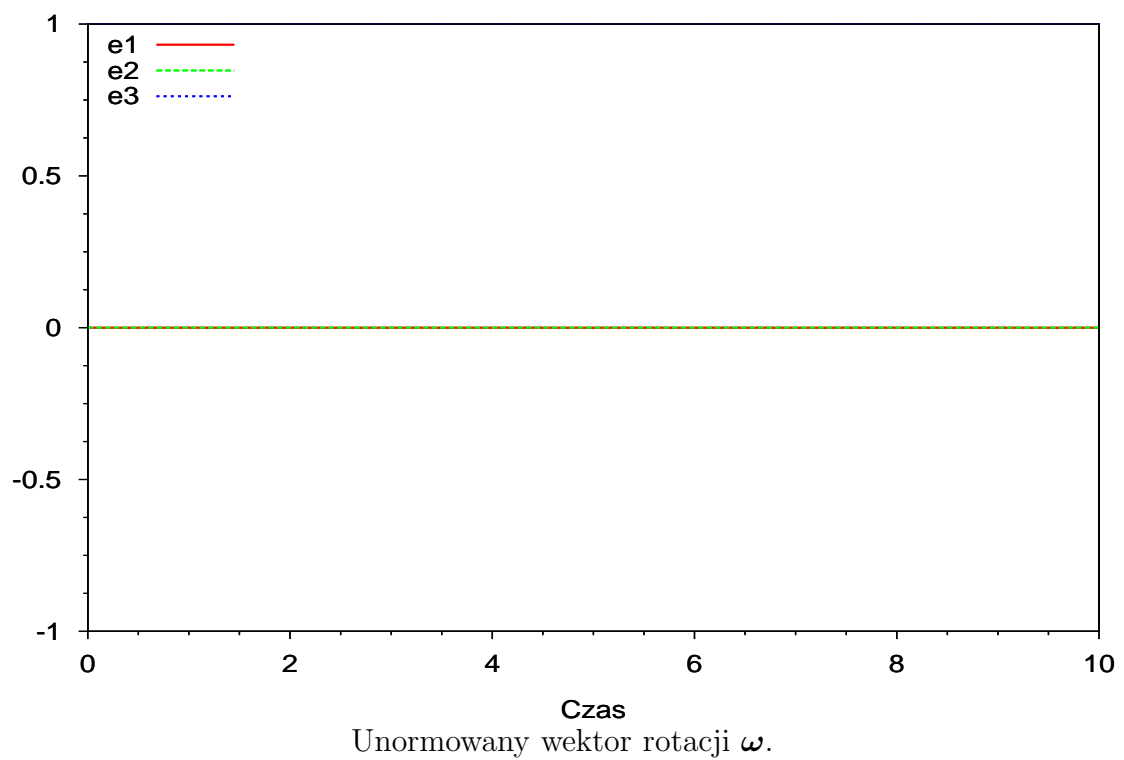
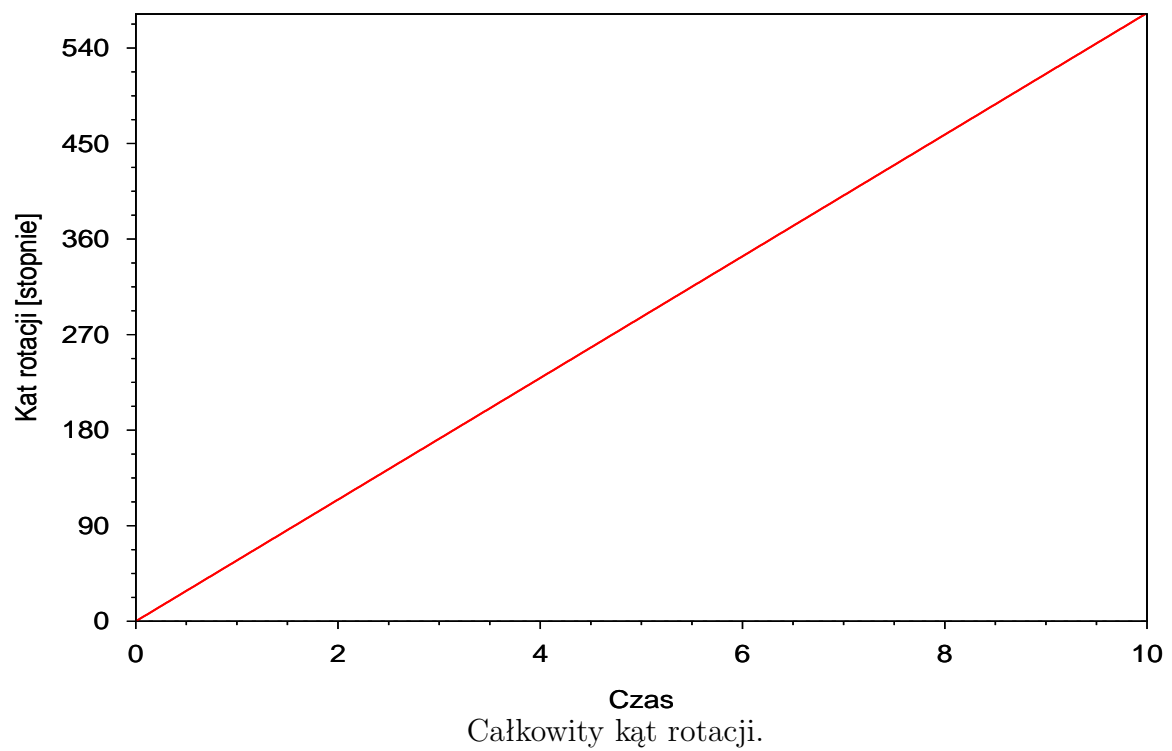
1. Stałego w czasie wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. W tym przypadku wektor $\boldsymbol{\omega}$ miał współrzędne $(0, 0, 1)$. Wykresy $\|\boldsymbol{\omega}\|$ i $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ dla $\boldsymbol{\omega}$ stałego w czasie pokazano na Rys.2.3,
2. Zmiennego w czasie wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Przyjęto, że wektor ten ma początkowo współrzędne $(0, 0, 1)$, a następnie obraca się w ciągu całego czasu obliczeń, tzn. od chwili $t = 0$ do chwili $t = 10$, ze stałą prędkością kątową wokół wektora $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, o kąt 90 i 270 stopni. Wykresy $\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ dla $\boldsymbol{\omega}$ wykonującego obrót o 90, 180, 270, 360 stopni pokazano na Rys.2.4 i 2.5.

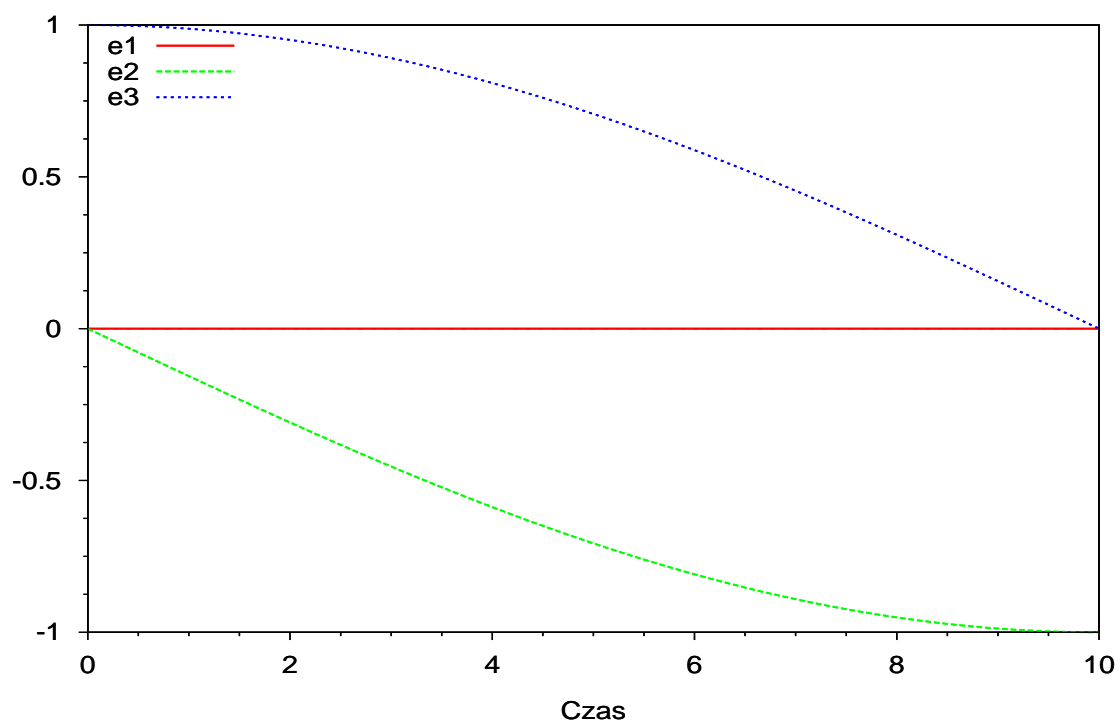
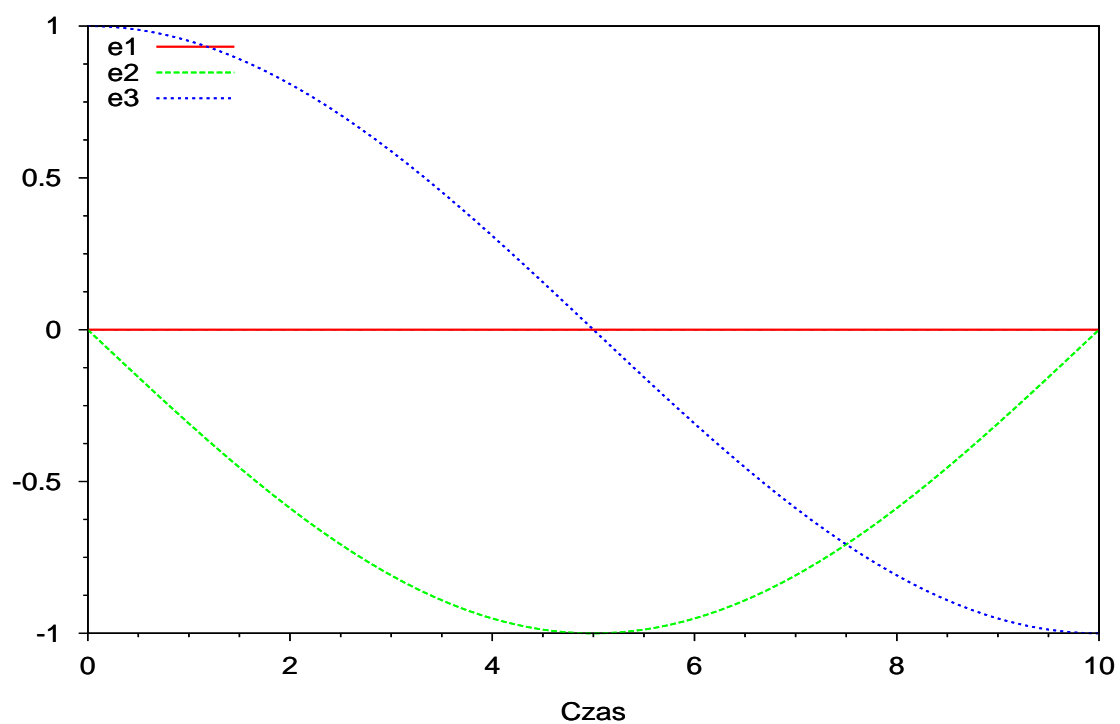
W każdym z tych przypadków całkowity kąt obrotu ciała wynosił około 572 stopnie.

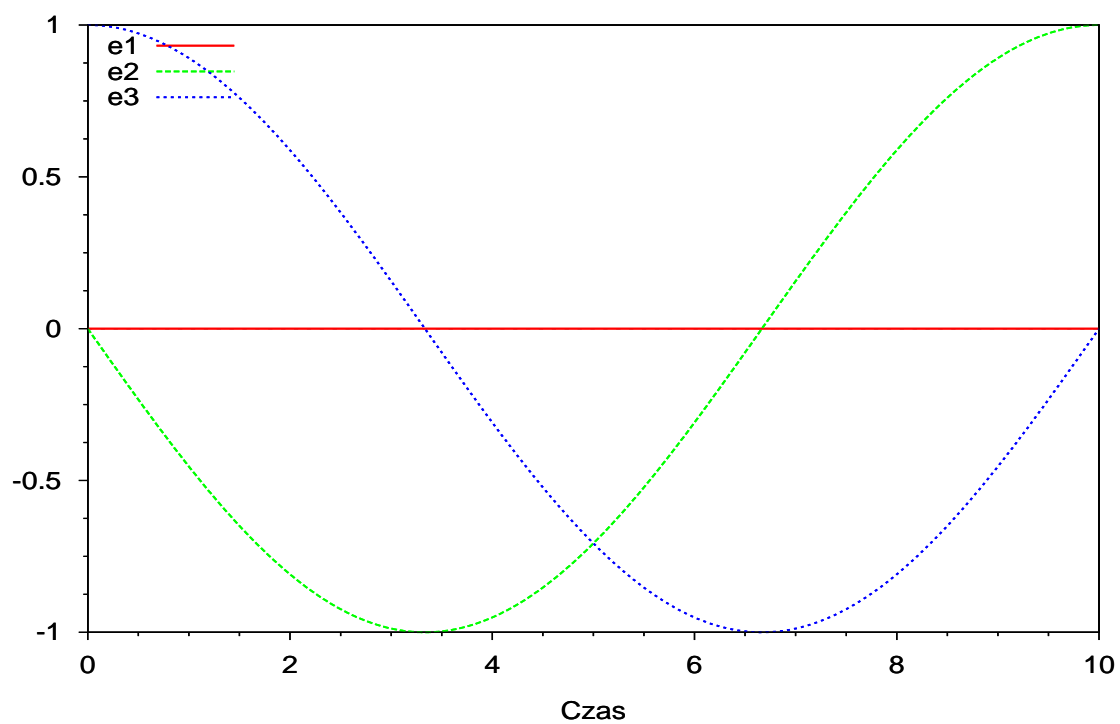
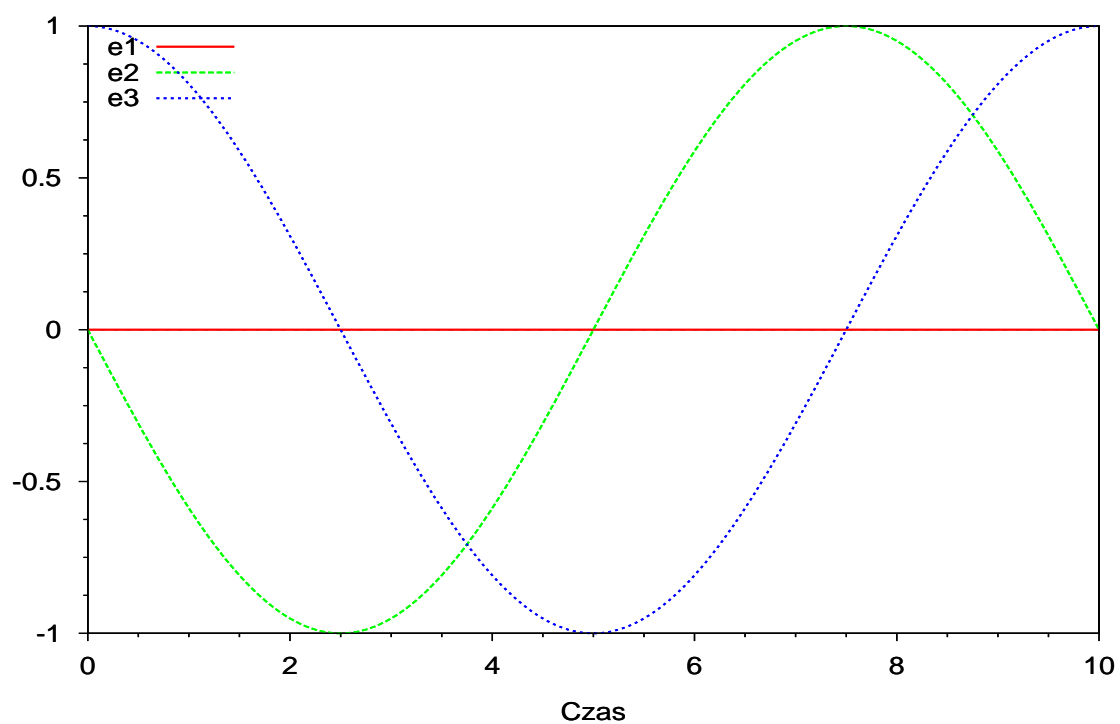
Ponieważ parametryzacja Cayleya nie pozwala na reprezentację rotacji o kącie obrotu równym π , obliczenia przeprowadzono dwukrotnie. Za pierwszym razem, dla wszystkich typów parametryzacji, jednak dla całkowitego kąta obrotu nie przekraczającego π , i drugi raz, bez ograniczeń na całkowitą wartość kąta obrotu, w całym przedziale czasu $[0, 10]$, jednak wtedy bez parametryzacji Cayleya.

Równanie rozwiązano dla każdej parametryzacji i użytej metody z różnymi przyrostami czasowymi od $\Delta t = 0.01$ do $\Delta t = 1$ (szczegóły na wykresach poniżej). W każdym przypadku uzyskane rozwiązanie porównano z rozwiązaniem dokładnym:

1. dla $\boldsymbol{\omega}$ stałego w czasie porównano z rozwiązaniem danym wzorem (2.87),
2. dla $\boldsymbol{\omega}$ zmiennego w czasie porównano z rozwiązaniem (2.88). Wartość szeregu w rozwiązaniu (2.88) obliczono znajdując jego pierwszych 40 wyrazów. Całki obliczano przy pomocy metody interpolacji wielomianami stopnia drugiego, z krokiem podziału wynoszącym 0.005.

Rysunek 2.3: Wykresy dla wektora rotacji ω stałego w czasie.

Wektor rotacji ω wykonujący obrót o 90 stopni.Wektor rotacji ω wykonujący obrót o 180 stopni.Rysunek 2.4: Unormowany wektor rotacji ω , zmienny w czasie.

Wektor rotacji ω wykonujący obrót o 270 stopni.Wektor rotacji ω wykonujący obrót o 360 stopni.Rysunek 2.5: Unormowany wektor rotacji ω , zmienny w czasie.

Dla macierzy rotacji obliczanej numerycznie znajdowano w każdym kroku: wartość jej wyznacznika, iloczyn skalarny dwóch pierwszych kolumn, który przyjęto za miarę ortogonalności macierzy, oraz wartość kąta rotacji ze wzoru

$$\phi = \arccos \frac{1}{2}(\text{tr} \mathbf{R} - 1). \quad (2.182)$$

Dla tych samych chwil czasowych znajdowano rozwiązanie dokładne i również obliczano dla niego wartość kąta rotacji. Zauważmy, że kąt rotacji otrzymany ze wzoru (2.182) zawiera się w przedziale $[0, \pi]$. Dlatego całkowity kąt obrotu znajdowano w następujący sposób: zapamiętywano obliczoną numerycznie i dokładnie macierz rotacji z poprzedniej chwili czasu, następnie obliczano przyrost macierzy rotacji z kroku n do $n + 1$ ze wzoru

$$\Delta \mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{R}_n^T. \quad (2.183)$$

Dla tak obliczonej macierzy znajdowano kąt rotacji a następnie dodawano tę wielkość do wartości kąta z chwili czasu t_n , otrzymując całkowity kąt obrotu od chwili 0 do t_{n+1} .

Porównując kąt obrotu odpowiadający rozwiązaniu numerycznemu i dokładnemu obliczono następujące błędy:

1. Maksymalny błąd względny – największy błąd względny brany ze wszystkich kroków czasowych

$$\varepsilon_{maks} = \max \left\{ \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i}, \quad i = 0, \dots, n \right\}, \quad (2.184)$$

gdzie ε_i to wartość błędu w i -tym kroku czasowym, równy różnicy między kątem rotacji odpowiadającym rozwiązaniu numerycznemu i dokładnemu, α_i to kąt rotacji odpowiadający rozwiązaniu dokładnemu w i -tym kroku czasowym, a n to liczba wszystkich kroków czasowych.

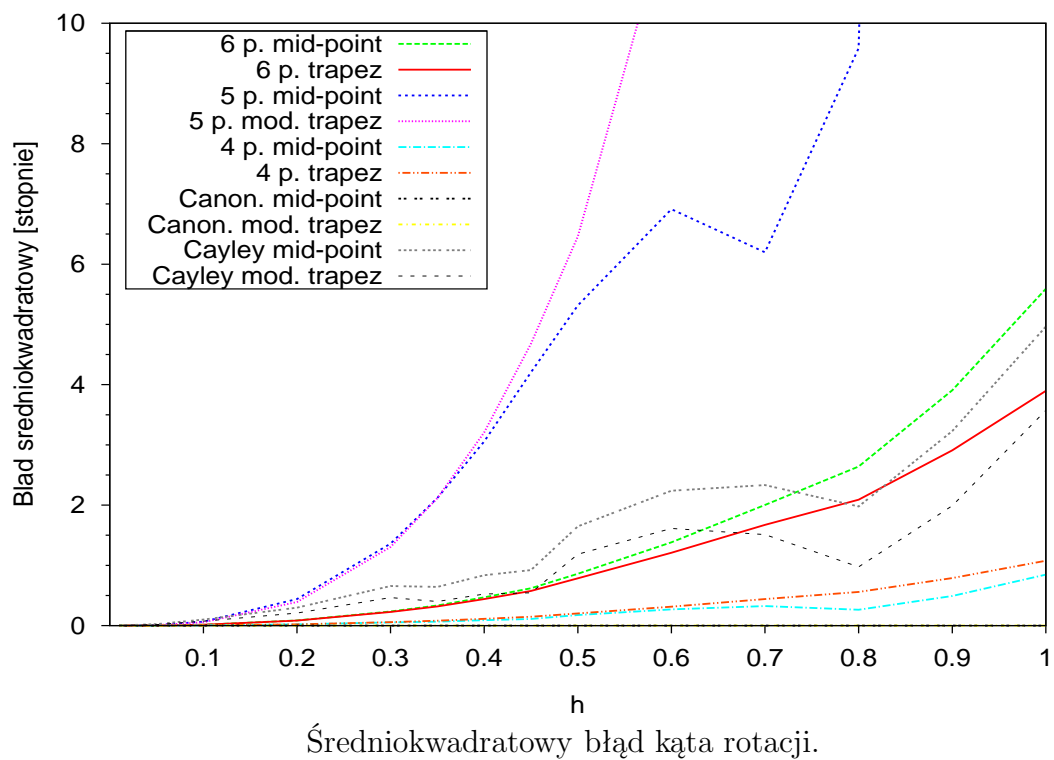
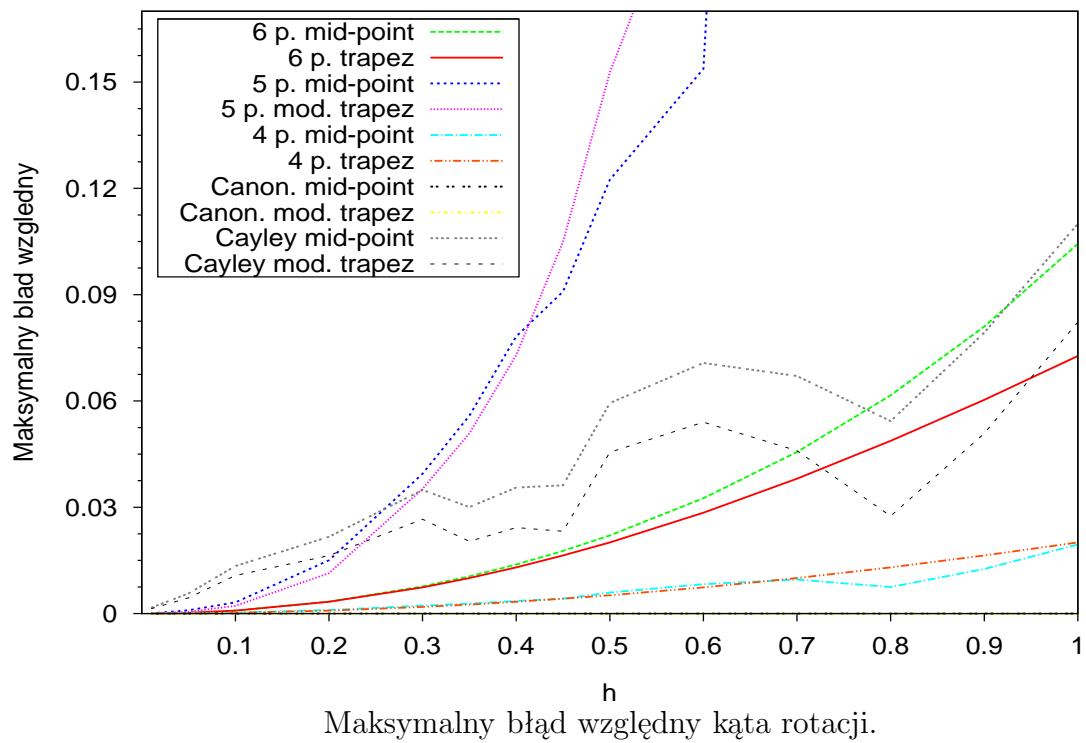
2. Błąd średnio-kwadratowy

$$\varepsilon_{srKw} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2}. \quad (2.185)$$

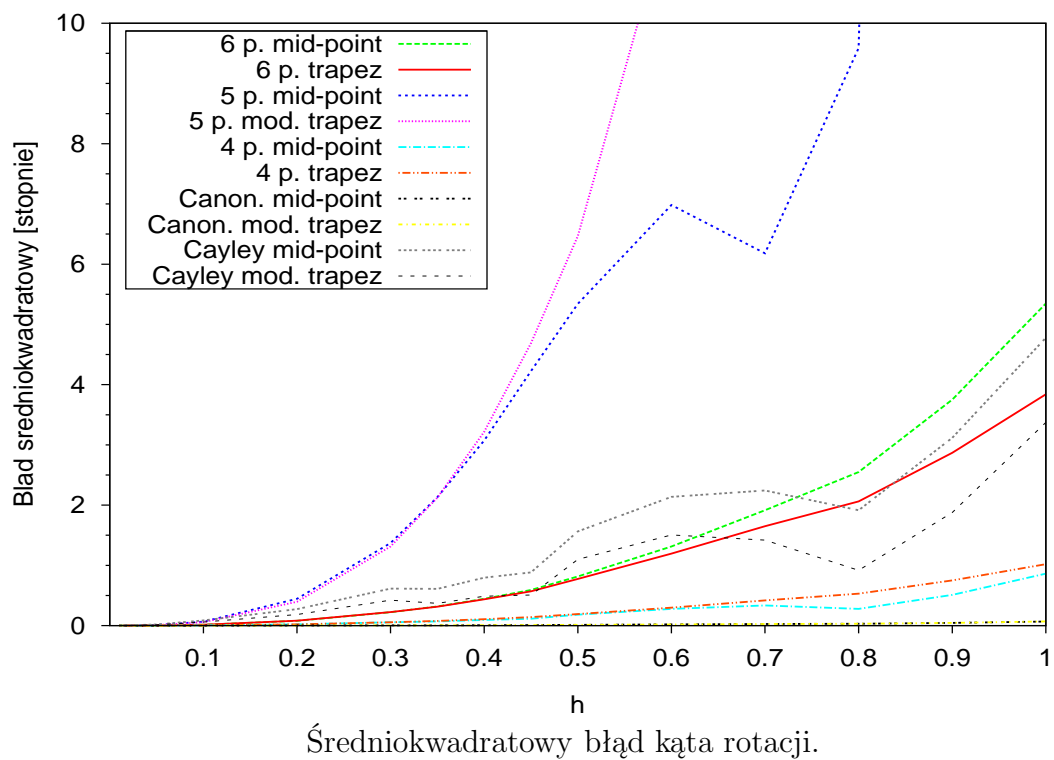
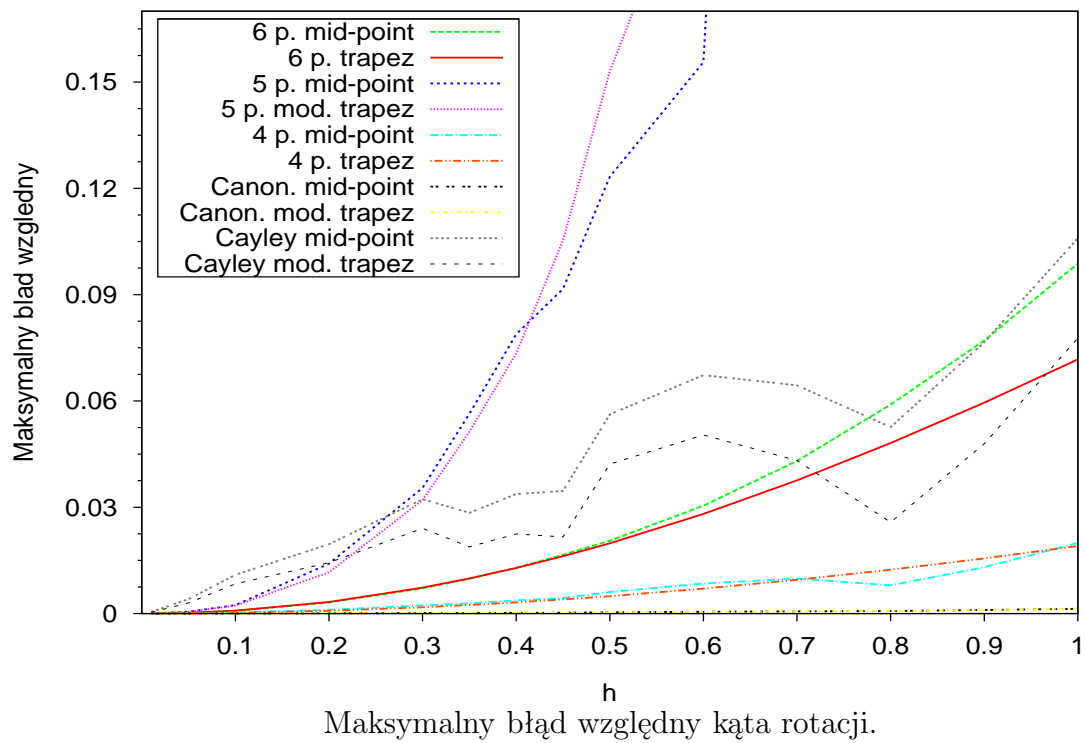
Na wykresach poniżej przedstawiono zależność opisanych powyżej rodzajów błędów od wielkości kroku czasowego Δt , dla wybranych parametryzacji i metod rozwiązywania.

1. Błędy dla maksymalnego całkowitego kąta obrotu równego 180 stopni:
 - dla ω stałego w czasie - Rys.2.6,
 - dla ω wykonującego obrót o 90 stopni - Rys.2.7,
 - dla ω wykonującego obrót o 270 stopni - Rys.2.8,

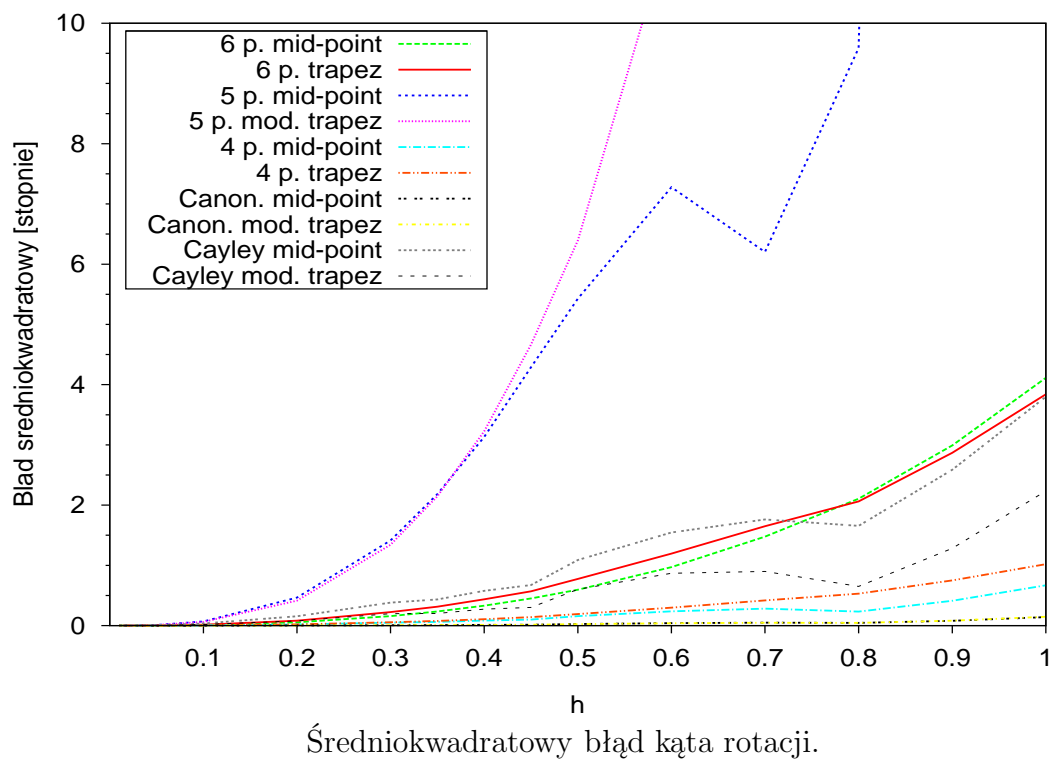
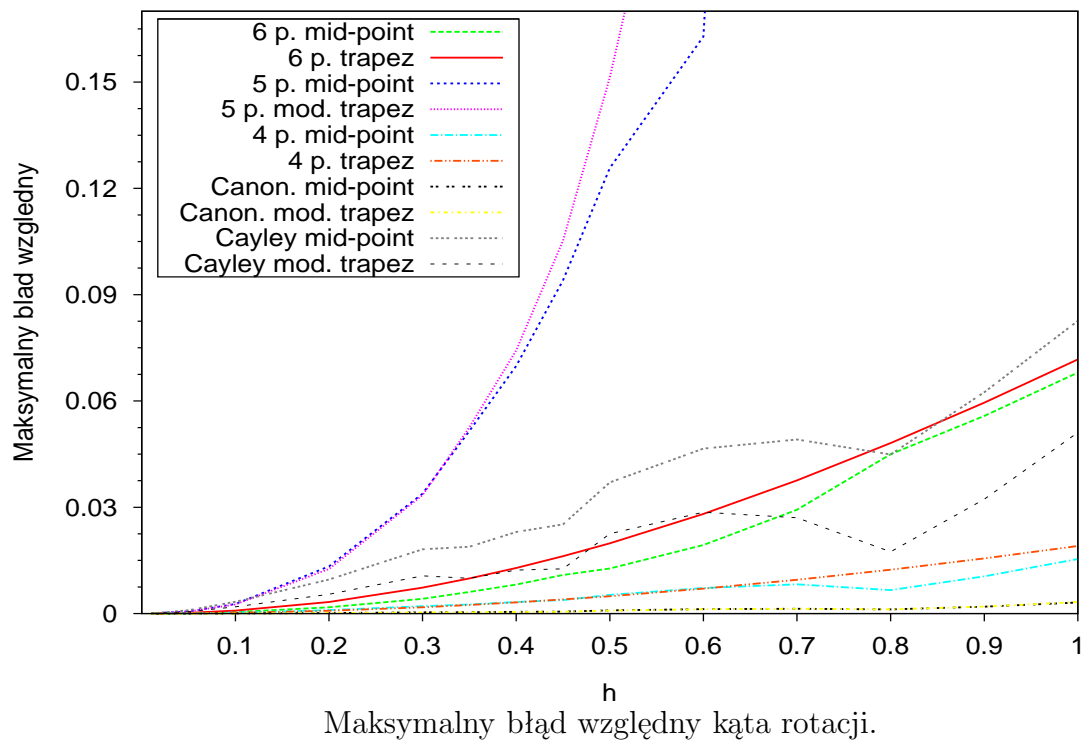
-
2. Błędy dla maksymalnego całkowitego kąta obrotu równego 572 stopnie ($t = 0 - 10$):
- dla ω stałego w czasie - Rys.2.9,
 - dla ω wykonującego obrót o 90 stopni - Rys.2.10,
 - dla ω wykonującego obrót o 270 stopni - Rys.2.11.



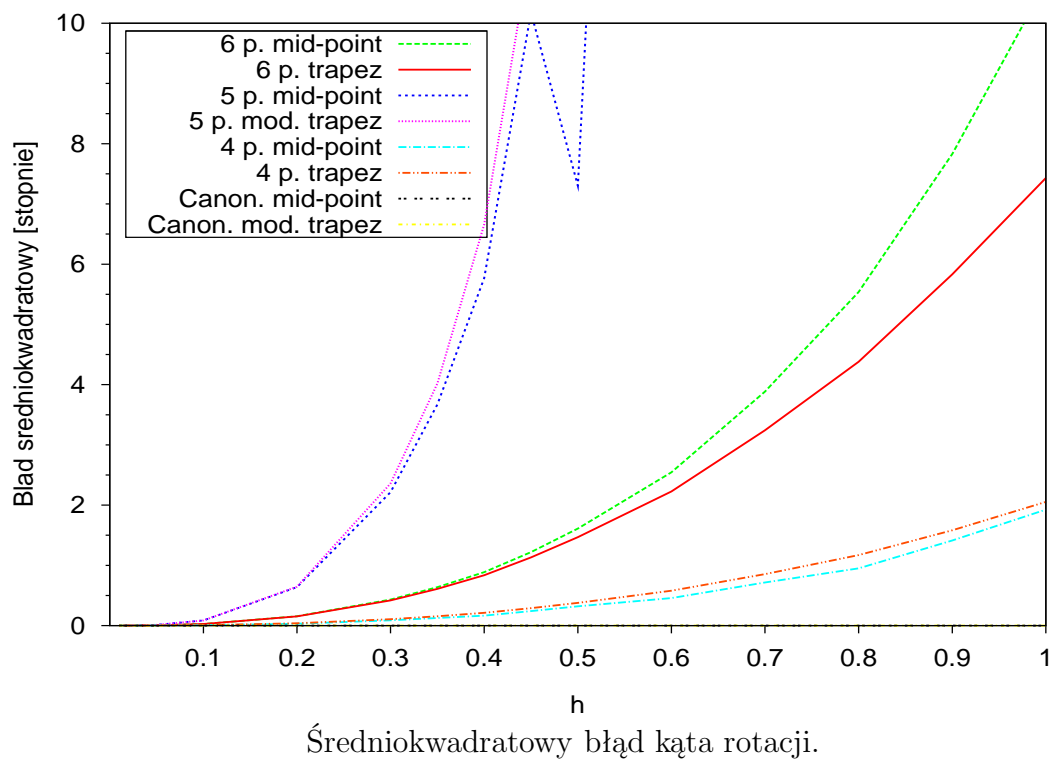
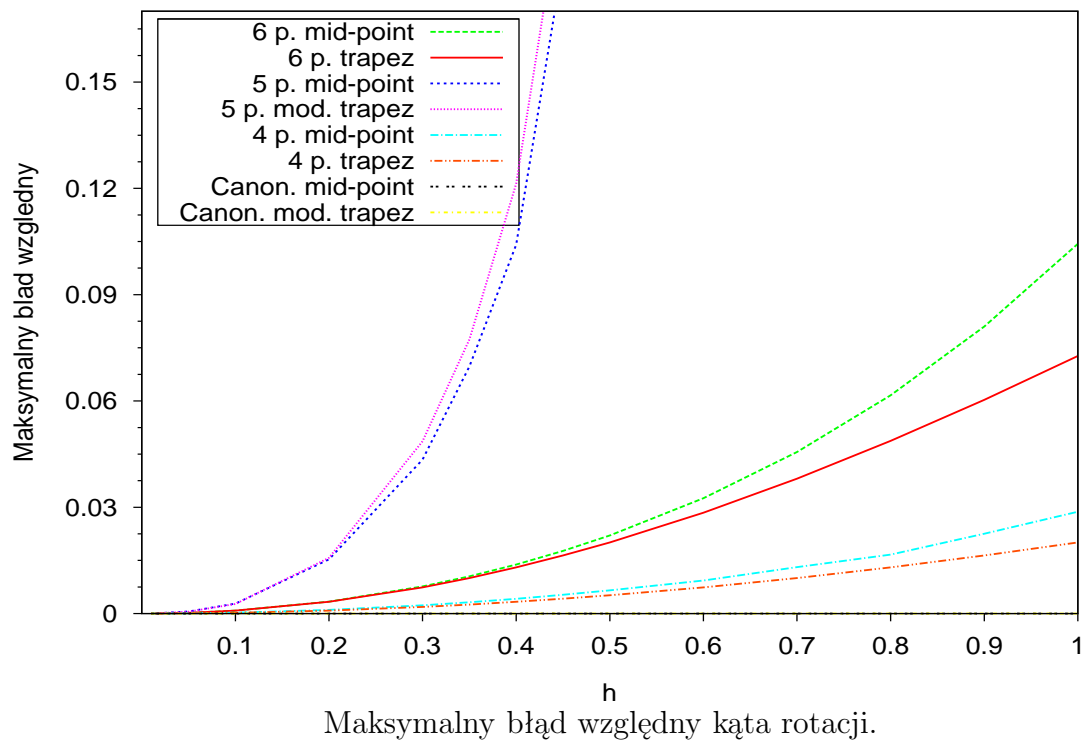
Rysunek 2.6: Wykresy dla wektora rotacji ω stałego w czasie. Maksymalny całkowity kąt obrotu równy π .



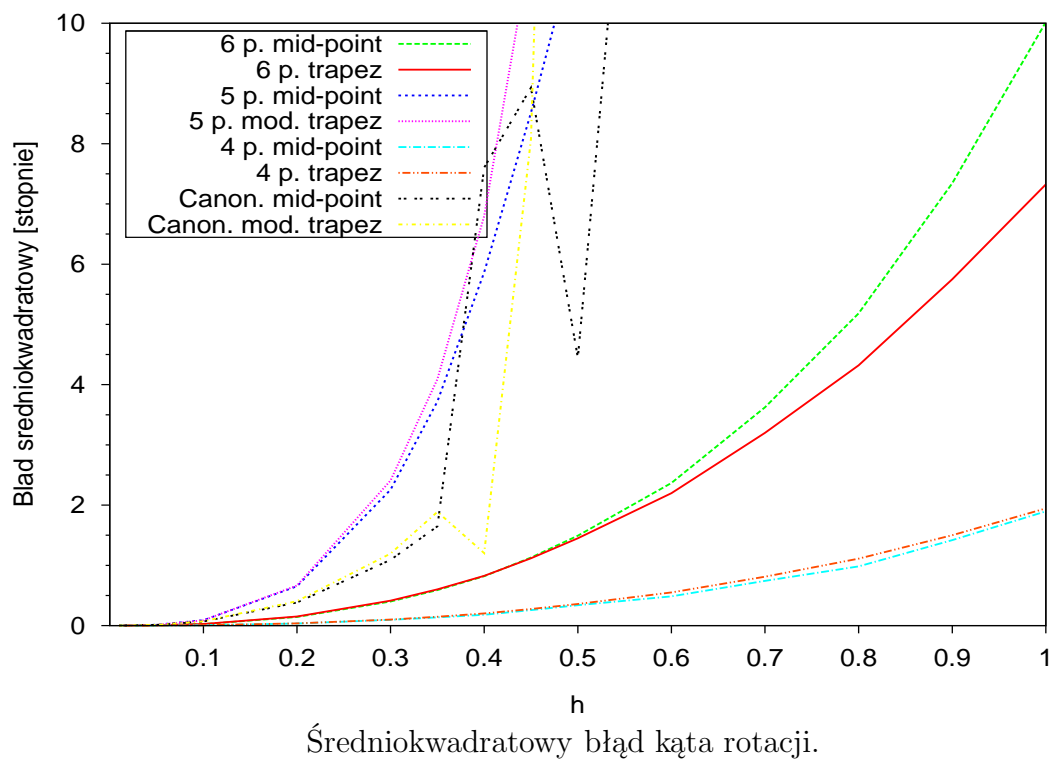
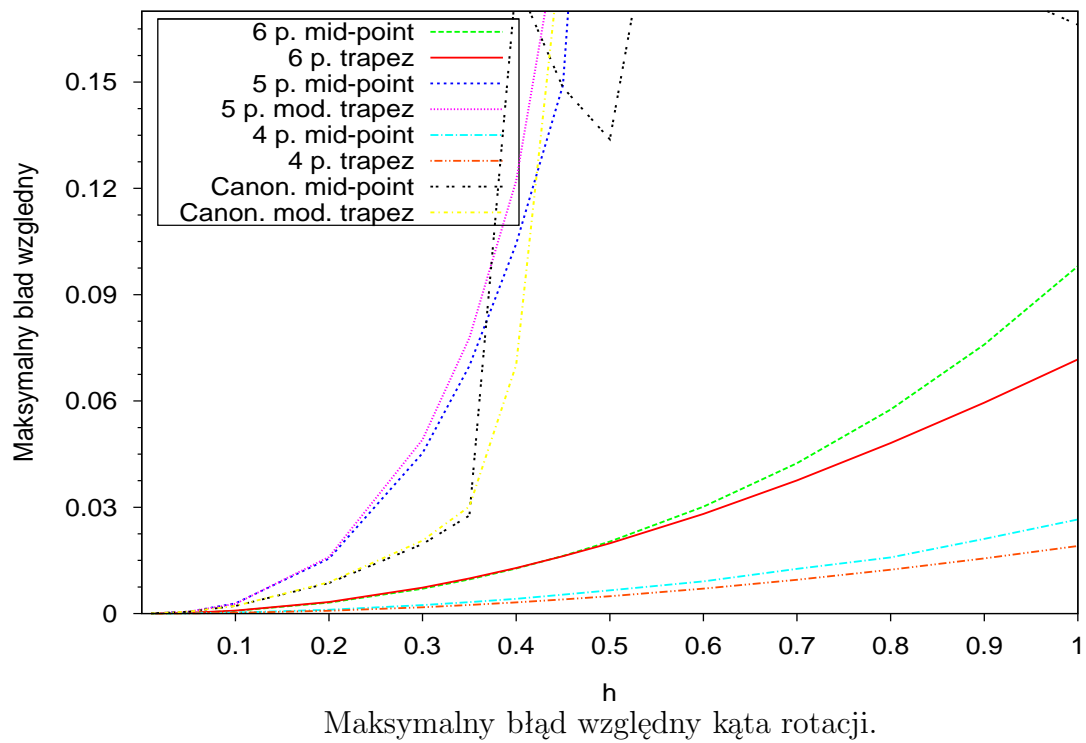
Rysunek 2.7: Wykresy dla wektora rotacji ω wykonującego obrót o 90 stopni. Maksymalny całkowity kąt obrotu równy π .



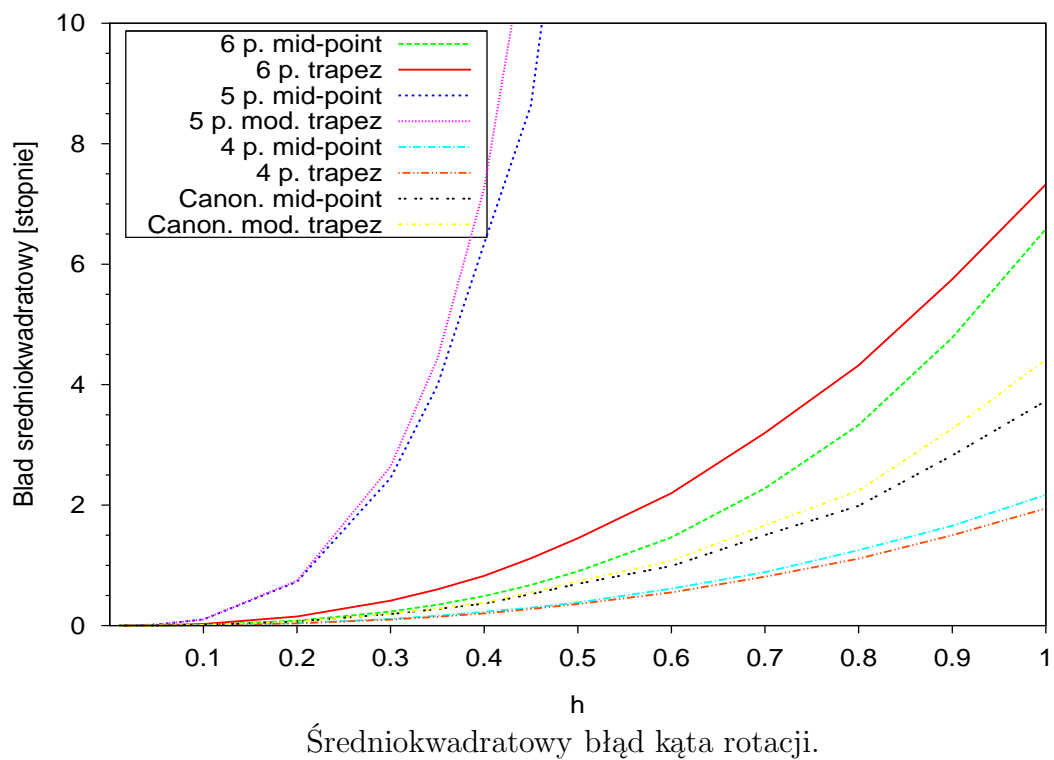
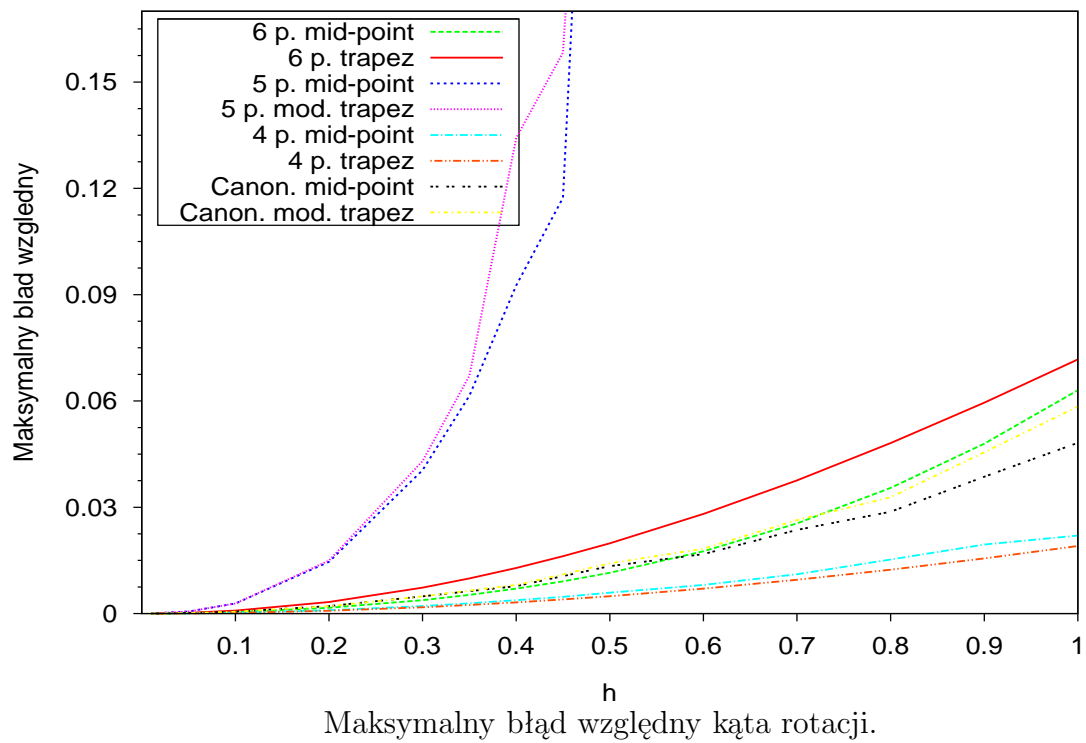
Rysunek 2.8: Wykresy dla wektora rotacji ω wykonującego obrót o 270 stopni. Maksymalny całkowity kąt obrotu równy π .



Rysunek 2.9: Wykresy dla wektora rotacji ω stałego w czasie. Całkowity obrót w czasie $t = 10$. Całkowity kąt obrotu równy 572 stopnie.



Rysunek 2.10: Wykresy dla wektora rotacji ω wykonującego obrót o 90 stopni. Całkowity obrót w czasie $t = 10$. Całkowity kąt obrotu równy 572 stopnie.



Rysunek 2.11: Wykresy dla wektora rotacji ω wykonującego obrót o 270 stopni. Całkowity obrót w czasie $t = 10$. Całkowity kąt obrotu równy 572 stopnie.

2.5.1 Podsumowanie

Analiza otrzymanych rezultatów obliczeń numerycznych pozwala sformułować następujące wnioski.

1. Trójparametrowa parametryzacja kanoniczna daje, w przypadku wektora ω stałego w czasie, zerowe błędy rozwiązania.

Jest to potwierdzenie własności, że numerycznie rozwiązanie ma taką samą postać jak rozwiązanie dokładne wyjściowego równania (2.86). Dowód, że równanie generujące rotacje dla parametryzacji kanonicznej jest rozwiązywane dokładnie przy pomocy metod punktu środkowego i zmodyfikowanej metody trapezów podano w dodatku A.2, i stanowi on oryginalny rezultat rozprawy.

Własność ta nie została potwierdzona w przypadku wektora ω zmiennego w czasie, i wtedy błędy obliczeń są dość duże.

2. Dla parametryzacji czteroparametrowej błąd obliczeń narastał dość wolno przy zwiększaniu długości kroku czasowego Δt , a ponadto wartość błędu nie różniła się bardzo dla ω stałego i zmiennego w czasie.

Ponadto dla tej parametryzacji równanie generujące rotacje jest liniowe, co pozwala na rozwiązanie go przy pomocy niejawniej metody trapezów, która prowadzi do schematu numerycznego zachowującego ortogonalność macierzy rotacji i długość wektora parametrów równą 1.

3. Reprezentacja sześcioparametrowa charakteryzuje się krzywymi błędów podobnymi do tych dla parametryzacji czteroparametrowej, jednak wartości błędów są dla wszystkich analizowanych przypadków większe.
4. Trójparametrowa parametryzacja Cayleya ma, w dużym zakresie wartości kroku czasowego Δt , wartości błędów większe niż parametryzacja cztero-parametrowa, i osobliwość dla kąta obrotu równego 180 stopni.
5. Najszybciej rosną błędy dla parametryzacji pięcioparametrowej, co być może wynika z dość skomplikowanej postaci równania, które uzyskuje się dla tej reprezentacji. To z kolei spowodowane jest przez skomplikowany wzór (2.53) na wektor parametrów. Wydaje się, że parametryzacja ta ma raczej wartość teoretyczną, jako dowód, że możliwa jest jednoznaczna reprezentacja grupy $SO(3)$ przy pomocy pięciu parametrów, lecz nie praktyczną, i raczej nie będzie stosowana w obliczeniach.

Rozdział 3

Równania dynamiki dla ruchu obrotowego ciała sztywnego

W rozdziale tym opiszemy podstawowe pojęcia dotyczące dynamiki ruchu obrotowego ciała sztywnego, które będą potrzebne w dalszej części pracy. Równania ruchu sztywnego są omówione w wielu klasycznych podręcznikach z dynamiki, np. [12] i [3].

3.1 Opis ruchu ciała sztywnego

Zakładamy, że dany jest pewien nieruchomy, ortonormalny układ odniesienia (zwany dalej globalnym), w którym opisywać będziemy ruch ciała. Wektory tego układu odniesienia oznaczmy przez $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$).

Niech $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ będzie położeniem danego ciała w konfiguracji początkowej, dla chwili czasu $t = 0$. Ruch ciała nazwiemy *sztywnym*, jeżeli dla dwóch dowolnych cząstek tego ciała odległość między nimi nie zmienia się w ciągu trwania tego ruchu. Jeżeli przez $\mathbf{x}_1(t)$ oraz $\mathbf{x}_2(t)$ oznaczmy wektory położenia cząstek \mathbf{r}_1 oraz \mathbf{r}_2 ciała \mathcal{B} w chwili t , wówczas ruch ciała jest sztywny jeżeli

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|, \quad (3.1)$$

dla dowolnych cząstek $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathcal{B}$ i $t \in [0, T]$, gdzie T jest całkowitym czasem ruchu. Ciało, które podlega ruchowi sztywnemu nazywamy *ciałem sztywnym*.

Można zauważyć, że jeżeli ruch ciała jest sztywny, to istnieje układ odniesienia związany z ciałem, w którym współrzędne poszczególnych cząstek ciała są takie same w trakcie trwania całego ruchu. Zatem, aby opisać położenie ciała sztywnego w dowolnej chwili czasu $t \in [0, T]$, wystarczy opisać położenie odpowiedniego układu odniesienia związanego z ciałem, definiując położenie jego początku i położenie kątowe jego osi. Układ odniesienia związany z ciałem oznaczmy przez $\{\mathbf{t}_i(t)\}$. Rodzinę układów $\{\mathbf{t}_i(t)\}$ nazwiemy *ruchomym* lub *lokalnym układem odniesienia*.

Niech $\rho_{ref} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gęstości rozkładu masy ciała \mathcal{B} w konfiguracji początkowej, dla chwili czasu $t = 0$.

Środkiem masy ciała nazwiemy punkt przestrzeni o promieniu wodzącym w globalnym układzie odniesienia danym wzorem

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \mathbf{r} dV, \quad (3.2)$$

gdzie \mathbf{r} oznacza promień wodzący cząstki ciała w układzie globalnym w konfiguracji początkowej, a m jest całkowitą masą ciała daną wzorem

$$m \doteq \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} dV.$$

Wykorzystując definicję środka masy, promień wodzący dowolnej cząstki ciała w konfiguracji początkowej możemy wyrazić w następujący sposób,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{X}, \quad (3.3)$$

gdzie \mathbf{X} to promień wodzący cząstki względem środka masy ciała. Zgodnie ze wzorem (3.2) zachodzi wówczas

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \mathbf{X} dV = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Niech $\boldsymbol{\varphi} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją definiującą położenie początku lokalnego układu współrzędnych $\{\mathbf{t}_i\}$ w chwili t , a $\mathbf{R} : [0, T] \rightarrow SO(3)$ będzie funkcją oznaczającą wzajemne położenie wektorów bazy związanej z ciałem \mathbf{e}_i i wektorów bazy odniesienia $\mathbf{t}_i(t)$, tzn.

$$\mathbf{t}_i(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{e}_i \quad \text{dla } t \in [0, T] \quad \text{i } i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Zauważmy, że zachodzi związek $\mathbf{R}(t) = \mathbf{t}_i(t) \otimes \mathbf{e}_i$. W chwili początkowej, oba układy pokrywają się, tzn. $\mathbf{t}_i(0) = \mathbf{e}_i$.

Ruch ciała sztywnego jest jednoparametrową rodziną odwzorowań postaci

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{X} = [\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(t)] + \mathbf{R}(t)\mathbf{X}, \quad (3.6)$$

gdzie $t \in [0, T]$, i $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ oznacza przemieszczenie środka masy ciała, Rys.3.1.

Prędkość cząstki ciała sztywnego wyraża się wzorem

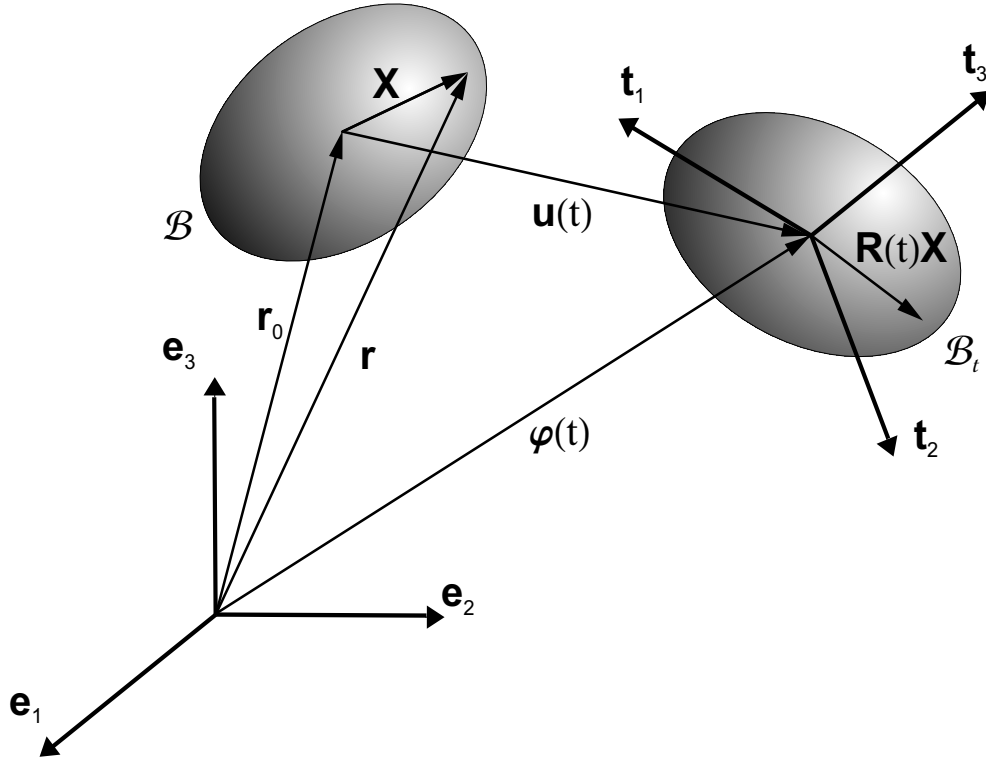
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{X}, \quad (3.7)$$

gdzie $(\dot{}) \doteq \partial()/\partial t$. Przy tym tensor rotacji $\mathbf{R}(t)$ spełnia równania

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \tilde{\mathbf{w}}(t)\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t)\tilde{\mathbf{W}}(t), \quad (3.8)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{w}} \doteq \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad \tilde{\mathbf{W}} \doteq \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}}, \quad (3.9)$$



Rysunek 3.1: Położenie cząstki X ciała \mathcal{B} w konfiguracji początkowej i aktualnej.

są tensorami skośnie-symetrycznymi a odpowiadające im wektory osiowe \mathbf{w} i \mathbf{W} nazywane są odpowiednio (*lewą*) *przestrzenną* i (*prawą*) *materialną prędkością kątową*. Zauważmy, że z (3.8) otrzymamy

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T, \quad (3.10)$$

co jest równoważne relacji dla wektorów osiowych tensorów skośnie-symetrycznych,,

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{W}. \quad (3.11)$$

Wektory prędkości kątowych \mathbf{w} i \mathbf{W} posiadają ponadto następujące własności.

1. Przestrzenna prędkość kątowa \mathbf{w} jest prędkością kątową ruchomego układu odniesienia (a zatem i ciała). Istotnie

$$\dot{\mathbf{t}}_i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{e}_i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{t}_i = \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{t}_i = \mathbf{w} \times \mathbf{t}_i \quad \text{dla } i = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

2. Współrzędne wektora przestrzennej prędkości kątowej \mathbf{w} w układzie lokalnym, równe są współrzędnym wektora materialnej prędkości kątowej \mathbf{W} w układzie globalnym. Wynika to z następującej relacji

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{w} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}^T\mathbf{w} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{W}. \quad (3.13)$$

Przestrzennym i materialnym wektorem przyspieszenia kąтового nazwiemy odpowiednio wielkości

$$\mathbf{a} \doteq \dot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{A} \doteq \dot{\mathbf{W}}. \quad (3.14)$$

Zauważmy, że zachodzi pomiędzy nimi związek

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{W}) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{W} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{R}(\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{W} + \dot{\mathbf{W}}) = \mathbf{R}\mathbf{A}, \quad (3.15)$$

ponieważ $\widetilde{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dla dowolnego wektora \mathbf{x} . Zauważmy, że wynika stąd, podobnie jak dla prędkości kątoej, że wektor przestrzennego przyspieszenia kątoego posiada w układzie lokalnym takie same współrzędne, jak wektor materialnego przyspieszenia kątoego w układzie globalnym,

$$\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}. \quad (3.16)$$

3.2 Definicja pędu i momentu pędu

Pęd ciała, poruszającego się w dowolny sposób, wyraża się wzorem

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \dot{\mathbf{x}}(t) dV. \quad (3.17)$$

W przypadku ruchu ciała sztywnego, dla którego położenie cząstek jest zdefiniowane wzorem (3.6), i po uwzględnieniu (3.4), pęd możemy przedstawić w postaci

$$\mathbf{p} = m\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t). \quad (3.18)$$

Jest to zatem pęd równy pędowi punktu materialnego mającego masę m i poruszającego się z prędkością z jaką porusza się środek masy ciała.

Całkowity moment pędu (kręt), dla dowolnego ruchu ciała, dany jest wzorem

$$\mathbf{J}(t) \doteq \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t) dV. \quad (3.19)$$

W przypadku ruchu sztywnego, korzystając ze wzorów (3.6), (3.7), założenia (3.4) oraz definicji (3.18), otrzymamy

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{p} + \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} (\mathbf{R}\mathbf{X}) \times (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) dV. \quad (3.20)$$

Drugi składnik powyższej sumy możemy przekształcić w następujący sposób

$$\int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{X}) \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} dV = \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{X}) \widetilde{\mathbf{w}}\mathbf{R}\mathbf{X} dV = \left[- \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{X}) (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{X}) dV \right] \mathbf{w}. \quad (3.21)$$

Wielkość

$$\mathbb{I}_t \doteq - \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{X}) (\widetilde{\mathbf{R}}\mathbf{X}) dV, \quad (3.22)$$

nazywamy *przestrzennym (zależnym od czasu) tensorem bezwładności* ciała. Wielkość

$$\boldsymbol{\pi}(t) \doteq \mathbb{I}_t \mathbf{w}, \quad (3.23)$$

nazywamy *całkowitym, przestrzennym momentem pędu względem środka masy*. Zauważmy, że korzystając z własności $\widetilde{\mathbf{R}\mathbf{X}} = \mathbf{R}\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{R}^T$, wzór (3.22) można przekształcić w następujący sposób

$$\mathbb{I}_t = - \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \mathbf{R}\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{R}^T \mathbf{R}\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{R}^T dV = -\mathbf{R} \left[\int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}} dV \right] \mathbf{R}^T. \quad (3.24)$$

Wielkość

$$\mathbb{J} \doteq - \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}} dV, \quad (3.25)$$

nazywamy *materialnym (niezależnym od czasu) tensorem bezwładności* ciała. Z (3.24) i (3.25) wynika, że pomiędzy przestrzennym i materialnym tensorem bezwładności zachodzi następujący związek

$$\mathbb{I}_t = \mathbf{R} \mathbb{J} \mathbf{R}^T. \quad (3.26)$$

Ostatecznie wzór na całkowity moment pędu ciała sztywnego (3.20) przyjmuje postać

$$\mathbf{J}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \times \mathbf{p}(t) + \boldsymbol{\pi}(t). \quad (3.27)$$

Oprócz zdefiniowanego w (3.23) przestrzennego momentu pędu względem środka masy, definiujemy również *całkowity materialny moment pędu względem środka masy*

$$\boldsymbol{\Pi}(t) \doteq \mathbf{R}^T(t) \boldsymbol{\pi}(t) = \mathbb{J} \mathbf{W}(t). \quad (3.28)$$

Materialny tensor bezwładności \mathbb{J} , zdefiniowany wzorem (3.25), można zapisać jeszcze w inny sposób. Skorzystamy przy tym z zależności, która pozwala dowolny tensor skośnie-symetryczny przedstawić w postaci

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \|\mathbf{X}\| (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2), \quad (3.29)$$

gdzie \mathbf{g}_1 i \mathbf{g}_2 są dowolnymi wektorami tworzącymi wraz z $\mathbf{e} = \mathbf{X}/\|\mathbf{X}\|$ bazę ortonormalną. Zauważmy, że \mathbf{e} to znormalizowany wektor osiowy tensora skośnie-symetrycznego $\widetilde{\mathbf{X}}$. Wykorzystując tę zależność, możemy zapisać

$$\begin{aligned} -\widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}} = \widetilde{\mathbf{X}}^T \widetilde{\mathbf{X}} &= \|\mathbf{X}\|^2 (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1) (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2) \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ponieważ,

$$\mathbf{I} = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 + \mathbf{e} \otimes \mathbf{e},$$

stąd z (3.30) otrzymamy

$$-\widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}} = \|\mathbf{X}\|^2 (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \|\mathbf{X}\|^2 \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2} \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} \right) = \|\mathbf{X}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}. \quad (3.31)$$

Z definicji materialnego tensora bezwładności (3.25) i powyższej równości, otrzymujemy inny, równoważny wzór na tensor \mathbb{J} ,

$$\mathbb{J} = \int_V \rho_{ref} \left(\|\mathbf{X}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} \right) dV. \quad (3.32)$$

3.3 Równania ruchu obrotowego

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu postępowego (twierdzenie o pochodnej pędu) ma postać

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}, \quad (3.33)$$

gdzie \mathbf{f} jest siłą zewnętrzną działającą na środek masy ciała. Przy założeniu, że masa ciała jest w czasie trwania ruchu stała i wykorzystując (3.18) otrzymamy

$$m\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}. \quad (3.34)$$

Dla ruchu obrotowego druga zasada dynamiki Newtona (twierdzenie o pochodnej momentu pędu) ma postać

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{m}, \quad (3.35)$$

gdzie \mathbf{m} jest momentem zewnętrznym przyłożonym w środku masy.

W celu przeprowadzenia analizy wyłącznie ruchu obrotowego ciała, można wprowadzić inercjalny układ odniesienia, zaczepiony w środku masy ciała i poruszający się wraz z nim, którego osie pozostają przez cały czas ruchu równoległe do osi globalnego, nieruchomego układu współrzędnych. Wtedy, $\boldsymbol{\varphi}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \mathbf{0}$, i ze wzoru (3.18), otrzymujemy,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}. \quad (3.36)$$

Zatem pochodna całkowitego momentu pędu (3.27) względem czasu redukuje się do

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\varphi} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\pi}} = \dot{\boldsymbol{\pi}}, \quad (3.37)$$

i zasada (3.35) przyjmuje postać

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{m}. \quad (3.38)$$

Korzystając z zależności (3.28) możemy lewą stronę powyższego równania zapisać następująco

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}\mathbb{J}\mathbf{W}) = \dot{\mathbf{R}}\mathbb{J}\mathbf{W} + \mathbf{R}\mathbb{J}\dot{\mathbf{W}}. \quad (3.39)$$

Korzystając ze związków (3.8), definicji przyspieszenia kąтового (3.14) oraz związku między przestrzennymi i materialnymi wektorami prędkości i przyspieszenia kąтового (3.11) i (3.15) oraz tensorami bezwładności (3.26), możemy przekształcić powyższy wzór tak, aby zapisać go w opisie przestrzennym i materialnym.

Opis przestrzenny:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = \tilde{\mathbf{w}} (\mathbf{R}\mathbb{J}\mathbf{R}^T) \mathbf{w} + (\mathbf{R}\mathbb{J}\mathbf{R}^T) \mathbf{a} = \mathbf{w} \times (\mathbb{I}_t \mathbf{w}) + \mathbb{I}_t \mathbf{a}. \quad (3.40)$$

Opis materialny:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{R} (\tilde{\mathbf{W}}\mathbb{J}\mathbf{W} + \mathbb{J}\mathbf{A}) = \mathbf{R} [\mathbf{W} \times (\mathbb{J}\mathbf{W}) + \mathbb{J}\mathbf{A}]. \quad (3.41)$$

Zatem druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego ciała sztywnego (3.38), ma w odpowiednio opisie przestrzennym i materialnym postać

$$\mathbb{I}_t \mathbf{a} + \mathbf{w} \times (\mathbb{I}_t \mathbf{w}) = \mathbf{m}, \quad (3.42)$$

$$\mathbb{J} \mathbf{A} + \mathbf{W} \times (\mathbb{J} \mathbf{W}) = \mathbf{R}^T \mathbf{m}. \quad (3.43)$$

Zauważmy, że przejście pomiędzy przestrzenną i materialną postacią równania ruchu obrotowego odbywa się poprzez transformację wielkości przestrzennych \mathbf{w} i \mathbf{a} na materialne \mathbf{W} i \mathbf{A} przy pomocy wzorów (3.11) i (3.15).

Równania (3.42) i (3.43) wraz z odpowiednimi równaniami (3.8) tworzą układ równań różniczkowych zwyczajnych, pierwszego rzędu, ze zmiennymi \mathbf{R} , \mathbf{w} i \mathbf{a} (lub \mathbf{W} i \mathbf{A}), który możemy zapisać ostatecznie w postaci.

W opisie przestrzennym:

$$\dot{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{R}, \quad (3.44)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{a}, \quad (3.45)$$

$$\mathbb{I}_t \mathbf{a} + \mathbf{w} \times \mathbb{I}_t \mathbf{w} = \mathbf{m}. \quad (3.46)$$

W opisie materialnym:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{W}}, \quad (3.47)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{A}, \quad (3.48)$$

$$\mathbb{J} \mathbf{A} + \mathbf{W} \times \mathbb{J} \mathbf{W} = \mathbf{R}^T \mathbf{m}. \quad (3.49)$$

Do tego przyjmujemy warunki początkowe postaci

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0. \quad (3.50)$$

Równania (3.44)-(3.46) (lub (3.47)-(3.49)) wraz z warunkami początkowymi (3.50), definiują zagadnienie początkowe dla zmiennych \mathbf{R} i \mathbf{w} (lub \mathbf{R} i \mathbf{W}) określone na przestrzeni $SO(3)$.

Cechą charakterystyczną tego układu równań jest fakt, że przestrzeń rozwiązań nie jest przestrzenią liniową, jak ma to miejsce typowo dla równań różniczkowych, ale jest rozmaitością różniczkowalną. Cechę tę posiadają również inne nieliniowe modele w mechanice ciała odkształcalnego, takie jak np. pręty czy powłoki, gdzie również występują rotacyjne stopnie swobody. Przestrzenna dyskretyzacja tych modeli przy użyciu metody elementów skończonych, prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych o strukturze podobnej do równań (3.44)-(3.46) oraz (3.47)-(3.49).

3.4 Energia kinetyczna ruchu obrotowego

Energia kinetyczna ciała wyraża się wzorem

$$E_k = \frac{1}{2} \int_B \rho_{ref} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) dV. \quad (3.51)$$

W przypadku ciała sztywnego, dla którego prędkość cząstek ciała dana jest wzorem (3.7) oraz pamiętając o własności (3.4), wzór (3.51) przyjmuje postać

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{X}) \cdot (\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{X}) dV, \quad (3.52)$$

składającą się z dwóch członów, z których pierwszy wiąże się z ruchem translacyjnym, a drugi z ruchem obrotowym.

Dla wprowadzonego uprzednio inercjalnego układu odniesienia, człon translacyjny jest równy zero, i energia kinetyczna ciała sztywnego ma postać

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{X}) \cdot (\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{X}) dV. \quad (3.53)$$

Przekształćmy teraz wyrażenie pod całką w powyższym wzorze. Korzystając z zależności (3.9)₂ otrzymamy

$$\dot{\mathbf{R}}^T = -\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T, \quad \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X} = \mathbf{R}\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{X} = -\mathbf{R}\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}. \quad (3.54)$$

i wyrażenie podcałkowe,

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) \cdot (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) &= \mathbf{X} \cdot (\dot{\mathbf{R}}^T \dot{\mathbf{R}}\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot (\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{R}^T \mathbf{R}\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}) \\ &= -(\widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{X}) \cdot (\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}) = (\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}) \cdot (\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}) \\ &= -\mathbf{W} \cdot (\widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}}\mathbf{W}). \end{aligned}$$

Stąd, wzór (3.53) przyjmuje postać

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot \left(- \int_{\mathcal{B}} \rho_{ref} \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\mathbf{X}} dV \right) \mathbf{W}. \quad (3.55)$$

Korzystając z definicji (3.25) materialnego tensora bezwładności \mathbb{J} otrzymujemy ostatecznie wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego ciała sztywnego w opisie materialnym

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{W}). \quad (3.56)$$

Korzystając ze związku między przestrzenną i materialną prędkością kątową (3.11), $\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{W}$, możemy zapisać powyższy wzór w opisie przestrzennym.

$$E_k = \frac{1}{2} (\mathbf{R}^T \mathbf{w}) \cdot (\mathbb{J}\mathbf{R}^T \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{R}\mathbb{J}\mathbf{R}^T \mathbf{w}). \quad (3.57)$$

Korzystając z zależności (3.26) między przestrzennym i materialnym tensorem bezwładności, otrzymujemy ostatecznie wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego ciała sztywnego w opisie przestrzennym

$$E_k = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot (\mathbb{I}_t \mathbf{w}). \quad (3.58)$$

Rozdział 4

Algorytmy rozwiązywania równań dynamiki ciała sztywnego

W rozdziale tym przedstawimy wybrane algorytmy rozwiązywania równań dynamiki należące do rodziny metod jedno-krokowych; najpierw dla problemów z translacyjnymi stopniami swobody, a następnie ich uogólnienia dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody.

Te ostatnie zastosowane są do rozwiązywania równań ruchu obrotowego ciała sztywnego wyprowadzonych w Rozdz.3, jednakże możliwe jest ich uogólnienie na bardziej skomplikowane równania, uzyskane w wyniku dyskretyzacji metodą elementów skończonych struktur takich jak belki lub powłoki, patrz np. [17], [24], [25], [26].

W przypadku algorytmów dla ruchu obrotowego ciała sztywnego, scharakteryzowane zostaną ich własności zachowawcze, i wyprowadzone zostaną operatory styczne wykorzystane w metodzie Newtona.

4.1 Metody dla problemów z przemieszczeniowymi stopniami swobody

4.1.1 Rodzina metod Newmarka

Metoda Newmarka dla równań liniowych

Niech dany będzie do rozwiązania układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, będący zdyskretyzowanym przy pomocy metody elementów skończonych równaniem ruchu, w postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{p}(t), \quad (4.1)$$

z warunkami początkowymi

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0, \quad \dot{\mathbf{d}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (4.2)$$

Macierz \mathbf{M} jest macierzą mas, \mathbf{C} macierzą tłumienia lepkiego, \mathbf{K} macierzą sztywności, \mathbf{p} wektorem sił zewnętrznych. Wektory \mathbf{d} , $\dot{\mathbf{d}}$ i $\ddot{\mathbf{d}}$ są odpowiednio wektorami przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia. Zakładamy, że \mathbf{M} , \mathbf{C} i \mathbf{K} są symetryczne, \mathbf{M} jest dodatnio określona a \mathbf{C} i \mathbf{K} dodatnio półokreślone, patrz [14], wzór (9.1.1).

Rodzina metod Newmarka składa się z następujących równań:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1-2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}], \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t[(1-\gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}], \quad (4.5)$$

gdzie \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n i \mathbf{a}_n są numerycznymi przybliżeniami odpowiednio $\mathbf{d}(t_n)$, $\dot{\mathbf{d}}(t_n)$ i $\ddot{\mathbf{d}}(t_n)$. Stałe $\beta \in [0; \frac{1}{2}]$ i $\gamma \in [0; 1]$ mają wpływ na stabilność i dokładność algorytmu. Algorytm (4.3)-(4.5) jest (patrz [13] str 94, [14] str 492):

- bezwarunkowo stabilny dla $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$,
- warunkowo stabilny dla $\gamma \geq \frac{1}{2}$, $\beta < \frac{\gamma}{2}$ i $\omega\Delta t \leq \Omega_{kryt}$, gdzie

$$\Omega_{kryt} = \frac{\xi\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}.$$

Dla $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}), \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}), \quad (4.7)$$

gdzie w obu wzorach występuje średnia przyspieszenia na początku i na końcu kroku $[t_n, t_{n+1}]$, tzn. $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1})$. Metodę tę nazywa się *metodą średniego przyspieszenia* (ang. (constant) average acceleration method).

Implementacja metody Newmarka. Implementacja to sposób w jaki będziemy obliczać wartości \mathbf{d}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} i \mathbf{a}_{n+1} na podstawie ich wartości w kroku poprzednim - n .

Zakładamy, że znane są dla chwili czasu $t = t_n$ wartości \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n , \mathbf{a}_n , i chcemy obliczyć wartości \mathbf{d}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} , \mathbf{a}_{n+1} , dla chwili czasu $t = t_{n+1}$ (w kroku $n+1$). Żeby móc rozpocząć proces obliczania, musimy znać wartości wszystkich tych zmiennych w chwili początkowej $t = t_0$. Wartości \mathbf{d}_0 i \mathbf{v}_0 są dane jako warunki początkowe, natomiast \mathbf{a}_0 obliczamy ze wzoru

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 = \mathbf{p}(0) - \mathbf{C}\mathbf{v}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0. \quad (4.8)$$

Na początek definiujemy tzw. *predyktory*, tzn. wielkości dla kroku $n + 1$ zależne jedynie od znanych wartości \mathbf{d}_n , \mathbf{v}_n i \mathbf{a}_n :

$$\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t (1 - \gamma) \mathbf{a}_n. \quad (4.10)$$

Ze wzorów (4.4) i (4.5) po uwzględnieniu (4.9) i (4.10) mamy

$$\mathbf{d}_{n+1} = \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}. \quad (4.12)$$

Podstawiając (4.11) i (4.12) do (4.3) otrzymujemy

$$(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{d}}_{n+1}. \quad (4.13)$$

Z równania (4.13) obliczamy przyspieszenie \mathbf{a}_{n+1} , następnie ze wzorów (4.11) i (4.12) obliczamy \mathbf{d}_{n+1} i \mathbf{v}_{n+1} .

Przykład 1: *Oscylator harmoniczny.* Rozważmy punkt materialny o masie m , zawieszony na sprężynie o współczynniku sprężystości $k > 0$. Punkt porusza się wzdłuż osi OX , pod wpływem siły sprężyny $F = -k^2 x$ i siły bezwładności $m\ddot{x}$, gdzie x jest współrzędną położenia punktu na osi OX . Mamy wówczas do rozwiązania następujące równanie ruchu:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{gdzie} \quad \omega = \frac{k}{\sqrt{m}}, \quad (4.14)$$

z warunkami początkowymi $x(0) = x_0$ i $\dot{x}(0) = v_0$. Rozwiązanie ogólne równania (4.14) jest postaci

$$x(t) = A \sin(\omega t + \gamma), \quad (4.15)$$

gdzie stałe A i γ , odpowiadające danym warunkom początkowym, oznaczają odpowiednio amplitudę drgań i przesunięcie fazowe.

Rozwiążmy równanie (4.14) przyjmując $\omega = 1$, oraz warunki początkowe $x_0 = 0$ i $v_0 = 1$. Rozwiązanie dokładne jest wówczas postaci $x(t) = \sin(t)$. Rozwiązanie numeryczne otrzymane metodą Newmarka dla $\Delta t = 0.05$, w przedziale czasowym $[0, 10]$ i dla stałych algorytmu $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$ oraz rozwiązanie dokładne, przedstawiono na Rys.4.1. Dla poprawienia czytelności rysunku pokazano tylko co piąty punkt rozwiązania numerycznego.

Metoda Newmarka dla równań nieliniowych

Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy mamy do czynienia z układem równań różniczkowych (4.1), w którym zamiast członu $\mathbf{K}\mathbf{d}(t)$ występuje nieliniowy składnik $\mathbf{f}(\mathbf{d}(t))$,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{p}(t). \quad (4.16)$$

Zastosujmy do równania (4.16) metodę Newmarka, w podobny sposób jak do równania (4.1):

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{f}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{p}_{n+1}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1} \right] \quad (4.18)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1} \right]. \quad (4.19)$$

W porównaniu z (4.3)-(4.5), zmianie uległo jedynie pierwsze równanie, w którym zamiast $\mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1}$ występuje teraz funkcja $\mathbf{f}(\mathbf{d}_{n+1})$.

Wartości \mathbf{d}_{n+1} i \mathbf{v}_{n+1} możemy, dla uproszczenia zapisu, przedstawić podobnie jak w równaniach (4.11) i (4.12) z uwzględnieniem predyktorów. Jeżeli podstawimy \mathbf{d}_{n+1} i \mathbf{v}_{n+1} do równania (4.17), otrzymamy wówczas nieliniowe równanie macierzowe postaci

$$(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta\Delta t^2\mathbf{a}_{n+1}) = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}. \quad (4.20)$$

Ponieważ nieliniowy człon \mathbf{f} zależy od \mathbf{a}_{n+1} , do obliczenia \mathbf{a}_{n+1} możemy zastosować np. metodę Newtona.

Metoda Newtona. Jeżeli mamy dany układ równań nieliniowych postaci $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, gdzie \mathbf{g} jest funkcją wektorową zmiennej wektorowej \mathbf{x} , o tym samym wymiarze co \mathbf{g} ($\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$), to jego rozwiązanie możemy uzyskać stosując procedurę iteracyjną

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \left[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(i)}) \right]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.21)$$

gdzie $\nabla \mathbf{g} \doteq \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}$. Procedurę rozpoczynamy z punktu $\mathbf{x}^{(0)}$, o którym wiemy, że znajduje się w pobliżu pewnego miejsca zerowego funkcji \mathbf{g} , a następnie kontynuujemy ją dopóki nie zostanie spełniony warunek zbieżności, np. $\|\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}\| < \varepsilon$, dla pewnego przyjętego $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

W przypadku równania (4.20), gdy oznaczamy $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{x}$ oraz

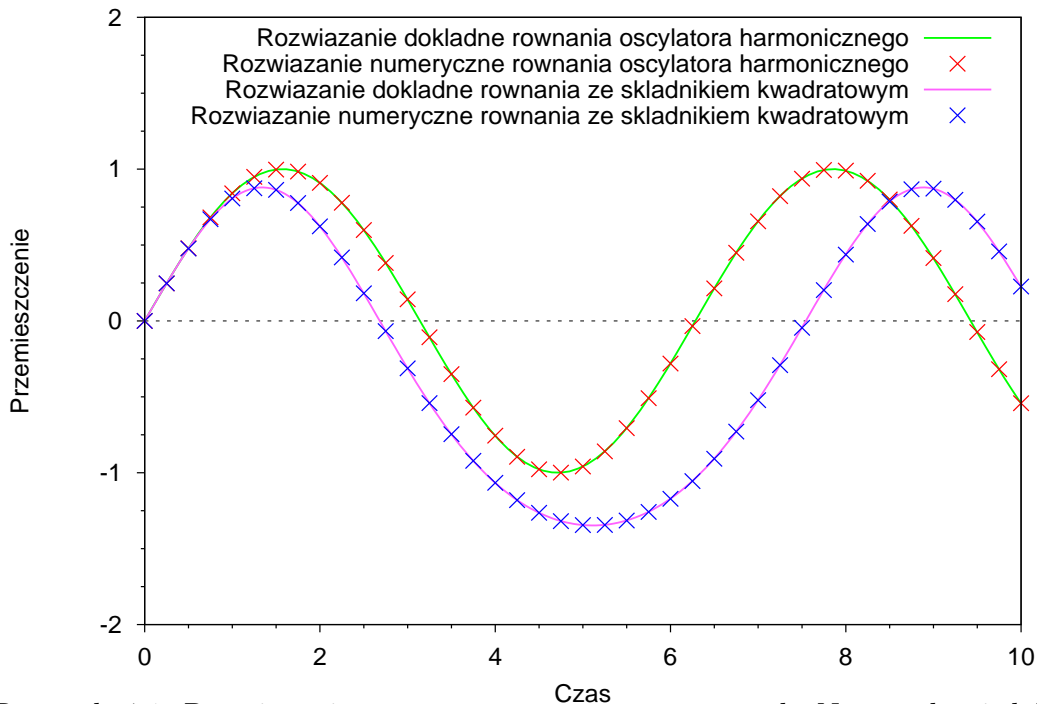
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{x} + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta\Delta t^2\mathbf{x}) - \mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}_{n+1}, \quad (4.22)$$

wtedy możemy bezpośrednio stosować schemat Newtona (4.21). Jako punkt startowy przyjmujemy $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{a}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{a}_n$. Po obliczeniu w ten sposób przybliżonej wartości \mathbf{a}_{n+1} , obliczamy \mathbf{d}_{n+1} i \mathbf{v}_{n+1} ze wzorów (4.11) i (4.12).

Przykład 2. Rozważmy rozwiązywane poprzednio równanie oscylatora harmonicznego z modyfikacją w postaci dodatkowego składnika zawierającego kwadrat szukanej funkcji

$$\ddot{x} + x + \frac{1}{2}x^2 = 0, \quad (4.23)$$

przy takich samych jak w przykładzie 1 warunkach początkowych: $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$. Rozwiązując przykład numerycznie przyjęto, tak jak w przykładzie 1, krok $\Delta t = 0.05$, przedział czasowy $[0, 10]$ oraz wartości stałych algorytmu $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$. Wykres rozwiązania numerycznego otrzymanego przy pomocy metody Newmarka i metody Newtona oraz rozwiązania uzyskanego przy pomocy programu *Mathematica* przedstawiono na Rys.4.1. Pokazano tylko co piąty punkt rozwiązania numerycznego.



Rysunek 4.1: Rozwiązanie numeryczne, otrzymane metodą Newmarka, i dokładne równania oscylatora harmonicznego oraz równania z dodatkowym składnikiem kwadratowym, patrz przykład 1 i 2.

4.1.2 Metoda ważonych residuów

Przedstawimy metodę ważonych residuów w postaci zaproponowanej w pracy [39], w której oddzielnie aproksymuje się przemieszczenia i prędkości. W tym celu zapisujemy równanie (4.1) jako zależne od dwóch funkcji, prędkości i przemieszczeń,

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (4.24)$$

oraz dodajemy dodatkowe równanie łączące te funkcje, tzn.

$$\mathbf{v} - \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Wektor przemieszczenia i prędkości aproksymujemy w przedziale $[t_n, t_{n+1}]$ w następujący sposób

$$\mathbf{v} = N_n(t)\mathbf{v}_n + N_{n+1}(t)\mathbf{v}_{n+1}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{d} = N_n(t)\mathbf{d}_n + N_{n+1}(t)\mathbf{d}_{n+1}, \quad (4.27)$$

gdzie liniowe funkcje kształtu są zdefiniowane następująco,

$$N_n(t) = \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t}, \quad N_{n+1}(t) = \frac{t - t_n}{\Delta t},$$

oraz $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Ważone residua równań (4.24) i (4.25) otrzymamy mnożąc je przez pewne dowolne funkcje wagowe $X(t)$ i $V(t)$ i całkując obustronnie w przedziale $[t_n, t_{n+1}]$,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} X(t) (\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{f}) dt = \mathbf{0}, \quad (4.28)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{d}}) dt = \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy,

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) + \Delta t \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+\theta} + \Delta t \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+\theta} = \mathbf{Imp}_{n+1}, \quad (4.30)$$

$$\Delta t \mathbf{v}_{n+\alpha} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n, \quad (4.31)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_{n+\theta} = (1 - \theta)\mathbf{v}_n + \theta\mathbf{v}_{n+1}, \quad \mathbf{d}_{n+\theta} = (1 - \theta)\mathbf{d}_n + \theta\mathbf{d}_{n+1}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{v}_{n+\alpha} = (1 - \alpha)\mathbf{v}_n + \alpha\mathbf{v}_{n+1}, \quad (4.33)$$

oraz

$$\mathbf{Imp}_{n+1} = \Delta t \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} X(t) \mathbf{f} dt}{\int_{t_n}^{t_{n+1}} X(t) dt}, \quad (4.34)$$

$$\theta = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} X(t) t dt}{\Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} X(t) dt - t_n}, \quad \alpha = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) t dt}{\Delta t \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) dt - t_n}. \quad (4.35)$$

Dla $X(t) = V(t) = 1$, otrzymamy

$$\theta = \alpha = \frac{\frac{1}{2}(t_{n+1}^2 - t_n^2)}{\Delta t(t_{n+1} - t_n) - t_n}. \quad (4.36)$$

Parametry α i θ definiują obszar stabilności i charakterystykę tłumienia algorytmu. Dla dwóch kroków metody otrzymujemy schemat trój-poziomowy, tzn. zawierających zmienne dla t_{n-1} , t_n i t_{n+1} , i otrzymamy następujące relacje

$$\alpha\theta = \beta, \quad \alpha + \theta = \gamma + \frac{1}{2}, \quad (4.37)$$

gdzie β i γ to parametry schematu Newmarka. Warunki stabilności metody podano w pracy [39], równania (38)–(40).

Dla metody trapezów $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$ otrzymamy $\alpha = \theta = \frac{1}{2}$. Metoda ważonych residuów jest wówczas drugiego rzędu i tłumienie numeryczne jest zerowe.

Warto zauważyć dwie cechy metody ważonych residuów:

1. Przyspieszenie jest stałe w przedziale czasowym $[t_n, t_{n+1}]$ i nie występuje jako zmienna w równaniach (4.30) i (4.31). Można je otrzymać z \mathbf{v}_n i \mathbf{v}_{n+1} różniczkując równanie (4.26) po czasie.
2. Używana jest ważona całka obciążenia dla danego przedziału czasowego (4.34) a nie obciążenie w wybranej chwili. Ma to duże znaczenie praktyczne, bo całkowanie odfiltruje obciążenia wysoko-częstotliwościowe, bez negatywnych skutków dla modów o niskiej częstotliwości.

Implementacja

Metodę ważonych residuów, opisaną wzorami (4.30) i (4.31), można zaimplementować na trzy sposoby, przyjmując za każdym razem inną zmienną, względem której będziemy rozwiązywać układ równań. Zmiennymi mogą być następujące wielkości:

- a) $\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n$, lub
- b) $\mathbf{v}_{n+\theta}$, lub
- c) $\mathbf{d}_{n+\theta}$.

W każdym z powyższych przypadków wyeliminujemy w wektorze wyrazów wolnych po prawej stronie układu równań tę macierz, która stoi przy odpowiedniej zmiennej.

Poniżej opiszemy przypadek (c). Zakładamy, że znamy wartości prędkości i położenia w chwili t_n . Wyraźmy prędkość w chwili t_{n+1} przez $\mathbf{d}_{n+\theta}$, \mathbf{v}_n i \mathbf{d}_n wykorzystując równanie (4.31),

$$\mathbf{v}_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{v}_n + \frac{1}{\alpha\theta\Delta t} (\mathbf{d}_{n+\theta} - \mathbf{d}_n). \quad (4.38)$$

Podstawiając (4.38) do (4.30) otrzymamy

$$\mathbf{D}\mathbf{d}_{n+\theta} = \mathbf{Imp}_{n+1} - \mathbf{MA} - \mathbf{CB}, \quad (4.39)$$

gdzie

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\alpha\theta\Delta t}\mathbf{M} + \frac{1}{\alpha}\mathbf{C} + \Delta t\mathbf{K}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{A} = \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{v}_n - \frac{1}{\alpha\theta\Delta t}\mathbf{d}_n \right], \quad (4.41)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\alpha} \left[(\alpha - \theta)\Delta t\mathbf{v}_n - \mathbf{d}_n \right]. \quad (4.42)$$

Jest to jawne równanie ze zmienną $\mathbf{d}_{n+\theta}$, którego prawa strona zawiera wielkości dla chwili czasu t_n .

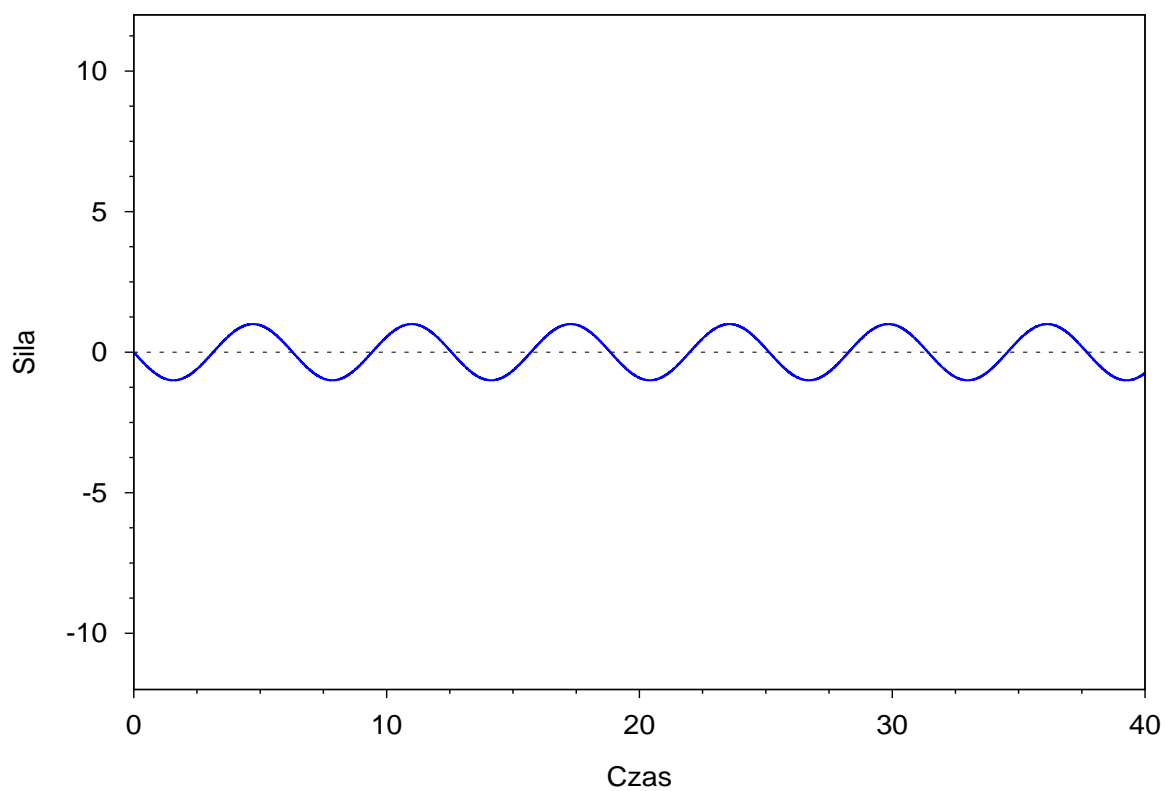
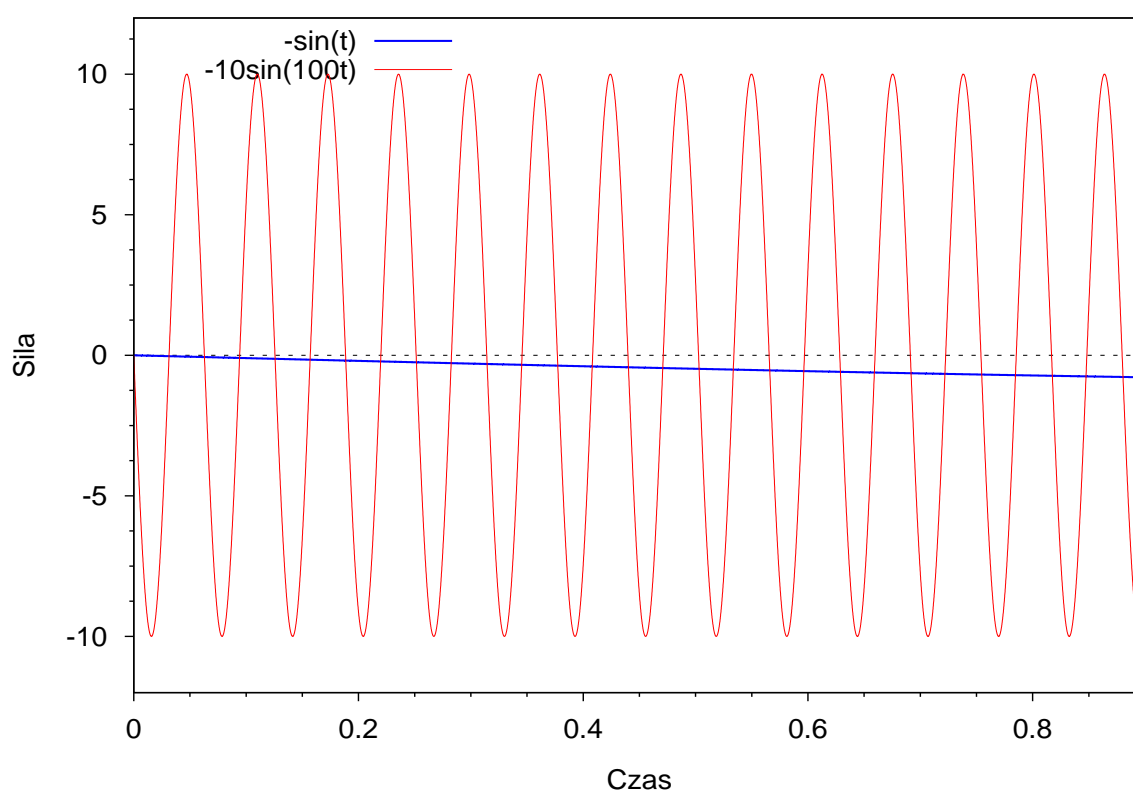
Przykład numeryczny

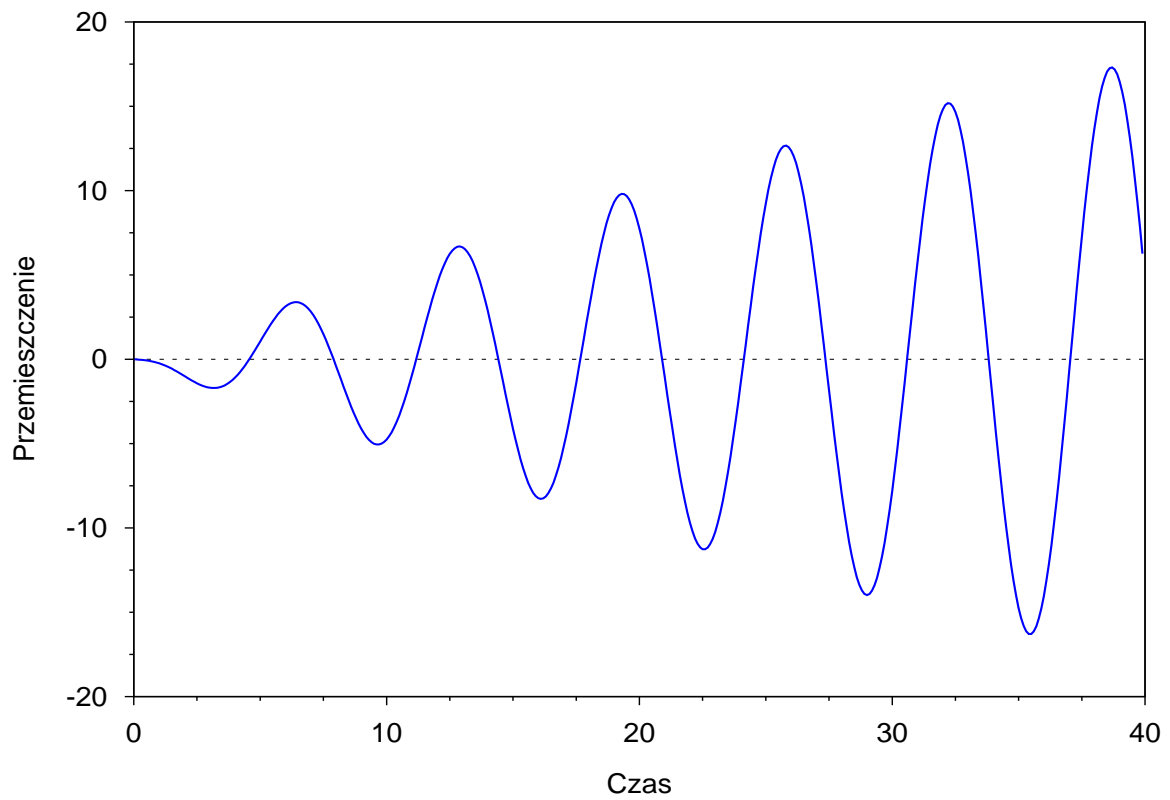
Przedstawimy teraz rozwiązanie prostego problemu jednowymiarowego postaci (4.1), w którym przyjęto: $M = 1$, $C = 0$, $K = \omega^2$, $\omega = 0.95$, oraz siłę zewnętrzną w postaci

$$f(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t) - A_2 \sin(\omega_2 t),$$

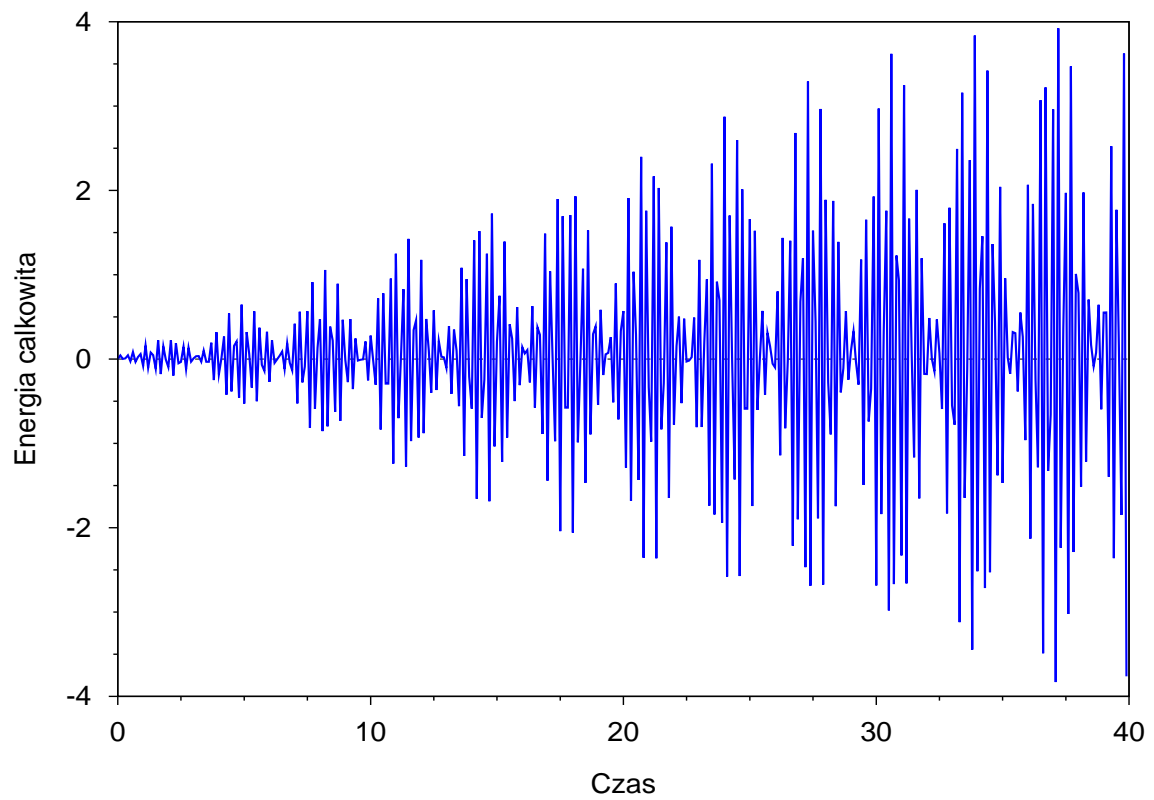
gdzie $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 100$, $A_1 = 1$, $A_2 = 10$. Zauważmy, że siła składa się z dwóch składników: pierwszego o małej oraz drugiego o dużej częstotliwości i amplitudzie, patrz Rys.4.2 i 4.3.

Rozwiązywano równanie (4.39), i do obliczeń przyjęto $\alpha = \theta = \frac{1}{2}$ i $X(t) = V(t) = 1$. Możemy zauważyć, że przemieszczenie pokazane na Rys.4.4 odpowiada obciążeniu o niskiej częstotliwości, podczas gdy wysoka częstotliwość została odfiltrowana. Na Rys.4.5 przedstawiono wykres energii całkowitej układu w funkcji czasu, i ma ono oscylacyjny charakter odpowiadający obciążeniu o wysokiej częstotliwości.

Rysunek 4.2: Pierwszy składnik siły $-A_1 \sin(\omega_1 t)$.Rysunek 4.3: Drugi składnik siły $-A_2 \sin(\omega_2 t)$.



Rysunek 4.4: Przemieszczenie.



Rysunek 4.5: Energia całkowita układu.

4.2 Metody dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody

W tym rozdziale przedstawimy algorytmy przeznaczone dla problemów z rotacyjnymi stopniami swobody, i zaprezentujemy je dla równań ruchu obrotowego ciała sztywnego. Równania te są podobne do równań jakie uzyskujemy po dyskretyzacji metodą elementów skończonych modeli opisujących dynamikę struktur takich jak belki lub powłoki. Jednak równania dla ciała sztywnego są prostsze, i dlatego świetnie nadają się do testowania algorytmów przed ich zastosowaniem w bardziej skomplikowanych problemach.

Aktualizacja położenia dla algorytmów z rotacyjnymi stopniami swobody

W algorytmach przeznaczonych dla rotacyjnych stopni swobody, aktualizacja położenia ciała (tensora rotacji \mathbf{R}) odbywa się w inny sposób, niż w algorytmach dla translacyjnych stopni swobody.

W przypadku aktualizacji wektora położenia \mathbf{d} (wzory (4.4) i (4.18)) wykonujemy po prostu dodawanie wektorów, tzn. aktualizacja jest addytywna. Aktualizacja tensora rotacji jest multiplikatywna, i następuje poprzez złożenie rotacji, np. przez zastosowanie prawej reguły składania rotacji,

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \exp(\tilde{\Theta}). \quad (4.43)$$

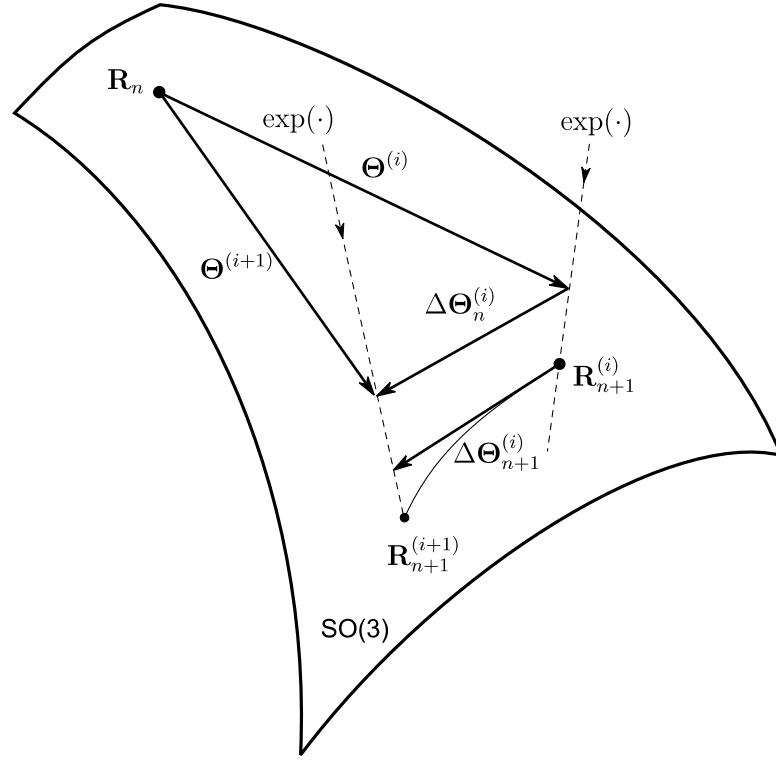
Przyrost rotacji jest parametryzowany przez kanoniczny wektor rotacji Θ , patrz Rozdz. 2.2.4. Wektor ten jest związany z tzw. *przestrzenią przyrostów rotacji względem danej rotacji \mathbf{R}* , lub *przestrzenią styczną do $SO(3)$ w punkcie \mathbf{R}* , zdefiniowaną następująco

$$T_{\mathbf{R}}SO(3) \doteq \{\tilde{\Theta}\mathbf{R} : \tilde{\Theta} \in so(3)\} = \{\mathbf{R}\tilde{\Theta} : \tilde{\Theta} \in so(3)\}, \quad (4.44)$$

gdzie $\tilde{\Theta}\mathbf{R}$ i $\mathbf{R}\tilde{\Theta}$ nazywamy odpowiednio *przestrzennym* i *materialnym zlinearyzowanym przyrostem rotacji*. Bezpośrednie dodawanie wektorów rotacji jest możliwe tylko wtedy, gdy należą one do tej samej przestrzeni stycznej.

Jeżeli mówimy o wektorze rotacji, to istotne jest aby określić z którą przestrzenią styczną jest on związany. We wszystkich omawianych w tym rozdziale algorytmach tensor rotacji parametryzowany będzie za pomocą kanonicznego wektora obrotu Θ , i zastosowana będzie prawa reguła składania rotacji.

W implementacji algorytmów dla rotacyjnych stopni swobody przedstawionych poniżej, w każdym kroku iteracji Newtona tensor rotacji \mathbf{R}_{n+1} jest uaktualniany od wartości $\mathbf{R}_{n+1}^{(i)}$ do wartości $\mathbf{R}_{n+1}^{(i+1)}$ poprzez złożenie go z przyrostem rotacji obliczonym w danej iteracji, należącym do przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{R}_{n+1}^{(i)}}SO(3)$. Obliczany jest również całkowity wektor przyrostu rotacji $\Theta^{(i+1)}$, należący do



Rysunek 4.6: Przyrost rotacji w różnych przestrzeniach stycznych.

przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{R}_n} SO(3)$. Opisane zależności są zilustrowane graficznie na Rys.(4.6).

Ważną relacją, potrzebną do obliczenia pochodnej funkcji residuum równania ruchu, wykorzystywanej w algorytmie Newtona, jest związek między wektorami przyrostu rotacji $\Delta \Theta_n^{(i)}$ i $\Delta \Theta_{n+1}^{(i)}$ należącymi do różnych przestrzeni stycznych, odpowiednio $T_{\mathbf{R}_n} SO(3)$ i $T_{\mathbf{R}_{n+1}^{(i)}} SO(3)$). Relacja ta, po zlinearyzowaniu, wyraża się wzorem

$$\Delta \Theta_{(n+1)} = \mathbf{T}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)}, \quad (4.45)$$

gdzie

$$\mathbf{T}(\Theta) = \frac{\sin(\|\Theta\|)}{\|\Theta\|} \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\sin \|\Theta\|}{\|\Theta\|}\right) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|/2}\right)^2 \tilde{\Theta}. \quad (4.46)$$

Szczegółowe wyprowadzenie podano w Dodatku A.4.

4.2.1 Algorytmy Newmarka dla rotacyjnych stopni swobody, A1 i A2

W niniejszym rozdziale omówione zostaną algorytmy dla równań dla ruchu obrotowego ciała sztywnego w opisie materialnym,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\widetilde{\mathbf{W}}, \quad (4.47)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{A}, \quad (4.48)$$

$$\mathbb{J}\mathbf{A} + \mathbf{W} \times \mathbb{J}\mathbf{W} = \mathbf{R}^T \mathbf{m}, \quad (4.49)$$

z warunkami początkowymi

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0, \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0. \quad (4.50)$$

Równania te zostały wyprowadzone w Rozdz.3.

Uzasadnienie zastosowania właśnie opisu materialnego jest następujące. Stosowany jest opis materialny, gdyż w algorytmie występuje dodawanie wielkości w różnych chwilach czasowych t_n i t_{n+1} i muszą one być wyrażone w tym samym układzie odniesienia. Jak pamiętamy z Rozdz.3, wzory (3.13) i (3.16), wektory przestrzennej prędkości i przyspieszenia kąтового mają w układzie ruchomym (lokalnym) takie same współrzędne, jak odpowiadające im wektory materialne w układzie globalnym. W przypadku użycia opisu przestrzennego, wielkości w różnych chwilach czasowych byłyby wyrażone w różnych (lokalnych) układach odniesienia, obróconych względem siebie o pewien przyrost rotacji, stąd ich bezpośrednie dodawanie, bez uprzedniego obrócenia do tego samego układu odniesienia, byłoby niemożliwe.

Przedstawimy teraz dwa algorytmy rozwiązywania równań ruchu obrotowego (4.47)-(4.50) wyprowadzone dla metody Newmarka, i oznaczone A1 i A2.

Przedział czasowy $[0, T]$ dzielimy na N podprzedziałów $[t_n, t_{n+1}]$, o równej długości $h = t_{n+1} - t_n$, dla $n = 0, 1, \dots, N-1$, i obliczamy przybliżone wartości funkcji \mathbf{R} , \mathbf{W} i \mathbf{A} w chwilach $t_n = hn$, $n = 1, 2, \dots, N$. Wartości te będziemy oznaczać przez \mathbf{R}_n , \mathbf{W}_n i \mathbf{A}_n . Wartości początkowe \mathbf{R}_0 i \mathbf{W}_0 znamy z warunków początkowych (4.50), natomiast wartość początkową \mathbf{A}_0 możemy znaleźć z równania (4.49) w następujący sposób

$$\mathbf{A}_0 = \mathbb{J}^{-1} \left(\mathbf{R}_0^T \mathbf{m} - \mathbf{W}_0 \times \mathbb{J}\mathbf{W}_0 \right). \quad (4.51)$$

A1. Podstawowy algorytm Newmarka dla rotacji

Pierwszy z algorytmów pochodzi z pracy [32], i jest to klasyczny algorytm Newmarka, z równaniem ruchu zapisanym w chwili t_{n+1} , jednak dla rotacyjnych stopni swobody.

Zmienne translacyjne występujące w równaniach (4.17)-(4.19), takie jak przemieszczenie $\mathbf{u} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n$, prędkość \mathbf{v} i przyspieszenie \mathbf{a} , zostają zastąpione

odpowiednimi zmiennymi opisującymi ruch rotacyjny: wektorem kanonicznym rotacji Θ , prędkością kątową \mathbf{W} i przyspieszeniem kątowym \mathbf{A} . W rezultacie otrzymujemy równania przedstawione w Tabeli 4.1. Algorytm ten oznaczamy jako A1.

Tabela 4.1: *Równania algorytmu A1.*

<p>Dane w chwili t_n: $\mathbf{R}_n \in SO(3)$, $\mathbf{W}_n \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^3$.</p> <p>1. Równanie ruchu w chwili czasu t_{n+1}:</p> $\mathbb{J} \mathbf{A}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \times \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{m}_{n+1}.$ <p>2. Aktualizacja rotacji:</p> $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \exp(\widetilde{\Theta}).$ <p>3. Materialny wektor przyrostu rotacji:</p> $\Theta = h \mathbf{W}_n + \frac{h^2}{2} [(1 - 2\beta) \mathbf{A}_n + 2\beta \mathbf{A}_{n+1}], \quad \text{gdzie } \beta \in [0, \frac{1}{2}].$ <p>4. Materialny wektor prędkości kątowej:</p> $\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + h [(1 - \gamma) \mathbf{A}_n + \gamma \mathbf{A}_{n+1}], \quad \text{gdzie } \gamma \in [0, 1].$

Zauważmy, że w porównaniu do sformułowania metody Newmarka dla translacyjnych stopni swobody, zamiast addytywnej aktualizacji przemieszczeń, stosujemy multiplikatywną aktualizację tensora rotacji, za pomocą prawego składania rotacji, patrz równanie 3 w Tabeli 4.1.

Dla wartości parametrów $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$, które były używane w obliczeniach, z równań 3 i 4 w Tabeli 4.1 otrzymujemy

$$\Theta = h \mathbf{W}_n + \frac{h^2}{2} \mathbf{A}^*, \quad \frac{\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n}{h} = \mathbf{A}^*, \quad (4.52)$$

gdzie $\mathbf{A}^* \doteq \frac{1}{2}(\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{n+1})$ to średnia arytmetyczna przyspieszenia na początku i na końcu kroku, patrz uwagi po (4.6) i (4.7).

Własności zachowawcze algorytmu A1

Algorytm A1 nie zachowuje energii kinetycznej ruchu obrotowego i wektora momentu pędu (zarówno normy jak i kierunku), co zostanie zilustrowane na przykładach

numerycznych w Rozdz.5.

Operatory styczne dla algorytmu A1

Operatory styczne dla algorytmu A1 wyprowadzono w Dodatku A.5.1. Gdy moment zewnętrzny jest niezależny od wektora rotacji Θ , wtedy operator styczny jest postaci,

$$\mathbf{K}(\Theta) = \frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h} \mathbb{J} - \gamma \widetilde{\mathbb{J}} \mathbf{W}_{n+1} + \gamma \widetilde{\mathbf{W}}_{n+1} \mathbb{J} \right) \mathbf{T}^{-1} - \left(\mathbf{R}_{n+1}^T \widetilde{\mathbf{m}}_{n+1} \right). \quad (4.53)$$

Dla momentu zewnętrznego zależnego od wektora rotacji Θ , w sposób zdefiniowany dla przykładu wirującego bąka z Rozdz.5.2, operator styczny jest postaci

$$\mathbf{K}_B(\Theta) = \mathbf{K}(\Theta) - \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{K}_{m1}(\Theta), \quad \mathbf{K}_{m1}(\Theta) = -Mgl \widetilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\alpha} \widetilde{\mathbf{e}}_3. \quad (4.54)$$

Zarówno postaci jak i wyprowadzenie obu tych operatorów są oryginalnym rezultatem rozprawy.

A2. Zmodyfikowany algorytm Newmarka dla rotacji

Kolejny algorytm pochodzi z pracy Simo i Wong'a [31] i jest to zmodyfikowana postać algorytmu A1. Modyfikacja polega na zapisaniu równania ruchu nie dla chwili czasu t_{n+1} , lecz dla chwili czasu $t_{n+\gamma} = (1-\gamma)t_n + \gamma t_{n+1}$. Algorytm ten oznaczony jest jako A2, komplet równań został przedstawiony w Tabeli 4.2.

Dla parametrów $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$, mamy $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})$, i algorytm ten nosi nazwę metody punktu środkowego, gdyż równanie ruchu zapisane jest dla chwili czasu $t_{n+\frac{1}{2}}$. Z równań 3 i 4 w Tabeli 4.2, otrzymujemy relacje (4.52), a więc wektor przyrostu rotacji Θ i prędkość kątową \mathbf{W}_{n+1} obliczamy wykorzystując średnią arytmetyczną przyspieszeń kątowych \mathbf{A}_n i \mathbf{A}_{n+1} .

Własności zachowawcze algorytmu A2. Można udowodnić, że algorytm A2, dla $\beta = \frac{1}{4}$ i $\gamma = \frac{1}{2}$ oraz dla zerowego momentu $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, zachowuje energię kinetyczną ciała i normę momentu pędu, [31].

Dla $\gamma = \frac{1}{2}$, równanie 1 algorytmu A2 ma postać

$$\mathbb{J} \mathbf{A}_{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}} \times \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{0}. \quad (4.55)$$

Przyspieszenie w punkcie środkowym

$$\mathbf{A}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{n+1}) = \frac{1}{h}(\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n), \quad (4.56)$$

Tabela 4.2: *Równania algorytmu A2.*

<p>Dane w chwili t_n: $\mathbf{R}_n \in SO(3)$, $\mathbf{W}_n \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^3$.</p> <p>1. Równanie ruchu w chwili czasu $t_{n+\gamma}$:</p> $\mathbb{J} \mathbf{A}_{n+\gamma} + \mathbf{W}_{n+\gamma} \times \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+\gamma} = \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma},$ <p>gdzie</p> $\mathbf{R}_{n+\gamma} = \mathbf{R}_n \exp(\gamma \tilde{\Theta}), \quad \mathbf{W}_{n+\gamma} = (1 - \gamma) \mathbf{W}_n + \gamma \mathbf{W}_{n+1}, \quad \mathbf{A}_{n+\gamma} = (1 - \gamma) \mathbf{A}_n + \gamma \mathbf{A}_{n+1}.$ <p>2. Aktualizacja rotacji:</p> $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \exp(\tilde{\Theta}).$ <p>3. Materialny wektor przyrostu rotacji:</p> $\Theta = h \mathbf{W}_n + \frac{h^2}{2} [(1 - 2\beta) \mathbf{A}_n + 2\beta \mathbf{A}_{n+1}], \quad \text{gdzie } \beta \in [0, \frac{1}{2}].$ <p>4. Materialnego wektor prędkości kątowej:</p> $\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + h [(1 - \gamma) \mathbf{A}_n + \gamma \mathbf{A}_{n+1}], \quad \text{gdzie } \gamma \in [0, 1].$
--

gdzie wykorzystano definicję $\mathbf{W}_{n+\gamma}$ podaną w algorytmie (równanie 4). Ponadto, mamy

$$\mathbf{W}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_n + \mathbf{W}_{n+1}). \quad (4.57)$$

Korzystamy z definicji materialnego wektora momentu pędu (3.28) zapisanego dla chwil czasu t_n i t_{n+1} ,

$$\mathbf{\Pi}_n = \mathbb{J} \mathbf{W}_n, \quad \mathbf{\Pi}_{n+1} = \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1}. \quad (4.58)$$

Podstawiając (4.56) i (4.57) do (4.55) i korzystając z (4.58) otrzymujemy równanie

$$(\mathbf{\Pi}_{n+1} - \mathbf{\Pi}_n) + \frac{h}{4} (\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{W}_n) \times (\mathbf{\Pi}_{n+1} + \mathbf{\Pi}_n) = \mathbf{0}. \quad (4.59)$$

Zachowywanie normy momentu pędu. Mnożąc obie strony równania (4.59) skalarnie przez $(\mathbf{\Pi}_{n+1} + \mathbf{\Pi}_n)$ otrzymujemy

$$(\mathbf{\Pi}_{n+1} - \mathbf{\Pi}_n) \cdot (\mathbf{\Pi}_{n+1} + \mathbf{\Pi}_n) = \|\mathbf{\Pi}_{n+1}\|^2 - \|\mathbf{\Pi}_n\|^2 = \mathbf{0}, \quad (4.60)$$

czyli zachowywanie normy materialnego wektora momentu pędu. Stąd, korzystając z zależności między przestrzennym i materialnym wektorem momentu pędu (3.28), tzn.

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1}\boldsymbol{\Pi}_{n+1}, \quad \boldsymbol{\pi}_n = \mathbf{R}_n\boldsymbol{\Pi}_n, \quad (4.61)$$

oraz ponieważ transformacje ortogonalne nie zmieniają długości wektora, otrzymujemy

$$\|\boldsymbol{\pi}_{n+1}\| = \|\boldsymbol{\pi}_n\|. \quad (4.62)$$

Zatem norma materialnego i przestrzennego wektora momentu pędu jest zachowywana przez algorytm A2.

Zachowywanie energii kinetycznej. Mnożąc obie strony równania (4.59) skalarnie przez $(\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{W}_n)$ i korzystając z symetrii tensora bezwładności \mathbb{J} , otrzymujemy

$$(\boldsymbol{\Pi}_{n+1} - \boldsymbol{\Pi}_n) \cdot (\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{W}_n) = \mathbf{W}_{n+1} \cdot (\mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1}) - \mathbf{W}_n \cdot (\mathbb{J} \mathbf{W}_n) = \mathbf{0}. \quad (4.63)$$

Korzystając z definicji energii kinetycznej ruchu obrotowego ciała sztywnego (3.56)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot (\mathbb{J} \mathbf{W}), \quad (4.64)$$

otrzymujemy

$$E_{n+1}^{kin} = E_n^{kin}. \quad (4.65)$$

Zatem energia kinetyczna ciała jest również zachowywana przez algorytm A2.

Niezachowywanie kierunku momentu pędu. Nawet dla metody punktu środkowego, algorytm A2 nie zachowuje kierunku przestrzennego wektora momentu pędu $\boldsymbol{\pi}$,

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} \neq \boldsymbol{\pi}_n, \quad (4.66)$$

co zostanie pokazane na przykładach numerycznych.

Operatory styczne dla algorytmu A2

Operatory styczne dla algorytmu A2 wyprowadzono w Dodatku A.5.2. Gdy moment zewnętrzny jest niezależny od wektora rotacji $\boldsymbol{\Theta}$, wtedy operator styczny jest postaci,

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta}) = \gamma \left[\frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h} \mathbb{J} - \gamma \widetilde{\mathbb{J}} \mathbf{W}_{n+\gamma} + \gamma \widetilde{\mathbf{W}}_{n+\gamma} \mathbb{J} \right) \mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}) - \left(\widetilde{\mathbf{R}}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma} \right) \right]. \quad (4.67)$$

Dla momentu zewnętrznego zależnego od wektora rotacji $\boldsymbol{\Theta}$ w sposób zdefiniowany dla przykładu wirującego bąka z Rozdz.5.2, operator styczny jest postaci

$$\mathbf{K}_B(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta}) - \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{K}_{m\gamma}(\boldsymbol{\Theta}), \quad \mathbf{K}_{m\gamma}(\boldsymbol{\Theta}) = -Mgl \gamma \widetilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\gamma} \widetilde{\mathbf{e}}_3. \quad (4.68)$$

Zarówno postaci jak i wyprowadzenie obu tych operatorów są oryginalnym rezultatem rozprawy.

4.2.2 Algorytm zachowujący energię i moment pędu A3

Opis algorytmu

Przedstawimy teraz algorytm, pochodzący z pracy [31], którego konstrukcja zapewnia zachowywanie wektora momentu pędu przy braku działania momentów zewnętrznych. Ponadto dla pewnych wartości parametrów występujących w jego definicji, zachowuje on również energię kinetyczną ciała.

Pomysł wykorzystany w konstrukcji tego algorytmu jest podobny do metody ważonych residuów przedstawionej w Rozdz.4.1.2 dla problemów z przemieszczeniowymi stopniami swobody. Polega on na zastąpieniu równania ruchu dla danej chwili czasu, i różnej w omówionych wcześniej algorytmach Newmarka A1 i A2, równaniem ruchu w postaci całkowej.

Przypomnijmy, że druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego, w układzie inercjalnym przyjmuje postać $d\boldsymbol{\pi}/dt = \mathbf{m}$, patrz (3.38). Całkując to równanie stronami względem czasu w przedziale $[t_n, t_{n+1}]$ otrzymamy

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} - \boldsymbol{\pi}_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{m}(t)dt, \quad (4.69)$$

gdzie

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1} - \boldsymbol{\pi}_n = \mathbf{R}_{n+1} \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_n \mathbb{J} \mathbf{W}_n.$$

Całka po prawej stronie równania (4.69) nazywana jest *impulsem momentu*. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej można ją zastąpić wyrażeniem $h\mathbf{m}_{n+\alpha}$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Zauważmy, że dla tak sformułowanego równania, jeżeli moment siły w przedziale $[t_n, t_{n+1}]$ będzie równy zeru, to moment pędu będzie zachowany, tzn.

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{0} \quad \text{dla } t \in [t_n, t_{n+1}] \quad \implies \quad \boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n.$$

Algorytm zbudowany w oparciu o równanie (4.69) oznaczony jest w pracy jako A3, komplet równań przedstawiony jest w Tabeli 4.3.

Własności algorytmu A3

Zgodnie z konstrukcją algorytmu, dla dowolnych wartości parametrów $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ i $\gamma \in (0, 1]$, przy braku działania sił zewnętrznych w przedziale czasu $[t_n, t_{n+1}]$, zachowywany jest przestrzenny moment pędu $\boldsymbol{\pi}$. Można udowodnić, że algorytm A3 zachowuje również energię kinetyczną ciała, jeżeli przyjmiemy dodatkowe założenia co do wartości parametrów β i γ .

Twierdzenie 4.2.1 *Niech w przedziale czasu $[t_n, t_{n+1}]$ wypadkowy moment działający na ciało będzie równy zeru. Wówczas algorytm A3 zachowuje energię kinetyczną ciała wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}$, tzn.*

$$E_{n+1}^{kin} = E_n^{kin} \quad \iff \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}. \quad (4.70)$$

Tabela 4.3: *Równania algorytmu A3.*

Dane w chwili t_n : $\mathbf{R}_n \in SO(3)$, $\mathbf{W}_n \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^3$.

1. Równanie ruchu w postaci całkowej:

$$\mathbf{R}_{n+1} \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_n \mathbb{J} \mathbf{W}_n - h \mathbf{m}_{n+\alpha} = \mathbf{0},$$

$$\text{gdzie } \alpha \in (0, 1], \quad \alpha = \begin{cases} \beta/\gamma, & \text{jeśli } \beta/\gamma \leq 1 \\ 1, & \text{jeśli } \beta/\gamma > 1 \end{cases},$$

$$\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad \gamma \in (0, 1].$$

2. Aktualizacja rotacji:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \exp(\tilde{\Theta}).$$

3. Materialny wektor prędkości kątowej:

$$\mathbf{W}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \Theta - \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\mathbf{W}_n + \frac{1}{2} h \mathbf{A}_n\right).$$

4. Materialny wektor przyspieszenia kątowego:

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{1}{\gamma h} (\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{A}_n.$$

Dowód: Zapiszmy, dla uproszczenia, równanie 3 algorytmu z Tabeli 4.3 w następujący sposób:

$$\mathbf{W}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \Theta - \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{W}_n^*, \quad (4.71)$$

gdzie

$$\mathbf{W}_n^* = \mathbf{W}_n + \frac{h}{2} \mathbf{A}_n.$$

Zgodnie ze wzorem (3.58) i (3.23), różnica energii kinetycznej ciała z kroku $n + 1$ i n wyraża się wzorem

$$E_{n+1}^{kin} - E_n^{kin} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\pi}_{n+1} \cdot \mathbf{w}_{n+1} - \boldsymbol{\pi}_n \cdot \mathbf{w}_n). \quad (4.72)$$

Korzystając z własności zachowywania momentu pędu przez algorytmu A3, tzn. $\boldsymbol{\pi}_{n+1} = \boldsymbol{\pi}_n$, mamy

$$E_{n+1}^{kin} - E_n^{kin} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}_n \cdot (\mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n). \quad (4.73)$$

Przekształcając wyrażenie w nawiasie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{n+1} - \mathbf{w}_n &= \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_n \mathbf{W}_n = \mathbf{R}_n \exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_n \mathbf{W}_n \\ &= \mathbf{R}_n \left[\exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n \right] \\ &= \mathbf{R}_n \left[\exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \left(\frac{\gamma}{\beta h} \boldsymbol{\Theta} - \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{W}_n^* \right) - \mathbf{W}_n \right] \\ &= \mathbf{R}_n \left[\frac{\gamma}{\beta h} \boldsymbol{\Theta} - \exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \mathbf{W}_n^* - \mathbf{W}_n \right] \\ &= \mathbf{R}_n \left[\mathbf{W}_{n+1} - \exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \mathbf{W}_n + \left(\exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) - \mathbf{I} \right) \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{W}_n^* \right] \\ &= \mathbf{R}_n \mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_n) \mathbf{W}_n^*, \end{aligned} \quad (4.74)$$

gdzie wykorzystano własność $\exp(\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}) \boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Theta}$. Podstawiając (4.74) do (4.73) i zamieniając $\boldsymbol{\pi}_n$ na $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ w niektórych składnikach, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2(E_{n+1}^{kin} - E_n^{kin}) &= \boldsymbol{\pi}_n \cdot (\mathbf{R}_n \mathbf{W}_{n+1}) - \boldsymbol{\pi}_{n+1} \cdot (\mathbf{R}_{n+1} \mathbf{W}_n) + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \boldsymbol{\pi}_{n+1} \cdot (\mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_n) \mathbf{W}_n^* \\ &= \boldsymbol{\Pi}_n \cdot \mathbf{W}_{n+1} - \boldsymbol{\Pi}_{n+1} \cdot \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\boldsymbol{\Pi}_{n+1} - \boldsymbol{\Pi}_n) \cdot \mathbf{W}_n^* \\ &= (\mathbb{J} \mathbf{W}_n) \cdot \mathbf{W}_{n+1} - (\mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1}) \cdot \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\boldsymbol{\Pi}_{n+1} - \boldsymbol{\Pi}_n) \cdot \mathbf{W}_n^* \\ &= \left(2 - \frac{\gamma}{\beta} \right) (\boldsymbol{\Pi}_{n+1} - \boldsymbol{\Pi}_n) \cdot \mathbf{W}_n^*, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystano zależność $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\pi}$, wzór (3.28), oraz symetrię tenora \mathbb{J} . Stąd,

$$E_{n+1}^{kin} - E_n^{kin} = 0 \iff \frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{2}. \quad (4.75)$$

□

Warto zauważyć, że zachowanie energii kinetycznej implikuje bezwarunkową stabilność algorytmu w sensie energetycznym, patrz [29], [13], [14].

W obliczeniach stosowane są $\gamma = 1$ i $\beta = \frac{1}{2}$, i spełniają one powyżej wyprowadzoną równość. Dla tych wartości parametrów, równanie 3 z Tabeli 4.3, przyjmuje postać $\mathbf{W}_{n+1} = \frac{2}{h} \boldsymbol{\Theta} - \mathbf{W}_n$, z której otrzymujemy

$$\boldsymbol{\Theta} = h \frac{\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{W}_n}{2}, \quad (4.76)$$

czyli, że wektor rotacji Θ dla kroku jest powiązany ze średnią wartości prędkości kątowej na początku i na końcu kroku.

Operatory styczne dla algorytmu A3

Operatory styczne dla algorytmu A3 wyprowadzono w Dodatku A.5.3. Gdy moment zewnętrzny jest niezależny od wektora rotacji Θ , wtedy operator styczny jest postaci,

$$\mathbf{K}(\Theta) = \Lambda_{n+1} \left[\frac{\gamma}{\beta h} \mathbb{J} \mathbf{T}^{-1}(\Theta) - \widetilde{\mathbb{W}}_{n+1} \right]. \quad (4.77)$$

Postać tę podano, jednak bez wyprowadzenia, w pracy [31]. Dla momentu zewnętrznego zależnego od wektora rotacji Θ , w sposób zdefiniowany dla przykładu wirującego bąka z Rozdz.5.2, operator styczny jest postaci

$$\mathbf{K}_B(\Theta) = \mathbf{K}(\Theta) - h \mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta), \quad \mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta) = -Mgl \alpha \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (4.78)$$

Zarówno postać jak i wyprowadzenie tego operatora są oryginalnym rezultatem rozprawy.

Implementacja algorytmu A3

Poniżej przedstawiamy implementację algorytmu A3, opisaną w [31].

Dane po kroku n -tym (w chwili t_n):

- $\boldsymbol{\pi}_n$ – przestrzenny wektor momentu pędu,
- \mathbf{W}_n – materialny wektor prędkości kątowej,
- \mathbf{A}_n – materialny wektor przyspieszenia kątowego,
- $(x_0, \mathbf{x})_n$ – parametry Eulera związane z macierzą rotacji \mathbf{R}_n .

1. Obliczamy pierwsze przybliżenia wartości poszukiwanych wielkości (predyktory):

- materialny wektor prędkości kątowej:

$$\mathbf{W}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{W}_n + (1 - \gamma)h\mathbf{A}_n$$

- materialny wektor przyrostu rotacji:

$$\Theta^{(0)} = h\mathbf{W}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \mathbf{A}_n$$

- parametry Eulera dla $\Theta^{(0)}$:

$$\Theta^{(0)} \mapsto (q_0, \mathbf{q})^{(0)}$$

- aktualizacja parametrów Eulera związanych z macierzą rotacji $\mathbf{R}_{n+1}^{(0)}$

$$(x_0, \mathbf{x})_{n+1}^{(0)} = (x_0, \mathbf{x})_n \circ (q_0, \mathbf{q})^{(0)}$$

gdzie \circ jest operatorem mnożenia kwaternionów.

- macierz rotacji dla kwaternionu

$$(x_0, \mathbf{x})_{n+1}^{(0)} \mapsto \mathbf{R}_{n+1}^{(0)}$$

- przestrzenny wektor momentu pędu

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(0)} \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1}^{(0)}$$

2. Dane na początku $i + 1$ -szej iteracji pętli Newtona, dla kroku czasowego t_{n+1} :

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(i)}, (x_0, \mathbf{x})_{n+1}^{(i)}, \mathbf{R}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{W}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{\Theta}^{(i)}, (q_0, \mathbf{q})^{(i)}$$

- Obliczamy residuum całkowego równania ruchu po iteracji i - tej:

$$\mathbf{r}_{n+1}^{(i)} = h \mathbf{m}_{n+\alpha} + \boldsymbol{\pi}_n - \boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(i)},$$

gdzie $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ jest wartością momentu pędu w chwili $t_{n+\alpha}$, lub, jeżeli moment \mathbf{m} jest zadany jedynie w dyskretnych chwilach czasu t_n , $n = 0, \dots, N$, możemy użyć interpolacji liniowej:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{n+\alpha} &= (1 - \alpha) \mathbf{m}_n + \alpha \mathbf{m}_{n+1} \\ \alpha &= \begin{cases} \beta/\gamma, & \text{jeśli } \beta/\gamma \leq 1 \\ 1, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \end{aligned}$$

- Badamy zbieżność:

Jeżeli $\|\mathbf{r}_{n+1}^{(i)}\| \leq \text{tolerancja}$, wówczas:

(a) Obliczamy materialny wektor przyspieszenia kąowego:

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{\mathbf{W}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{W}_n}{\gamma h} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{A}_n$$

(b) Podstaw $n = n + 1$ i przejdź do kroku 1.

w przeciwnym razie przejdź do kroku 3.

3. Obliczamy macierz styczną $\mathbf{K}_{n+1}^{(i)}$ i przyrost wektora rotacji

- Obliczamy $\mathbf{K}_{n+1}^{(i)}$:

$$\mathbf{K}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(i)} \left[\frac{\gamma}{\beta h} \mathbb{J} \mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}^{(i)}) - \mathbb{J} \widetilde{\mathbf{W}}_{n+1}^{(i)} \right]$$

- Obliczamy przyrost wektora rotacji $\Delta\Theta^{(i)}$ od chwili $t_{n+1}^{(i)}$ do $t_{n+1}^{(i+1)}$:

$$\Delta\Theta^{(i)} = [\mathbf{K}_{n+1}^{(i)}]^{-1} \mathbf{r}_{n+1}^{(i)}$$

- Obliczamy parametry Eulera dla $\Delta\Theta^{(i)}$:

$$\Delta\Theta^{(i)} \mapsto (\Delta q_0, \Delta\mathbf{q})^{(i)}$$

4. Uaktualniamy konfigurację i prędkość kątową dla danego przyrostu $\Delta\Theta^{(i)}$:

- Parametry Eulera związane z macierzą rotacji $\mathbf{R}_{n+1}^{(i+1)}$:

$$(x_0, \mathbf{x})_{n+1}^{(i+1)} = (x_0, \mathbf{x})_{n+1}^{(i)} \circ (\Delta q_0, \Delta\mathbf{q})^{(i)}$$

- Parametry Eulera związane z wektorem przyrostu rotacji $\Theta^{(i+1)}$:

$$(q_0, \mathbf{q})^{(i+1)} = (q_0, \mathbf{q})^{(i)} \circ (\Delta q_0, \Delta\mathbf{q})^{(i)}$$

- Ekstrakcja materialnego wektora przyrostu rotacji z kwaternionu:

$$(q_0, \mathbf{q})^{(i+1)} \mapsto \Theta^{(i+1)}$$

- Materialna prędkość kątowa:

$$\mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{W}_{n+1}^{(i)} + \frac{\gamma}{\beta h} (\Theta^{(i+1)} - \Theta^{(i)})$$

- Macierz rotacji:

$$(x_0, \mathbf{x})_{n+1}^{(i+1)} \mapsto \mathbf{R}_{n+1}^{(i+1)}$$

- Przestrzenny moment pędu:

$$\boldsymbol{\pi}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(i+1)} \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1}^{(i+1)}$$

5. Podstawiamy $i = i + 1$ i przechodzimy do kroku 2.

Testy numeryczne wykazują, że najlepsze rezultaty otrzymujemy dla $\beta = \frac{1}{2}$ i $\gamma = 1$.

Jawny algorytm A4

Jawną (ang. *explicit*) postać algorytmu A3 uzyskujemy dla $\beta = 0$, patrz [31], i oznaczamy jako A4. Równania dla algorytmu A4 przedstawiono w Tabeli 4.4.

Wektor przyrostu rotacji obliczono jak w algorytmach Newmarka, np. z równania 3 w Tabeli 4.1 dla algorytmu A1, lecz przyjmując $\beta = 0$. Widzimy, że jest to predyktor obliczony dla wartości w chwili t_n . Wektor prędkości kątowej \mathbf{W}_{n+1} obliczamy z całkowego równania ruchu.

Tabela 4.4: **Równania dla algorytmu A4**

Dane w chwili t_n : $\mathbf{R}_n \in SO(3)$, $\mathbf{W}_n \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^3$.

1. Materialny wektor przyrostu rotacji:

$$\Theta = h \mathbf{W}_n + \frac{h^2}{2} \mathbf{A}_n.$$

2. Aktualizacja rotacji:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \exp(\widetilde{\Theta}).$$

3. Materialny wektor prędkości kątowej:

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbb{J}^{-1} \exp(-\widetilde{\Theta}) (\mathbb{J} \mathbf{W}_n + h \mathbf{R}_n^T \mathbf{m}_{n+\frac{1}{2}}).$$

4. Materialny wektor przyspieszenia kątowego:

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{1}{\gamma h} (\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n) + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{A}_n, \quad \text{gdzie } \gamma \in (0, 1].$$

Algorytm A4 przez swoją konstrukcję zachowuje przestrzenny wektor momentu pędu, w przypadku zerowego momentu zewnętrznego, podobnie jak algorytm A3. Wynika to z zastosowania równania 3, będącego równaniem ruchu w postaci całkowej. Algorytm ten nie zachowuje energii kinetycznej ruchu obrotowego, co zostało zilustrowane w przykładzie numerycznym zamieszczonym w Rozdz.5.

Symulacje numeryczne pokazują, że, podobnie jak w przypadku jawnego algorytmu A3, najlepsze rezultaty otrzymywane są dla $\gamma = 1$.

Rozdział 5

Przykłady numeryczne z dynamiki ciała sztywnego

Poniżej prezentujemy przykłady numeryczne rozwiązane za pomocą algorytmów A1, A2 i A3 dla rotacyjnych stopni swobody, opisanych w Rozdz.4.2. Szczególną uwagę zwrócono na własności konserwujące badanych algorytmów oraz na ich związek z dokładnością wyników.

5.1 Niestabilna rotacja wokół osi o pośrednim momencie bezwładności

Wiadomo, że rotacja bryły sztywnej jest stabilna jedynie wokół osi o największym i najmniejszym momencie bezwładności. W poniższym przykładzie ciało sztywne jest wprowadzane w ruch obrotowy najpierw wokół osi o pośrednim momencie bezwładności, a następnie ruch poddany jest lekkiemu zaburzeniu, poprzez zadziaływanie momentem siły działającym wzdłuż osi o największym momencie bezwładności. Następnie ciało porusza się swobodnie, bez oddziaływania zewnętrznych momentów. Jak wiadomo, od tej chwili zarówno energia kinetyczna jak i wektor momentu pędu powinny być stałe (zachowane).

Przyjęte wartości wielkości fizycznych podane są poniżej. Moment zewnętrzny:

$$\mathbf{m} = \begin{cases} C_1 \mathbf{e}_1 & 0 \leq t \leq t_z \\ C_2 \mathbf{e}_2 & t_z \leq t \leq t_z + h \\ \mathbf{0} & t > t_z + h \end{cases},$$

gdzie C_1 i C_2 są pewnymi stałymi, natomiast \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 są wersorami nieruchomego układu odniesienia. Przyjęte wartości stałych C_1 i C_2 oraz pozostałych wielkości wynoszą

$$t_z + h = 2, \quad C_1 = 20, \quad h C_2 = 0.2, \quad \mathbb{J} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przyjęto następujące warunki początkowe:

$$\boldsymbol{\chi}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}(0) = \mathbf{0}.$$

Obliczenia zostały wykonane przy użyciu trzech algorytmów niejawnych A1, A2 i A3 oraz algorytmu jawnego A4.

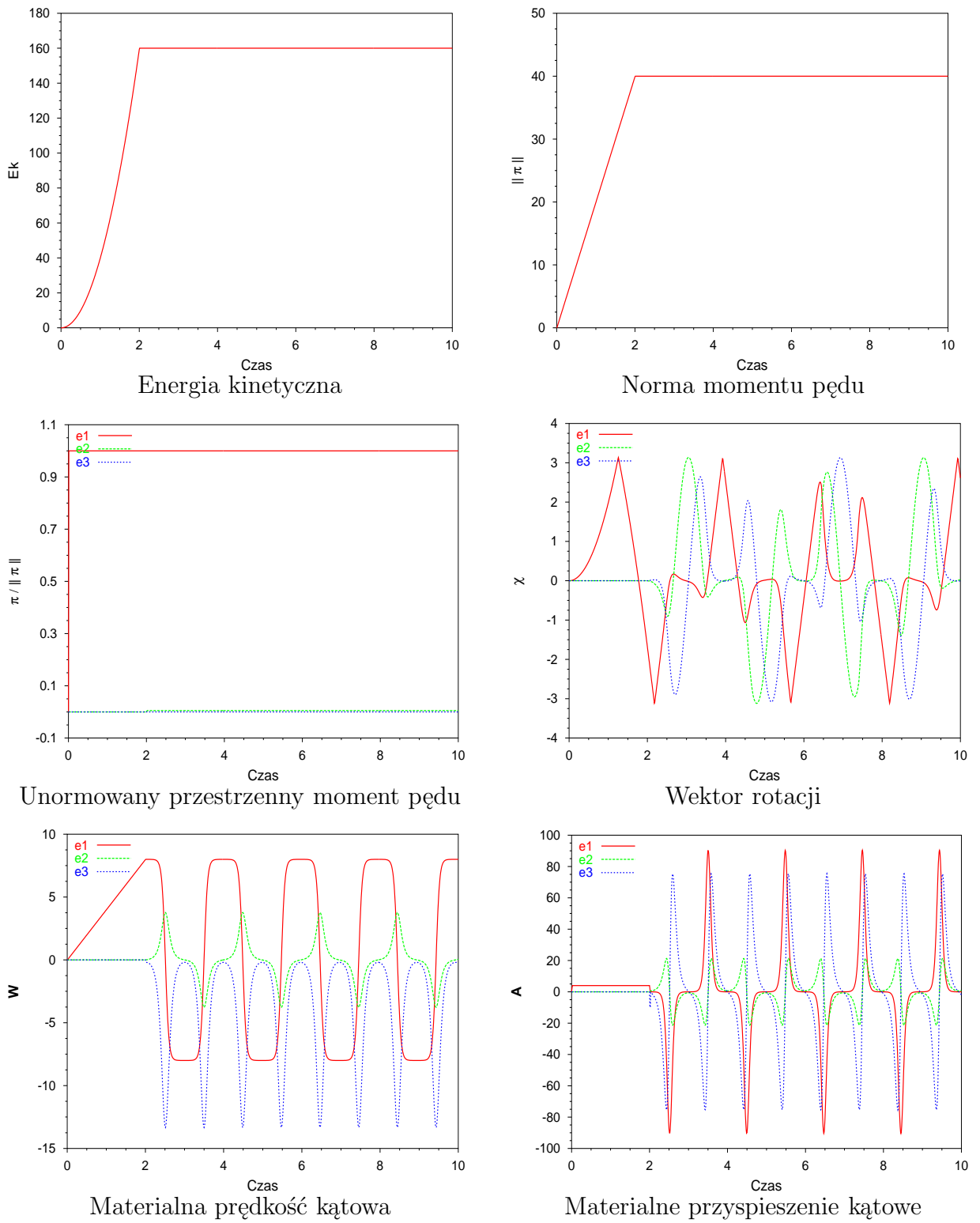
Dla małej długości kroku, tzn. $h = 0.01$ dla algorytmów A1, A2 i A3 oraz $h = 0.001$ dla algorytmu A4, uzyskano podobne rezultaty, które pokazano na Rys.5.1. Widzimy, że podczas ruchu swobodnego, tzn. dla $t > 2$, energia kinetyczna, norma momentu pędu i unormowany przestrzenny moment pędu są zachowane przez wszystkie algorytmy.

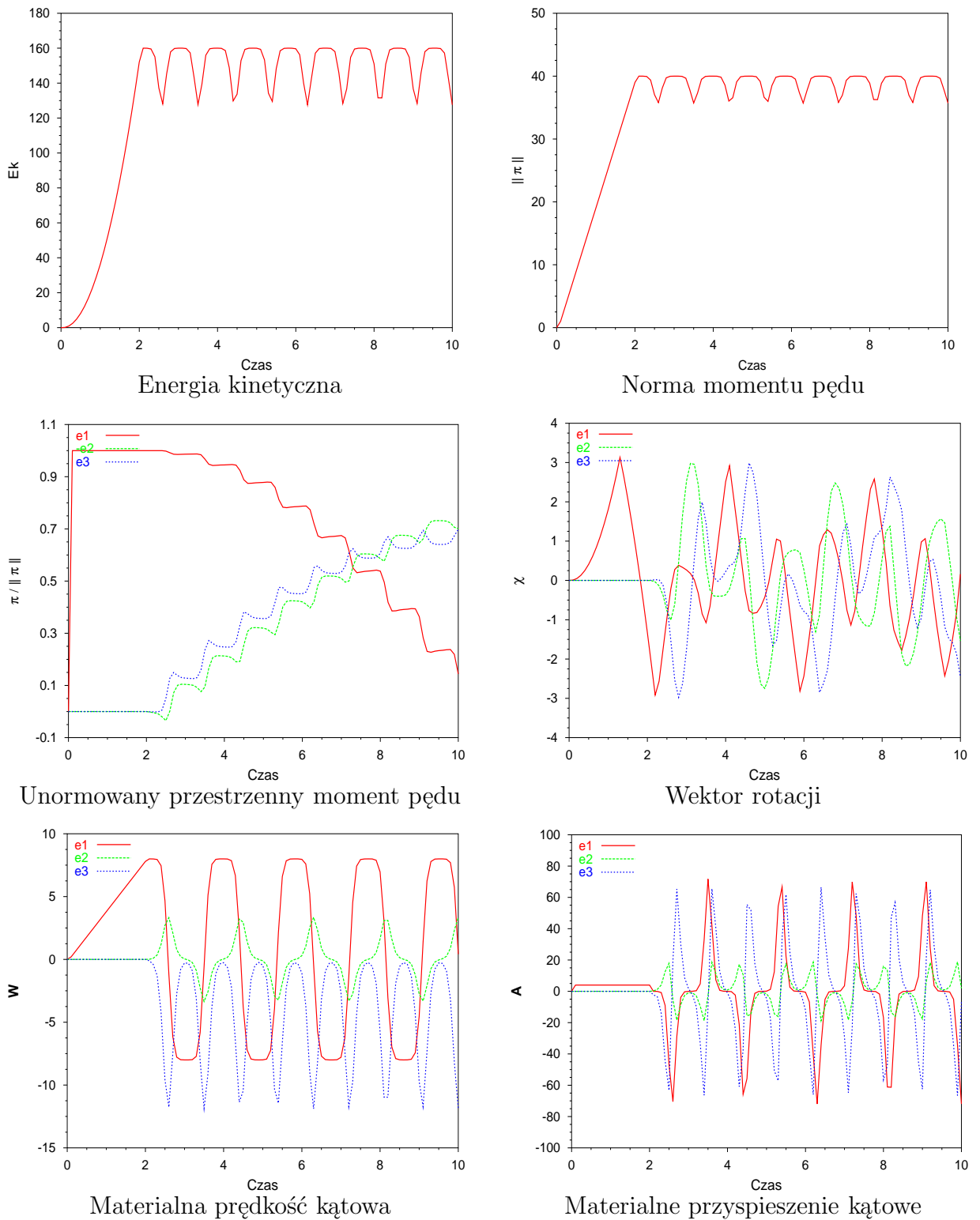
Dla większych wartości długości kroku pojawiają się różnice w rozwiązaniach. Dla algorytmów niejawnych A1, A2 i A3 i $h = 0.1$ wykresy pokazano na Rys.5.2, 5.3 i 5.4. Dla algorytmu jawnego A4 i $h = 0.01$ wyniki pokazano na Rys.5.5. Wyraźnie widoczne są następujące właściwości zachowawcze poszczególnych algorytmów:

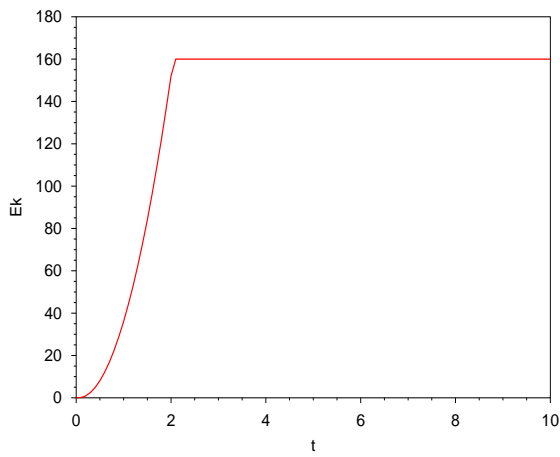
1. energia kinetyczna jest zachowywana przez algorytmy A2 i A3,
2. norma momentu pędu jest zachowywana przez algorytmy A2, A3 i A4,
3. moment pędu jest zachowywany tylko przez algorytmy A3 i A4.

Wektory rotacji $\boldsymbol{\chi}$ i materialnej prędkości kątowej \mathbf{W} otrzymane dla algorytmu A3 z $\beta = \frac{1}{2}$ i $\gamma = 1$, i przy dwóch długościach kroku: $h = 0.01$ i $h = 0.1$, pokazano na Rys.5.6. Widzimy wyraźnie, że przy większej długości kroku, algorytm A3 może dawać bardzo niedokładne rozwiązania, pomimo jego własności zachowawczych i bardzo dobrej zbieżności.

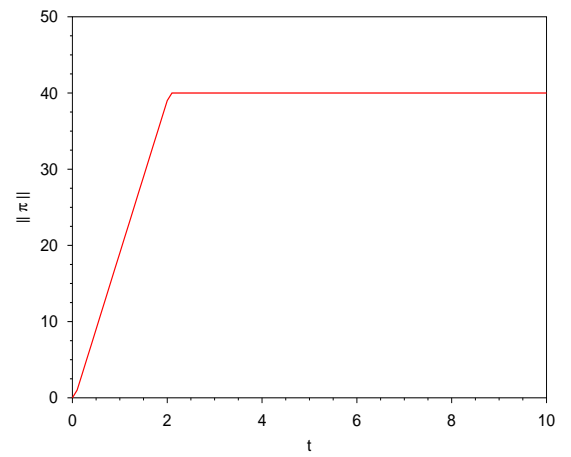
Dla lepszego zobrazowania charakteru ruchu zachodzącego w tym przykładzie, na Rys.5.7 pokazano kolejne położenia samolotu podlegającego identycznemu ruchowi jak analizowane ciało sztywne.

Rysunek 5.1: Algorytm A3: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $h = 0.01$

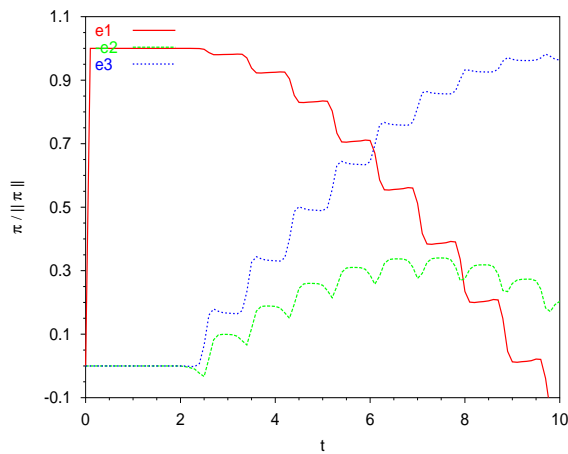
Rysunek 5.2: Algorytm A1: $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $h = 0.1$



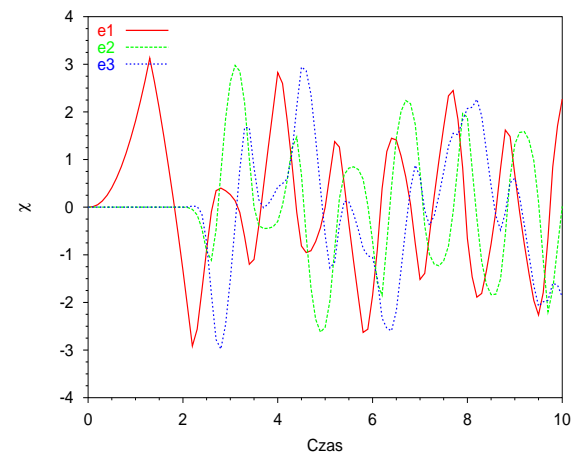
Energia kinetyczna



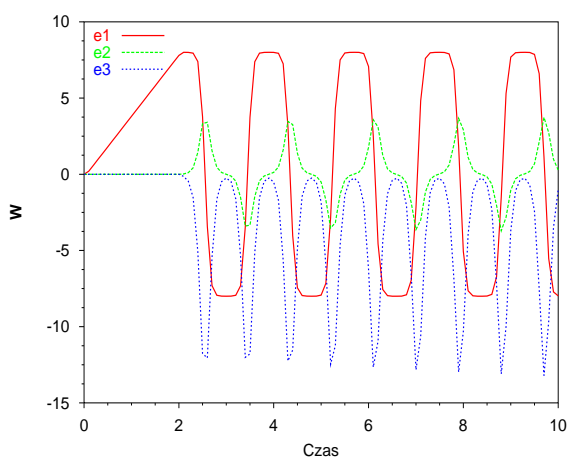
Norma momentu pędu



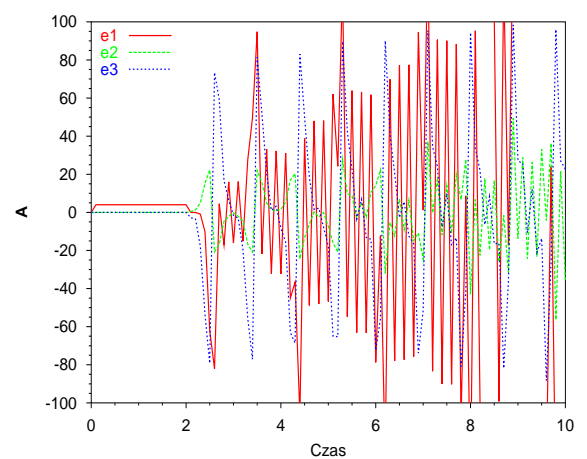
Unormowany przestrzenny moment pędu



Wektor rotacji

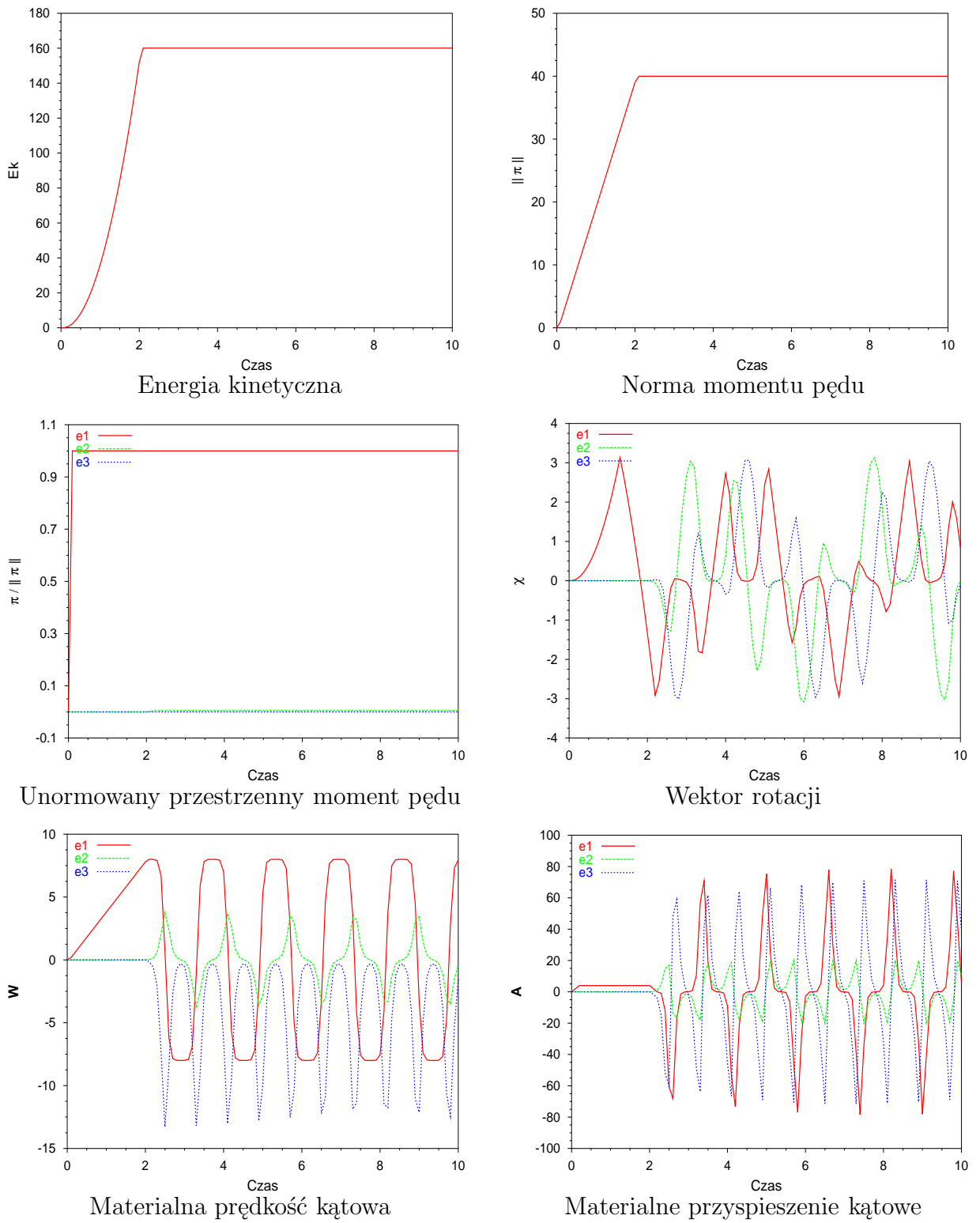


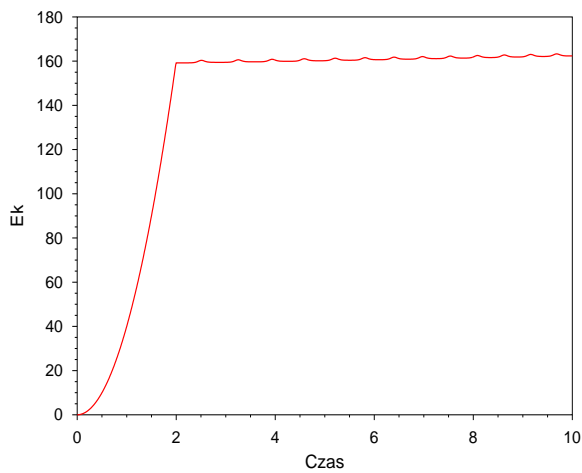
Materialna prędkość kątowna



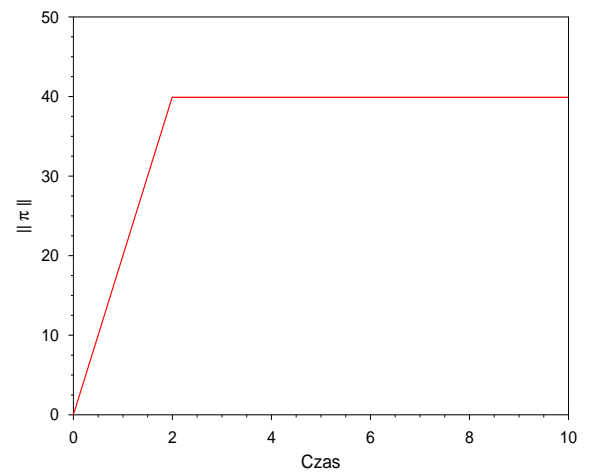
Materialne przyspieszenie kątowne

Rysunek 5.3: Algorytm A2: $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $h = 0.1$

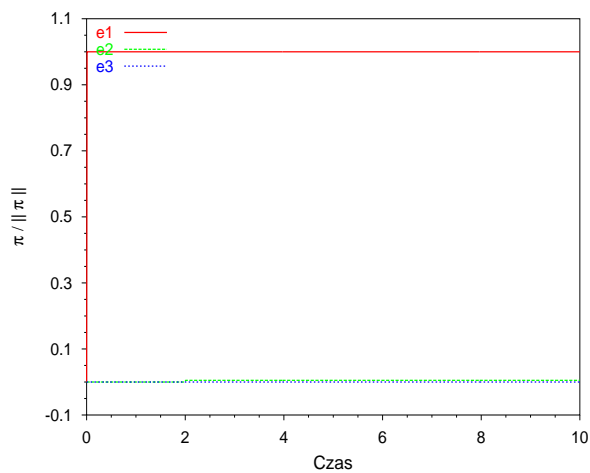
Rysunek 5.4: Algorytm A3: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $h = 0.1$



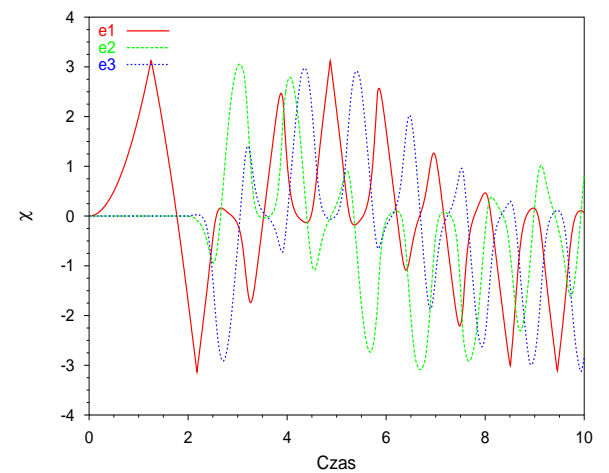
Energia kinetyczna



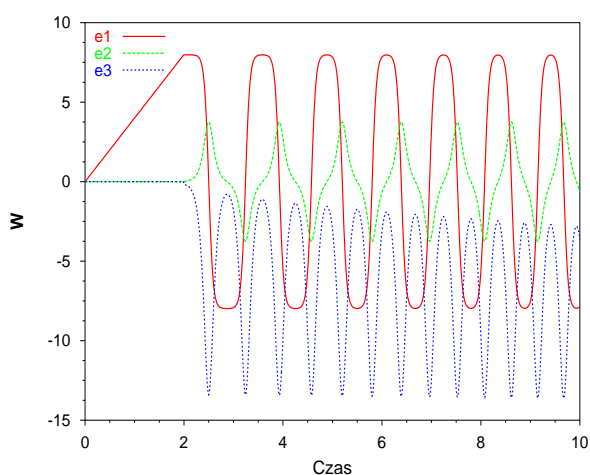
Norma momentu pędu



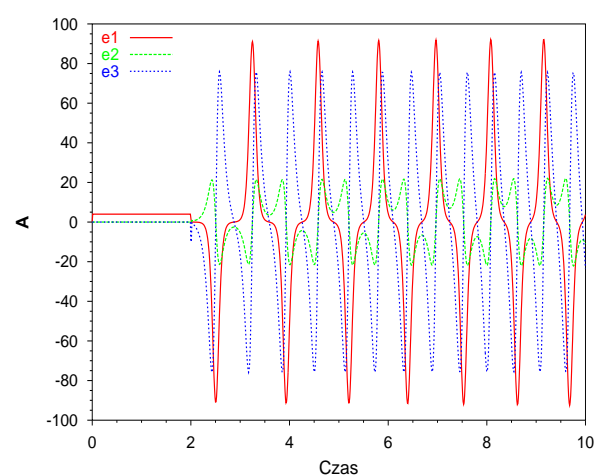
Unormowany przestrzenny moment pędu



Wektor rotacji

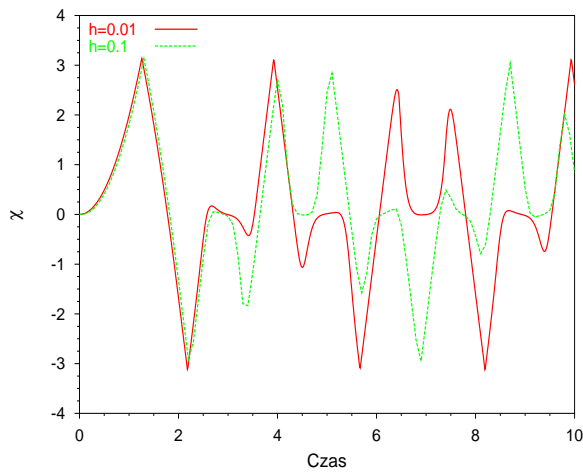


Materiałna prędkość kątowna

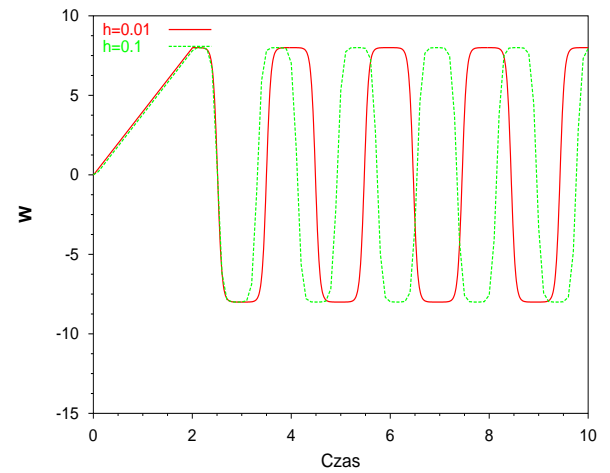


Materiałne przyspieszenie kątowne

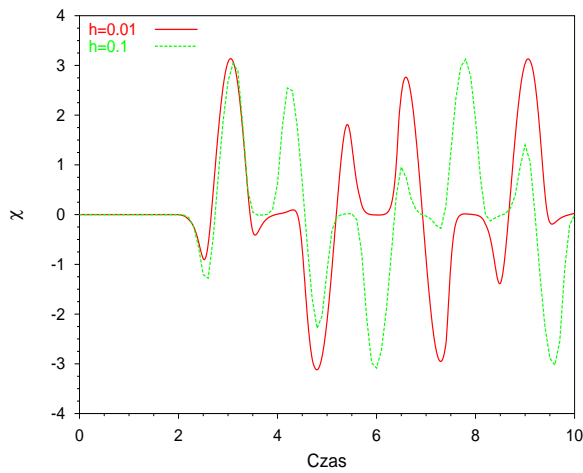
Rysunek 5.5: Algorytm A4: $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $h = 0.01$



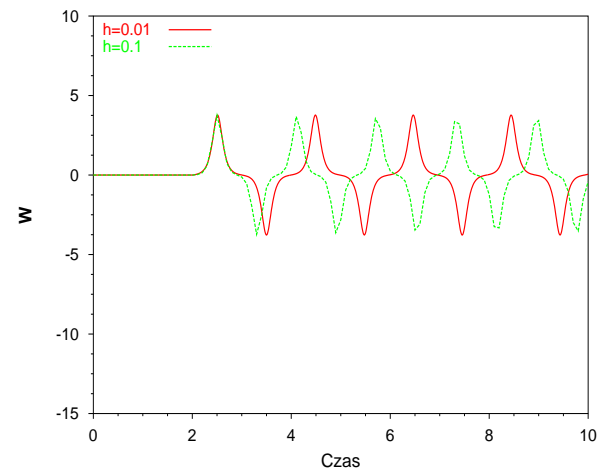
Wektor rotacji. Współrzędna e1



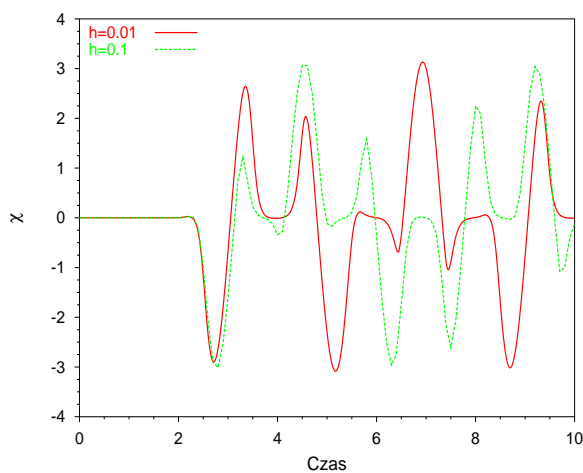
Materialna prędkość kątowna. Współrzędna e1



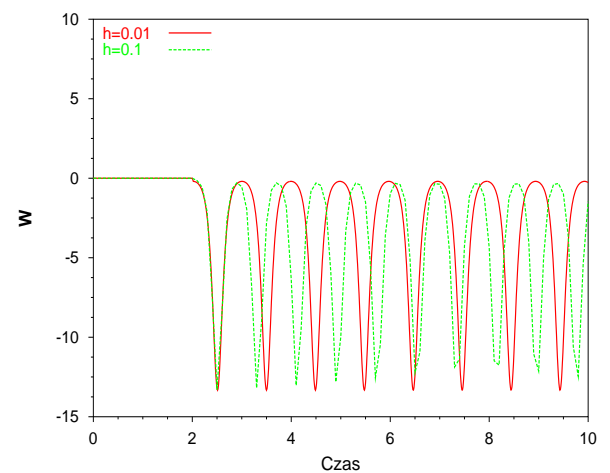
Wektor rotacji. Współrzędna e2



Materialna prędkość kątowna. Współrzędna e2

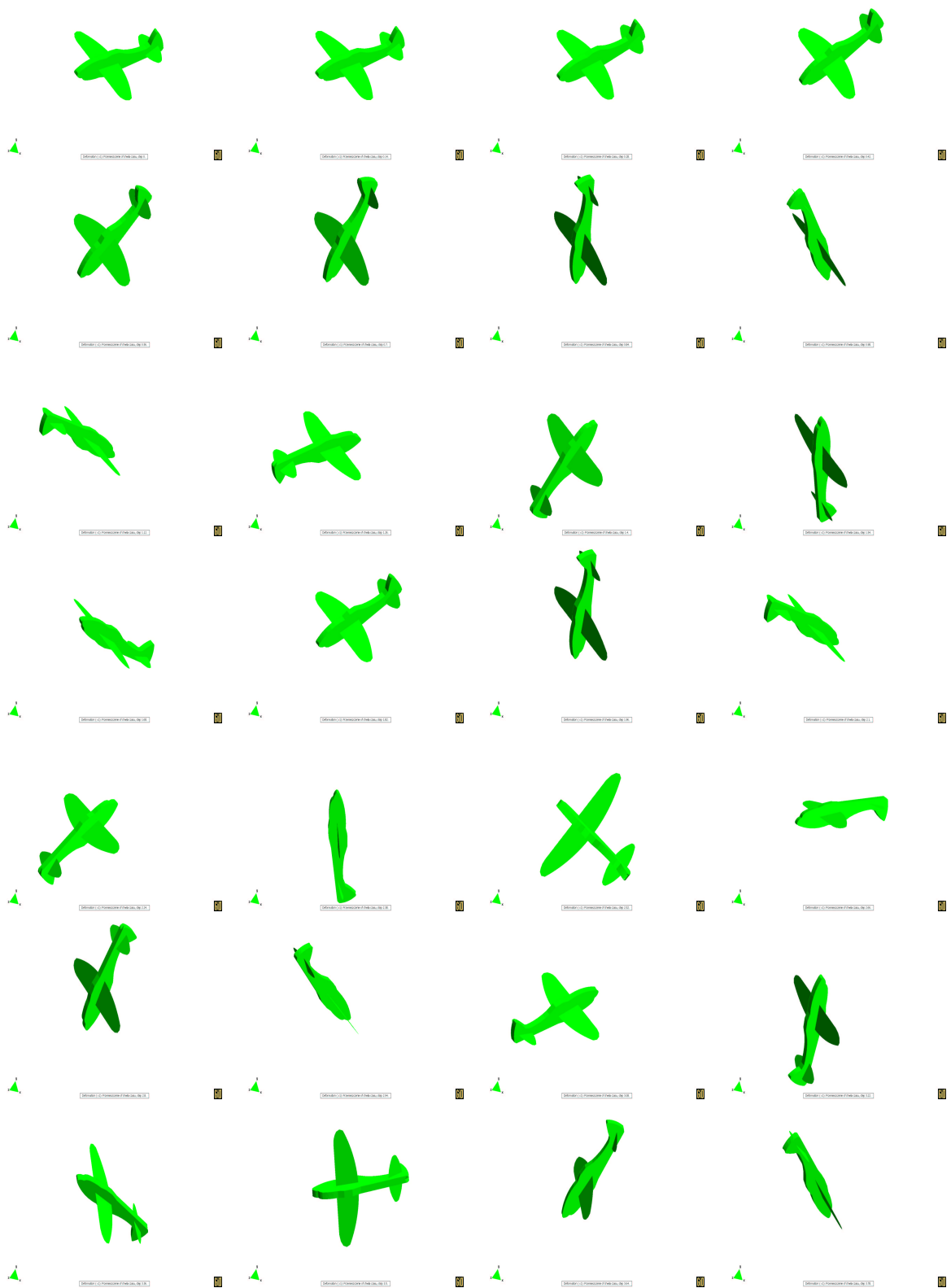


Wektor rotacji. Współrzędna e3



Materialna prędkość kątowna. Współrzędna e3

Rysunek 5.6: Porównanie wektora rotacji χ i materialnej prędkości kątownej \mathbf{W} dla algorytmu A3 dla $\beta = \frac{1}{2}$ i $\gamma = 1$, przy dwóch długościach kroku: $h = 0.01$ i $h = 0.1$

Rysunek 5.7: Kolejne fazy ruchu ciała sztywnego od $t = 0$ do $t = 3.78$.

5.2 Ciężki symetryczny podparty bąk

5.2.1 Opis ruchu bąka symetrycznego

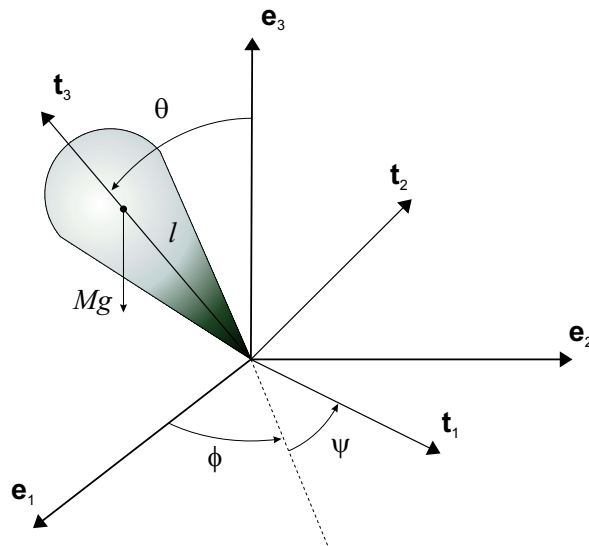
Bąkiem symetrycznym nazywamy bryłę o symetrii osiowej, obracającą się dookoła swojej osi symetrii, przy czym oś ta może być swobodna lub unieruchomiona w jednym punkcie. Szczegółową analizę ruchu bąka przedstawiono w pracy [12].

Zajmiemy się teraz opisem ruchu bąka symetrycznego w polu grawitacyjnym. Zakładamy, że bąk o masie M obraca się wokół swojej osi symetrii. Oznaczmy bazę nieruchomego układu współrzędnych przez $\{\mathbf{e}_i\}$, a bazę ruchomego układu współrzędnych przez $\{\mathbf{t}_i\}$ ($i = 1, 2, 3$). Zakładamy, że wersor \mathbf{t}_3 jest skierowany wzdłuż osi symetrii bąka, oraz, że bąk jest podparty w punkcie będącym początkiem obu układów współrzędnych, patrz Rys.5.8. Moment siły grawitacji względem punktu podparcia wynosi wówczas

$$\mathbf{m}(t) = -Mg \mathbf{r}(t) \times \mathbf{e}_3, \quad (5.1)$$

gdzie $\mathbf{r} = l \mathbf{t}_3$ jest wektorem położenia środka masy bąka, l jest odległością środka masy od punktu podparcia, g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Moment ten jest skierowany prostopadle do osi bąka \mathbf{t}_3 i do osi \mathbf{e}_3 bazy odniesienia. Wykorzystując związek między wektorami ruchomego i nieruchomego układu odniesienia, patrz wzór (3.5), mamy $\mathbf{t}_3 = \mathbf{R}(t) \mathbf{e}_3$, i możemy wzór (5.1) zapisać następująco

$$\mathbf{m}(t) = -Mgl [\mathbf{R}(t) \mathbf{e}_3] \times \mathbf{e}_3. \quad (5.2)$$



Rysunek 5.8: Ciężki symetryczny podparty bąk w polu grawitacyjnym.

W lokalnym (ruchomym) układzie odniesienia związanym ze środkiem masy, wzór powyższy opisuje moment siły reakcji podłoża względem środka masy.

Bąk, którego oś symetrii jest odchylona od pionu, wirujący w polu grawitacyjnym, na skutek działania niezerowego momentu pary sił: siły grawitacji względem punktu podparcia i siły reakcji podłoża względem środka masy, wykonuje dwa rodzaje ruchów: *precesję* i *nutację*.

1. Precesja polega na obracaniu się osi symetrii bąka, ze stałą prędkością kątową dookoła osi pionowej \mathbf{e}_3 .
2. Nutacja – na obracaniu się osi symetrii bąka dookoła linii węzłów tak, że kąt θ zmienia się w pewnym przedziale $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Dla *bąka szybkiego*, to znaczy takiego, którego energia kinetyczna jest znacznie większa od energii potencjalnej, w pracy [12] Rozdz.5.7, podano następujące przybliżone wzory na częstotliwość precesji i nutacji,

$$\omega_p = \frac{Mgl}{J_{33}W_3}, \quad \omega_n = \frac{J_{33}}{J_{11}}W_3, \quad (5.3)$$

gdzie J_{11} i J_{33} są składowymi materialnego tensora bezwładności bąka \mathbb{J} (z symetrii bąka względem osi \mathbf{t}_3 wynika, że $J_{11} = J_{22}$), a W_3 jest współrzędną 3 wektora materialnej prędkości kątowej \mathbf{W} .

Ponieważ moment siły \mathbf{m} jest podczas trwania ruchu cały czas prostopadły do osi \mathbf{e}_3 nieruchomego układu współrzędnych, zatem zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona ruchu obrotowego względem środka masy ciała (3.38), tzn. $\dot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{m}$, składowa 3 przestrzennego wektora momentu pędu $\boldsymbol{\pi}$ będzie przez cały czas trwania ruchu stała.

Zauważmy, że w tym przykładzie bąk nie wiruje swobodnie, a więc jego energia kinetyczna i moment pędu nie mają być zachowane. Jednak, możemy użyć tego przykładu do porównania rozwiązań dla dłuższych kroków czasowych, odnosząc je do rozwiązania odniesienia otrzymanego dla bardzo krótkich kroków czasowych, i identycznego dla wszystkich algorytmów.

5.2.2 Wyniki obliczeń numerycznych

Wartości danych przyjęte w obliczeniach są następujące:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = 20, \quad l = 1,$$

gdzie \mathbb{J} , M i l są odpowiednio tensorem bezwładności bąka, masą bąka i odległością środka masy bąka od punktu podparcia. Przyjęto następujące warunki początkowe:

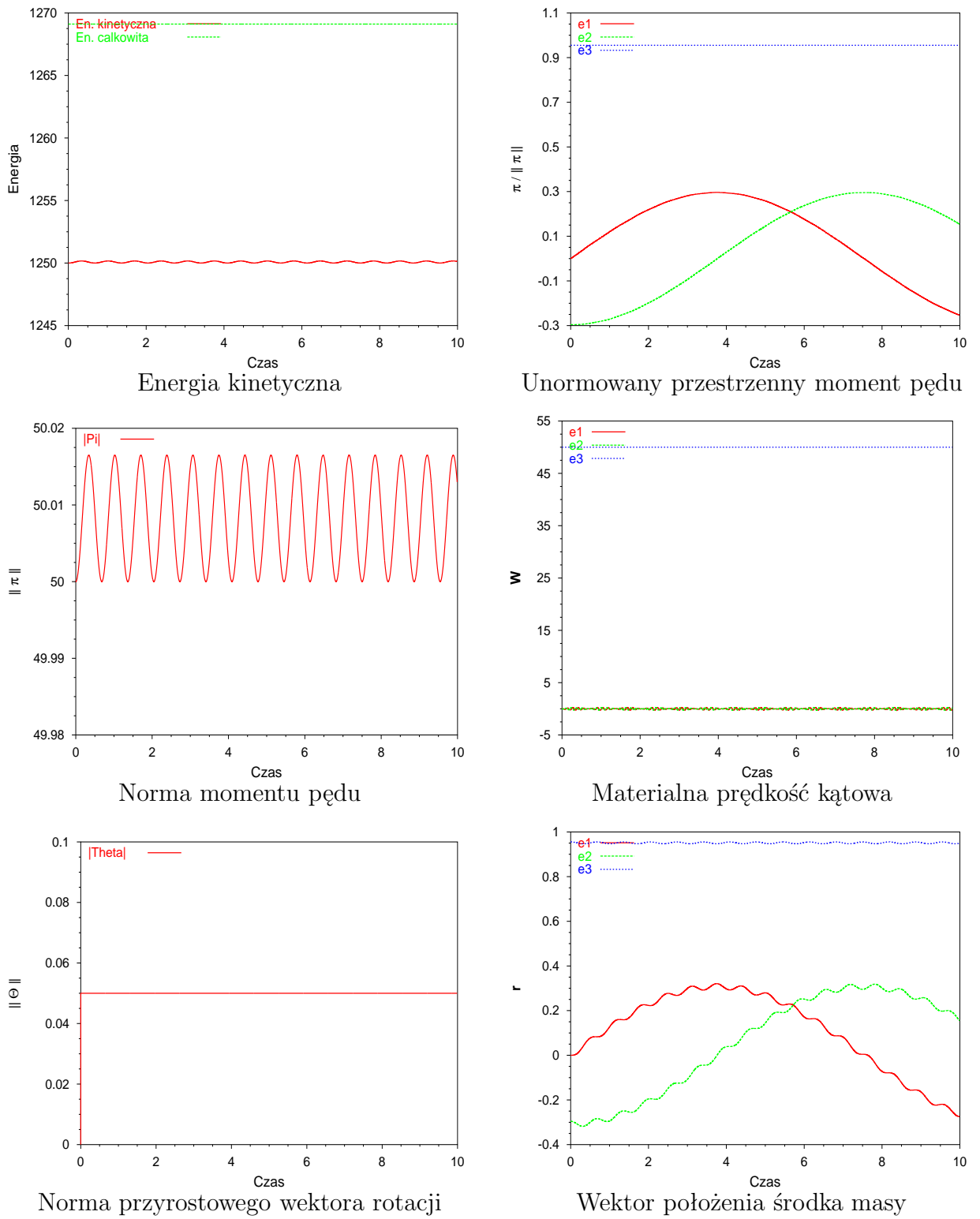
$$\boldsymbol{\chi}(0) = (0.3, 0, 0), \quad \mathbf{W}(0) = (0, 0, 50), \quad \mathbf{A}(0) = (0, 0, 0).$$

Obliczenia zostały wykonane przy użyciu algorytmów A1, A2 i A3, dla kilku długości kroków czasowych h . Otrzymane wyniki możemy podsumować w następująco.

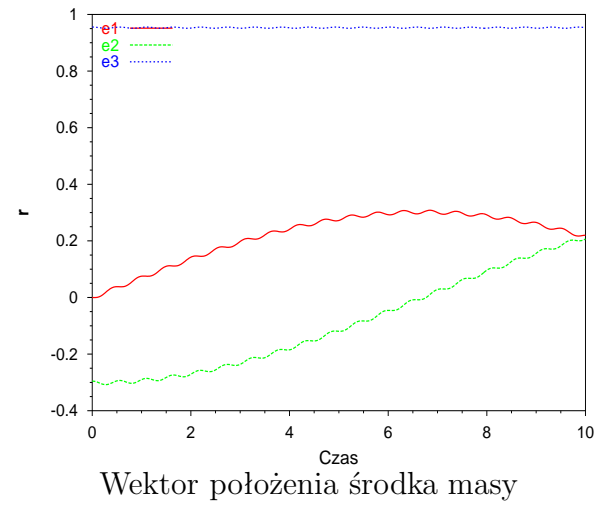
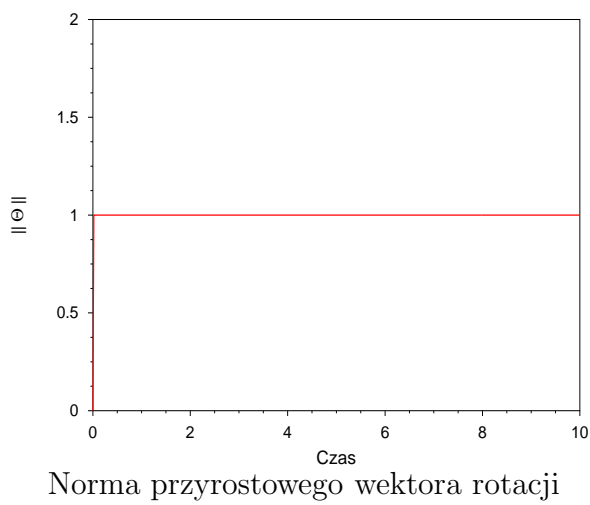
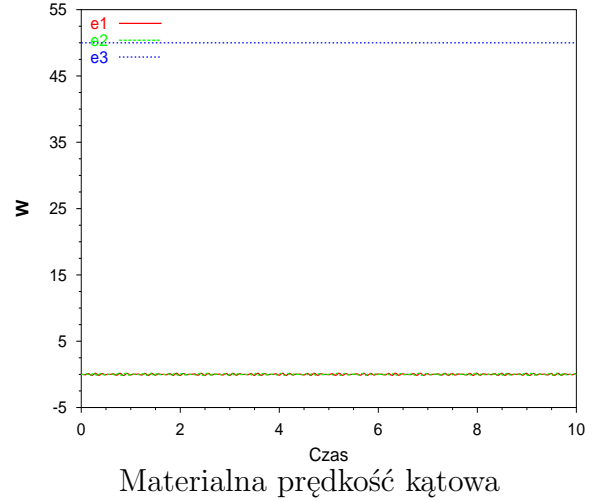
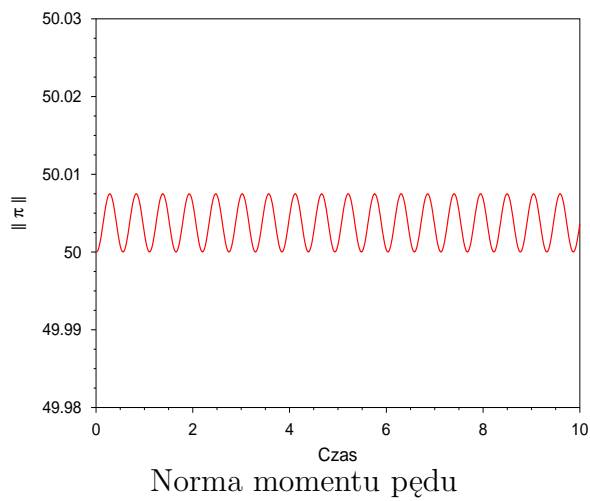
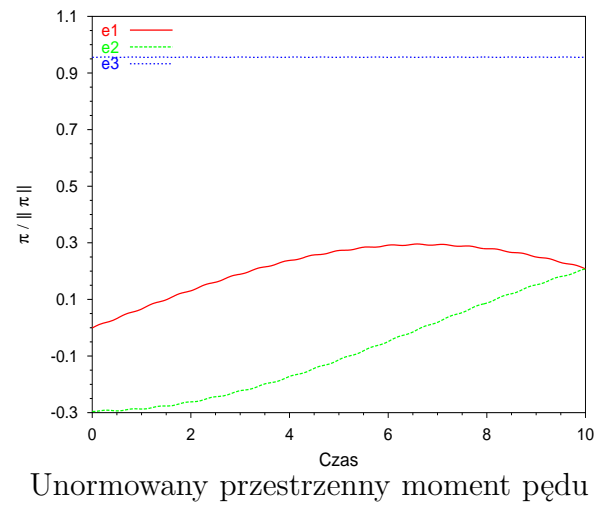
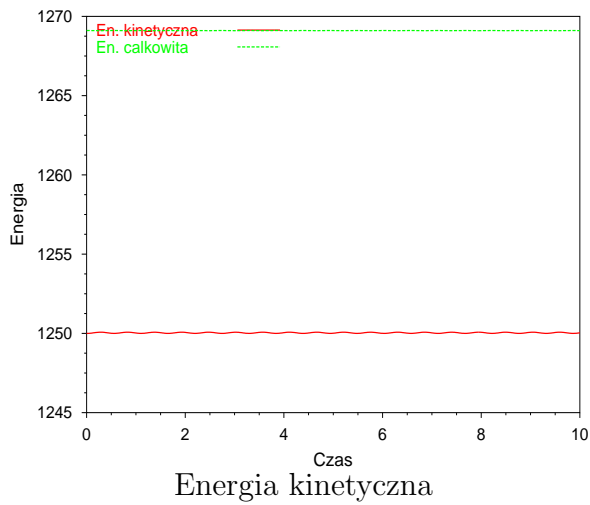
1. Dla kroku $h = 0.001$ otrzymujemy takie same rezultaty dla wszystkich algorytmów, dlatego na Rys.5.9 przedstawiono wykresy tylko dla algorytmu A3.
2. Różnice pojawiają się dopiero przy większych długościach kroku h . Dla $h = 0.02$ i $h = 0.04$ przedstawiono wykresy dla wszystkich trzech algorytmów,
 - (a) dla algorytmu A1: na Rys.5.10 i 5.11,
 - (b) dla algorytmu A2: na Rys.5.12 i 5.13,
 - (c) dla algorytmu A3: na Rys.5.14 i 5.15.
3. Wyniki dla algorytmów A1 i A3 i dla kroku $h = 0.02$ porównano na Rys.5.16, przy czym rozwiązania odniesienia, oznaczone jako "Ref.", stanowią wyniki dla $h = 0.001$.

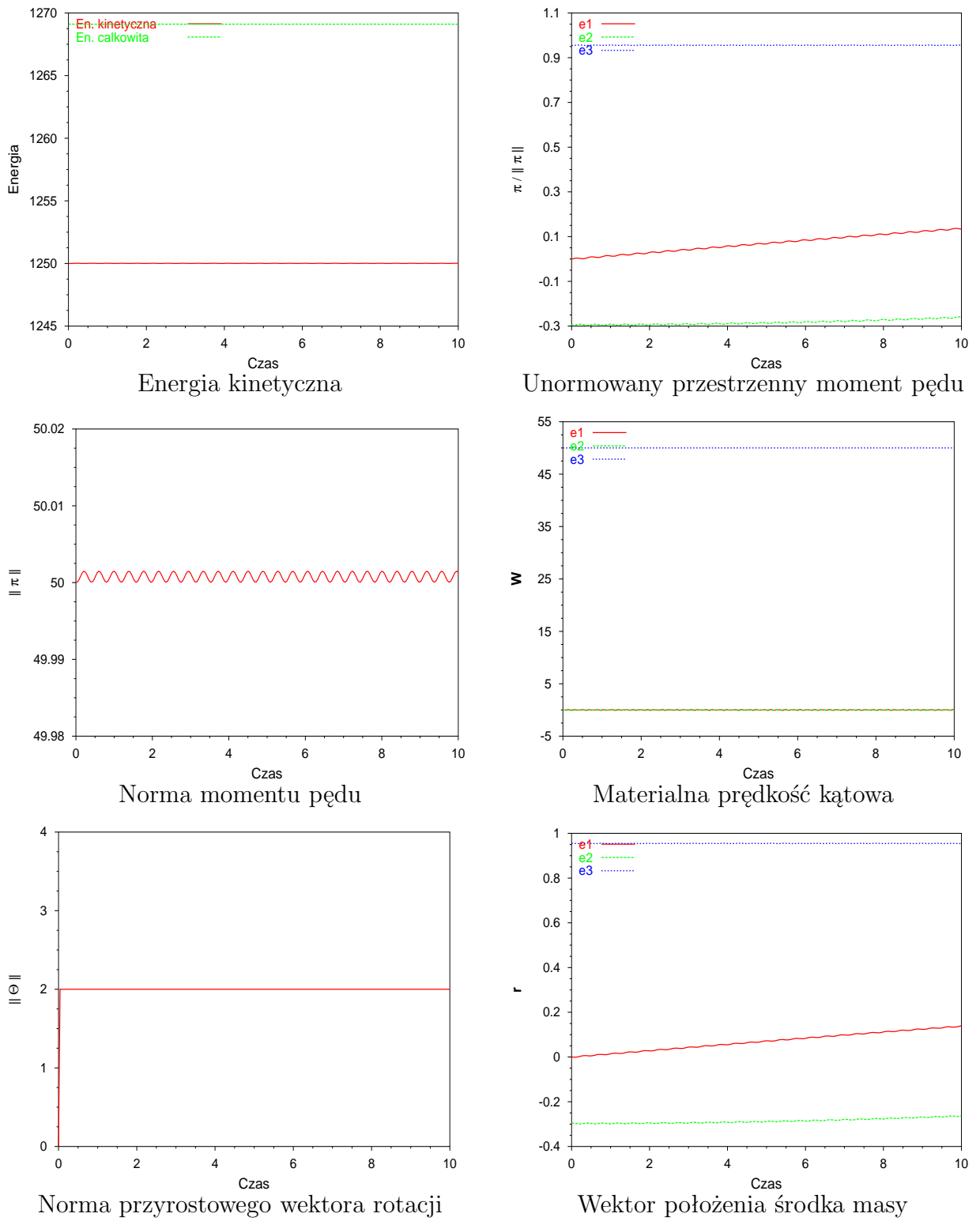
Widzimy, że dla $h = 0.02$ oba algorytmy są niedokładne, lecz w różnym stopniu i w różny sposób. Porównując np. normę kąтового momentu pędu $\|\boldsymbol{\pi}\|$, trudno jest określić który algorytm jest lepszy. Jednak porównując $\boldsymbol{\pi}/\|\boldsymbol{\pi}\|$, widzimy, że algorytm A3 jest wyraźnie bardziej dokładny. Algorytm A3 jest także bliższy rozwiązaniu odniesienia jeżeli porównamy położenie środka masy, patrz także [30].

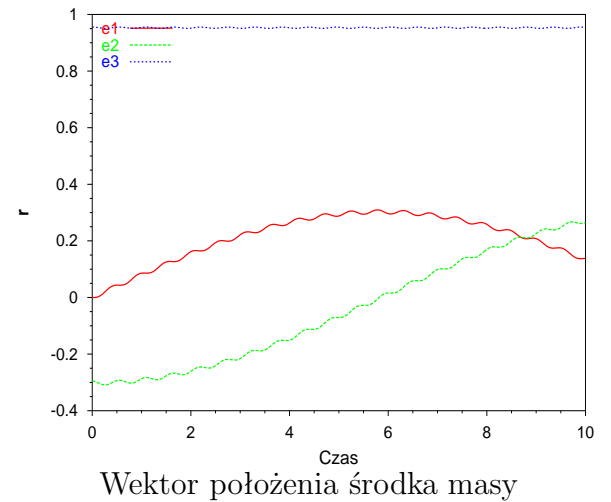
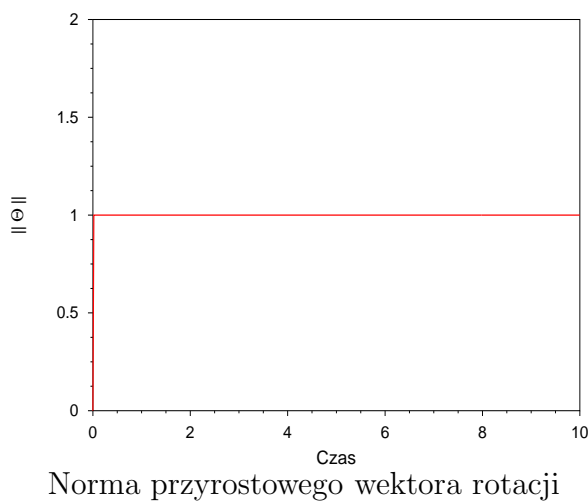
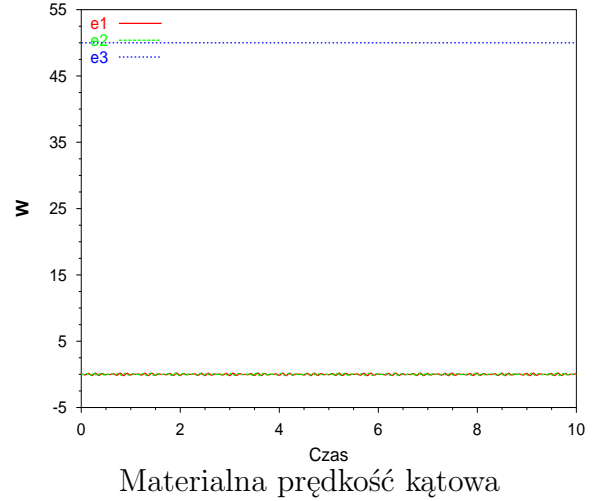
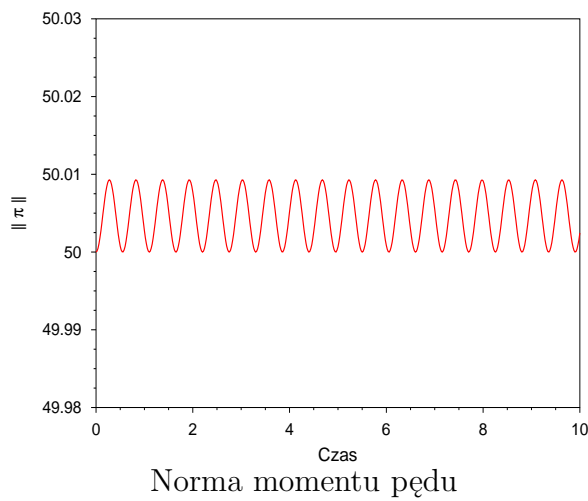
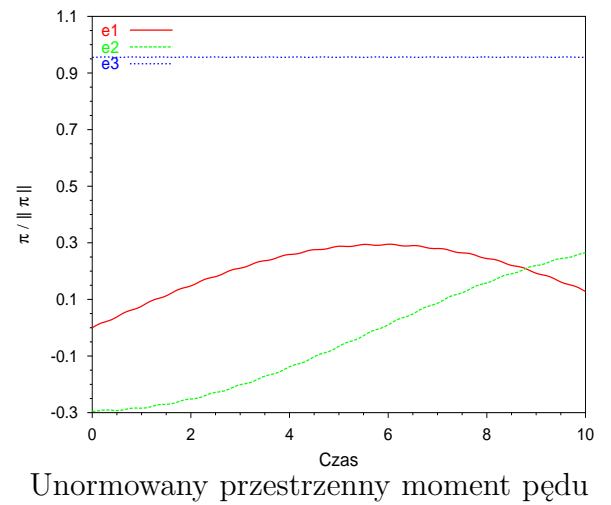
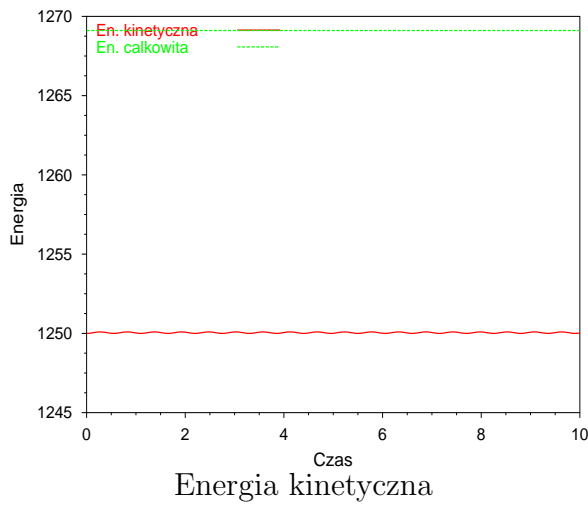
4. Kolejne fazy ruchu bąka w czasie od $t = 0$ do $t = 10$ pokazano na Rys.5.17.



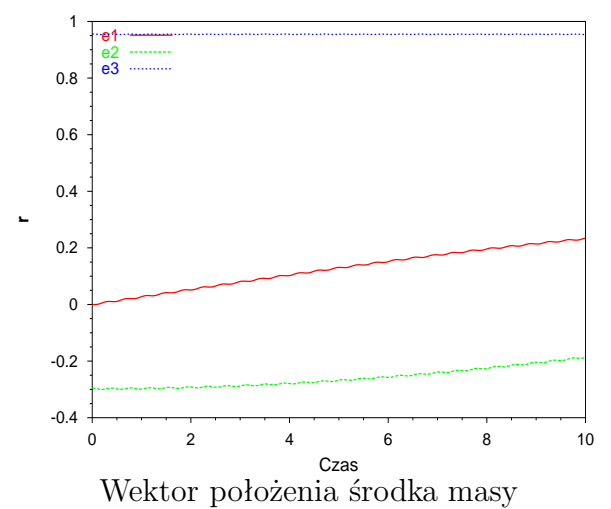
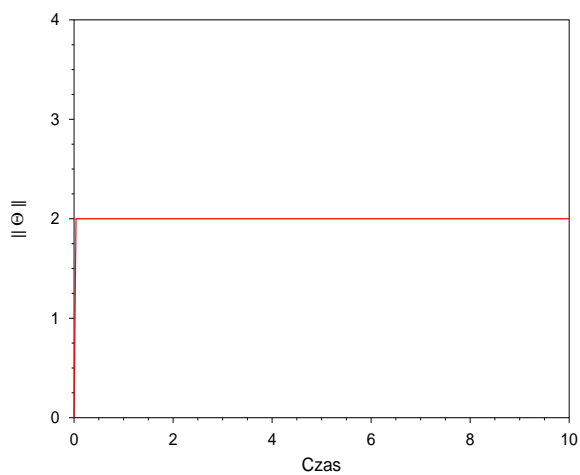
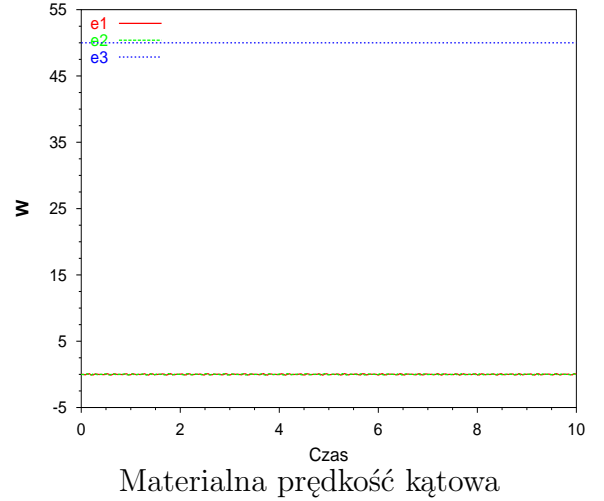
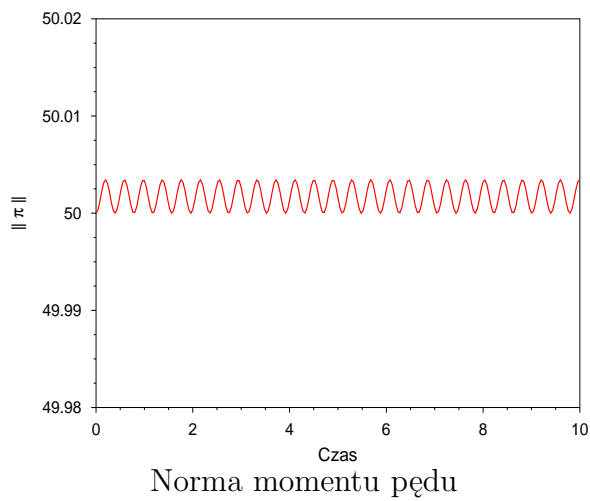
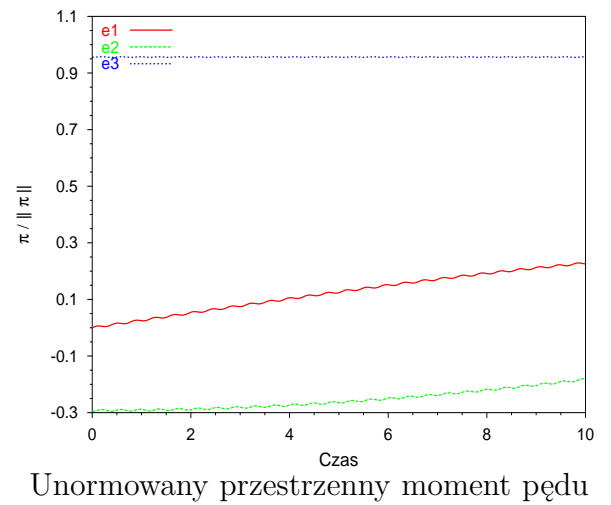
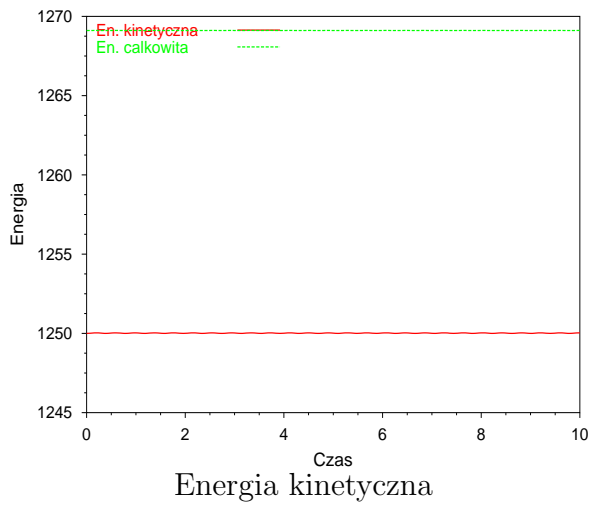
Rysunek 5.9: Algorytm A3: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $h = 0.001$

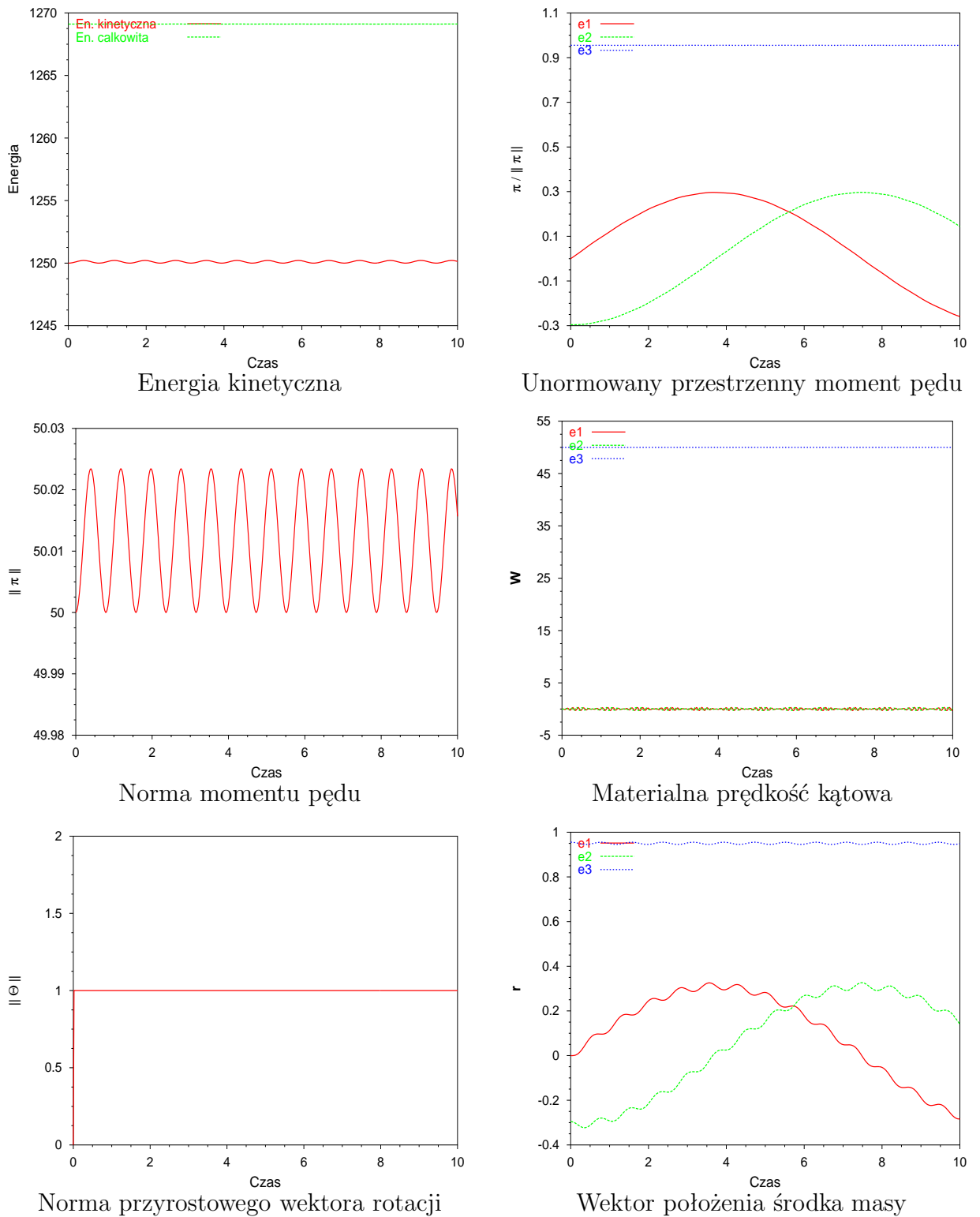
Rysunek 5.10: Algorytm A1: $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $h = 0.02$

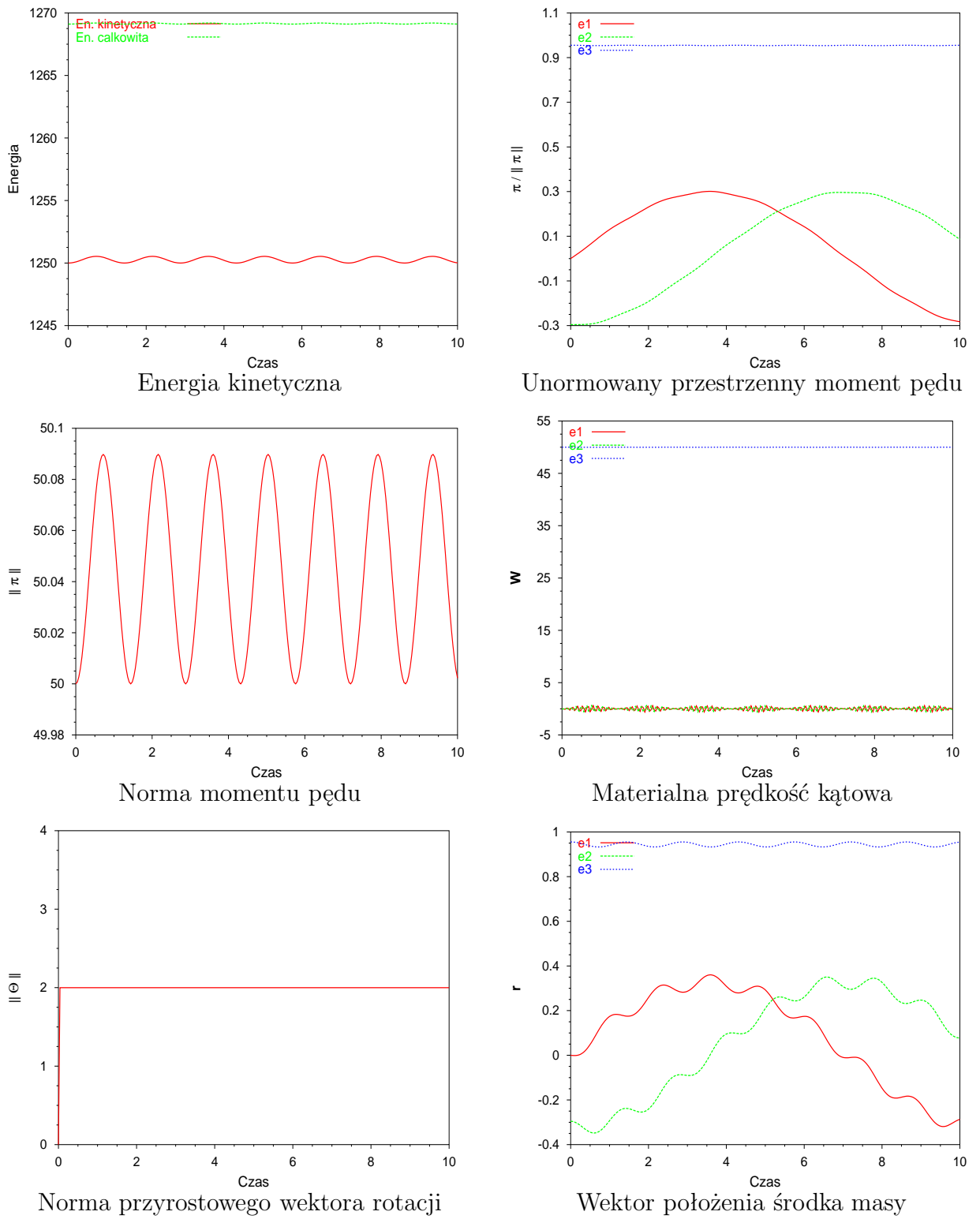
Rysunek 5.11: Algorytm A1: $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $h = 0.04$



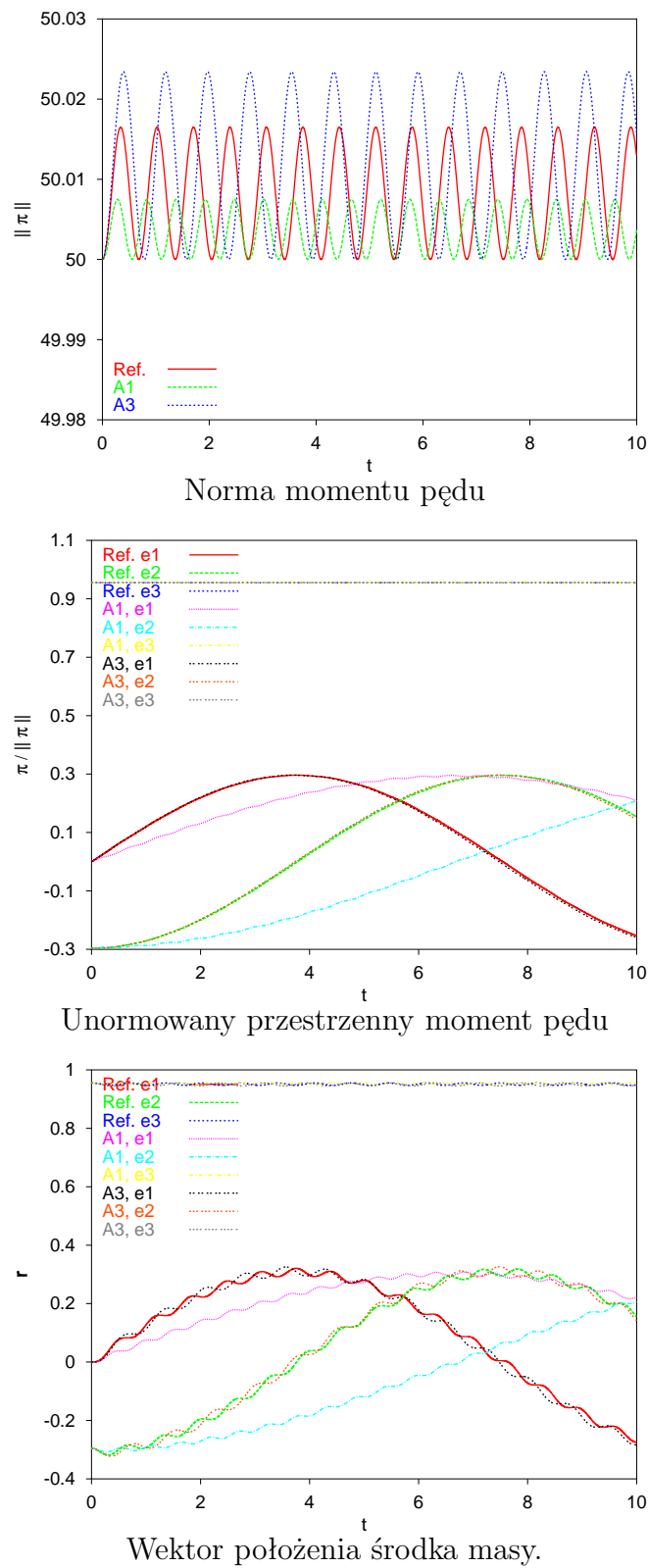
Rysunek 5.12: Algorytm A2: $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $h = 0.02$

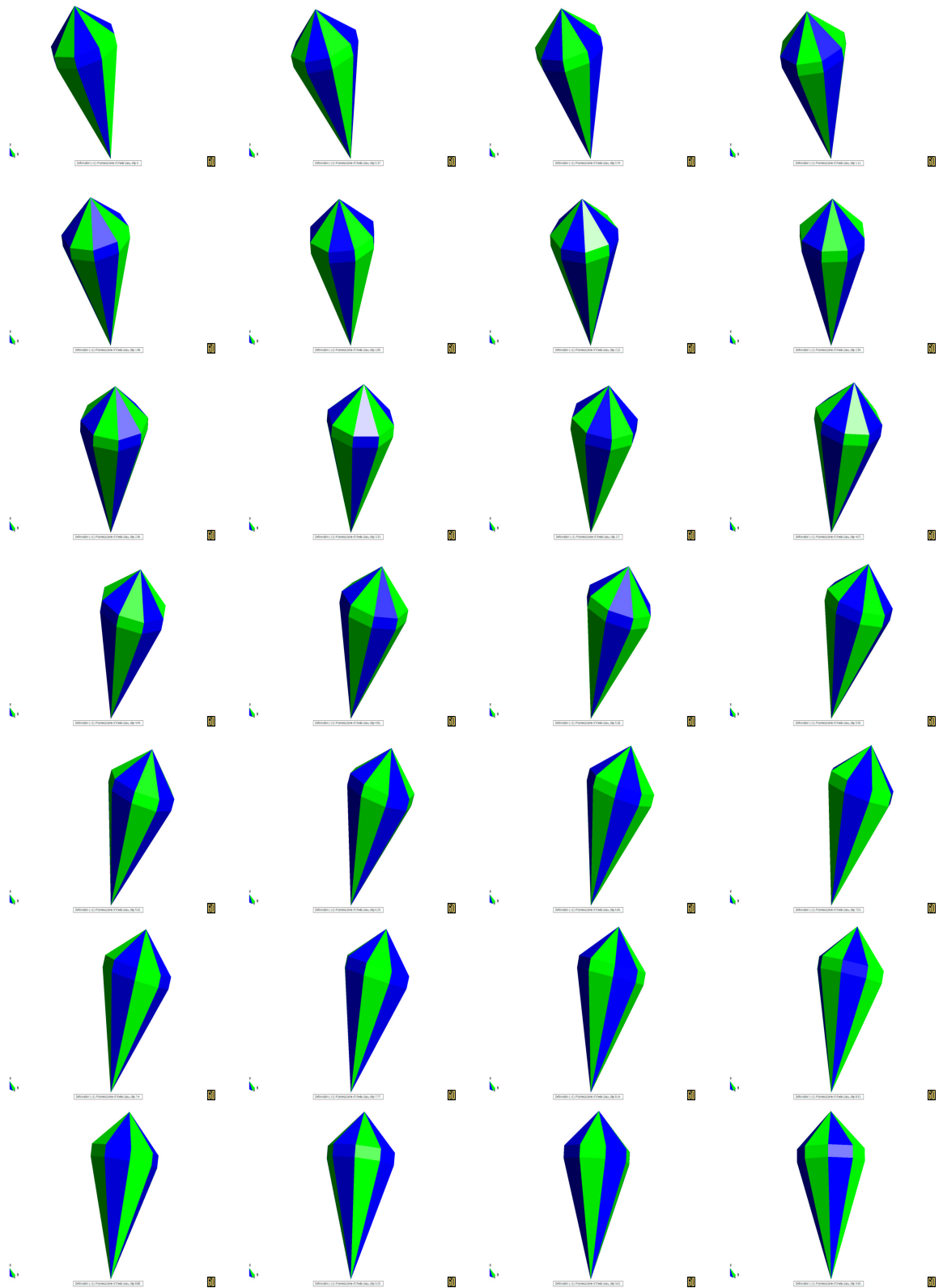
Rysunek 5.13: Algorytm A2: $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $h = 0.04$

Rysunek 5.14: Algorytm A3: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $h = 0.02$



Rysunek 5.15: Algorytm A3: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, $h = 0.04$

Rysunek 5.16: Porównanie wyników dla algorytmów A1 i A3 dla kroku $h = 0.02$.

Rysunek 5.17: Kolejne fazy ruchu bąka w czasie od $t = 0$ do $t = 10$.

5.3 Podsumowanie

1. W przykładzie 5.1, dla ruchu swobodnego i dłuższych kroków czasowych, wyraźnie widoczne są właściwości zachowawcze poszczególnych algorytmów. Wyniki obliczeń numerycznych w pełni potwierdzają teoretyczne własności zachowawcze poszczególnych algorytmów.
2. Jak wynika z obu przykładów numerycznych, 5.1 i 5.2, dla małych kroków czasowych wszystkie algorytmy zachowują dużą dokładność obliczeń i dają poprawne rezultaty. Różnice ujawniają się dopiero dla dłuższych kroków czasowych. W tym przypadku algorytm zachowujący energię i moment pędu A3 daje wyniki bardziej zbliżone do rozwiązania dokładnego niż pozostałe algorytmy, przy czym dokładność ta jest większa w przykładzie, w którym na ciało nie działają siły zewnętrzne. Zawsze musimy wykonać obliczenia także z krótkim krokiem czasowym by określić dokładność rozwiązania, patrz [30].
3. Moment pędu $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{R}\mathbb{J}\mathbf{W}$ jest funkcją zarówno \mathbf{R} jak i \mathbf{W} , podobnie jak $\boldsymbol{\pi}/\|\boldsymbol{\pi}\|$. Zauważmy, że norma momentu pędu zależy tylko od prędkości kątowej \mathbf{W} , gdyż $\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} = (\mathbb{J}\mathbf{W}) \cdot (\mathbb{J}\mathbf{W})$. Ponieważ $\|\boldsymbol{\pi}\|$, podobnie jak energia kinetyczna, $E_k = \frac{1}{2}\mathbf{W} \cdot (\mathbb{J}\mathbf{W})$, charakteryzuje wyłącznie prędkość kątową \mathbf{W} , dlatego nieuzasadnione jest prezentowanie wykresów dla obu tych wielkości.

Rozdział 6

Podsumowanie

Zdaniem autora, w rozprawie otrzymano następujące oryginalne rezultaty:

1. Wyprowadzono postaci równania generującego rotacje dla poszczególnych parametryzacji grupy $SO(3)$, w szczególności dla parametrów Eulera i Cayleya, podane w dodatku A.1.1 i A.1.2. Postaci tych równań zostały podane bez dowodu w pracy [33], podczas gdy w rozprawie potwierdzono ich postać i podano explicite ich skomplikowane wyprowadzenia.
2. Podano dowód, że równanie generujące rotacje dla parametryzacji kanonicznej jest rozwiązywane dokładnie przy pomocy metod punktu środkowego i zmodyfikowanej metody trapezów, dodatek A.2. Wynik ten otrzymano dla tensora skośnie-symetrycznego Ω stałego w czasie, i został on potwierdzony przez wyniki obliczeń numerycznych.
3. Przygotowano programy numeryczne i wykonano obliczenia dla równania generującego rotacje w postaci wyprowadzonej dla analizowanych rodzajów parametryzacji rotacji. Porównano błędy rozwiązania przy zastosowaniu różnych parametryzacji i różnych schematów numerycznych, wyniki zamieszczono w Rozdz.2.5, co pozwala na wstępną ocenę przydatności poszczególnych rodzajów parametryzacji.
4. Zestawiono równania dynamiki dla ruchu obrotowego ciała sztywnego, w postaci odpowiedniej dla dowolnych nieograniczonych rotacji, w Rozdz.3. Dla skończonych rotacji są to równania teoretycznie trudne ze względu na dwa typy opisu problemu, materialny i przestrzenny, i związane z tym lewo- i prawostronne składanie rotacji.
5. Opracowano algorytmy należące do rodziny metod jedno-krokowych, dwa wywodzące się z metody Newmarka, algorytmy A1 i A2, oraz jeden z metody ważonych residuów, algorytm A3, patrz Rozdz.4.2. W szczególności, wyprowadzono wzory na operatory styczne dla powyższych algorytmów. Następujące wyprowadzenia i postaci operatorów stycznych są oryginalnym rezultatem rozprawy:

- (a) Dla algorytmów A1 i A2, podano postaci i wyprowadzenia operatorów \mathbf{K} i \mathbf{K}_m (ten drugi dla momentu zewnętrznego zależnego od rotacji) w Dodatku A.5.1 i A.5.2.
- (b) Dla algorytmu A3, podano wyprowadzenie operatora \mathbf{K} w Dodatku A.5.3, (postać tego operatora podano bez dowodu w pracy [31]). Ponadto, w rozprawie podano zarówno postać jak i wyprowadzenie operatora \mathbf{K}_m .

Wymagało to uprzedniego wyprowadzenia wzorów na operatory $\mathbf{T}(\Theta)$ i $\mathbf{T}^{-1}(\Theta)$, co uczyniono na podstawie pracy [8], i podano w Dodatku A.4.

6. Zaimplementowano algorytmy A1, A2 i A3 dla dynamiki ciała sztywnego, i przeprowadzono obliczenia porównawcze dla dwóch silnie nieliniowych zagadnień: (a) dla ruchu z niestabilną rotacją wokół osi o pośrednim momencie bezwładności, i (b) dla momentu zewnętrznego wywołanego polem grawitacyjnym, tzn. zależącego od położenia środka masy. Wyniki tych testów potwierdzają poprawność wyprowadzonych operatorów stycznych i teoretyczne własności badanych algorytmów.

Bibliografia

- [1] J. Argyris: *An excursion into large rotations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 32:85–155, 1982.
- [2] J. Argyris and V.F. Poterasu: *Large rotations revised application of Lie algebra*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 103:11–42, 1993.
- [3] W.I. Arnold: *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*. PWN, Warszawa, 1981.
- [4] S.N. Atluri, A. Cazzani: *Rotations in computational solid mechanics*. Archives of Computational Methods in Engineering, 2(1):49–138, 1995.
- [5] Cz. Bajer, R. Bogacz: *Active control of beams under moving load*. J. Theor. and Appl. Mech., 38(3):523-530, 2000
- [6] M. Borri, L. Trainelli, C.L. Bottasso: *On representations and parameterizations of motion*. Pre-print (2000)
- [7] O.A. Bauchau, T. Joo: *Computational schemes for non-linear elasto-dynamics*. Int. J. Num. Meth. Engng, 45:693-719, 1999
- [8] A. Cardona and M. Gerardin: *A beam finite element non-linear theory with finite rotations*. Int. J. Num. Meth. Engng, 26:2403–2438, 1988.
- [9] J. Chróścielewski : *The family of C^0 finite elements in the nonlinear six-parameter shell theory*. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdanskiej 540. Budownictwo Ladowe Nr. LIII (1996)
- [10] J. Chróścielewski, J. Makowski, W. Pietraszkiewicz: *Statyka i Dynamika Powłok Wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. Wydawnictwo IPPT PAN, Warszawa, 2004.
- [11] C.W. Gear: *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [12] H. Goldstein: *Classical Mechanics. 2nd Edition*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1980)

- [13] T.J.R. Hughes: *Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior*. In *Computational Methods for Transient Analysis*, Volume 1 of *Mechanics and Mathematical Methods. A series of handbooks. First Series: Computational Methods in Mechanics*. Eds T.Belytschko and T.J.R. Hughes. Chapter 2, pp.67–155. North-Holland, 1983.
- [14] T.J.R. Hughes: *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [15] T.J.R. Hughes, T.K. Caughey, W.K. Liu: *Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy*. J. Applied Mechanics. Trans. ASME. 45:366-370,1978
- [16] T.J.R. Hughes, J. Winget: *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis*. Int. J. Num. Meth. Engng, 15:1862–1867, 1980.
- [17] G. Jelenić, M.A. Crisfield: *Interpolation of rotational variables in nonlinear dynamics of 3d beams*. Int. J. Num. Meth. Engng, 43:1193–1222, 1998.
- [18] T. Kaczorek: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, Wydanie drugie zmienione, 1998.
- [19] M. Kleiber: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
- [20] D. Kuhl, M.A. Crisfield: *Energy-conserving algorithms in non-linear structural dynamics*. Int. J. Num. Meth. Engng, 45:569–599, 1999.
- [21] R.A. LaBudde, D. Greenspan: *Discrete mechanics - a general treatment*. J. Comput. Physics, Vol.15, pp.134-167 (1974)
- [22] R.A. LaBudde, D. Greenspan: *Energy and momentum conserving methods of arbitrary order for the numerical integration of equations of motion. Part I. Motion of a single particle*. Numer. Math., Vol.25, pp.323–346 (1976) *Part II. Motion of a system of particles*. Numer. Math., Vol.26, pp.1–16 (1976)
- [23] P. Lancaster, M. Tismenetsky: *The Theory of Matrices. Second Edition with Applications*. Academic Press, 1985.
- [24] I. Lubowiecka, J. Chróścielewski: *On dynamics of flexible branched shell structures undergoing large overall motion using finite elements*. Computers & Structures, 80:891–898, 2002.
- [25] I. Lubowiecka: *Całkowanie nieliniowych dynamicznych równań ruchu w mechanice konstrukcji. Dynamika powłok sprężystych*. Praca doktorska. Politechnika Gdańska. Wydział Inżynierii Lądowej. Katedra Mechaniki Budowli, Gdańsk, 2001.

- [26] I. Lubowiecka: *Całkowanie nieliniowych równań dynamiki ciała sztywnego i powłok sprężystych*. No.48 w Monografie. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 2004.
- [27] K.C. Park : *Improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamics equations*. J. Appl. Mech. 42:464-470, 1975
- [28] W. Pietraszkiewicz, J. Badur: *Finite rotations in the description of continuum deformation*. Int. J. Engng Sci., 21(9):1097-1115, 1983
- [29] R.D. Richtmayer, K.W. Morton: *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Interscience, New York, 1967.
- [30] P. Sadłowski, K. Wiśniewski: *Energy conserving algorithms for solving rigid body dynamics equation of angular motion*. Proc. of the 8th Conference "Shell Structures. Theory and Applications" (SSTA'2005) Jurata, October 12 - 14, 2005. Eds P. Klosowski, Cz. Szymczak. pp.429-432, Taylor & Francis, 2005
- [31] J.C. Simo and K.K. Wong: *Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum*. Int. J. Num. Meth. Engng, 31:19-52, 1991.
- [32] J.C. Simo and L. Vu-Quoc: *On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 66:125-161, 1988.
- [33] J. Stuelpnagel: *On the parametrization of the three-dimensional rotation group*. SIAM Review, 6(4):422-430, 1964.
- [34] K. Wiśniewski: *Finite rotations of shells and beams. Extended equations and numerical models*. Prace IPPT 9/1997.
- [35] K. Wiśniewski, E. Turska: *Kinematics of finite rotation shells with in-plane twist parameter*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 190(8-10): 1117-1135, 2000
- [36] K. Wiśniewski, E. Turska: *Warping and in-plane twist parameter in kinematics of finite rotation shells*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 190(43-44): 5739-5758, 2001
- [37] Wiśniewski K., Turska E.: *Enhanced Allman quadrilateral for finite drilling rotations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 195(44-47): 6086-6109, 2006
- [38] J. Wittenberg: *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1977.

- [39] O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, R.L. Taylor: *An alternative single-step algorithm for dynamic problems*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8:31–40, 1980.
- [40] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor: *The Finite Element Method. Fifth Edition. Vol.1. The Basis*. Butterworth-Heinemann (2000)

Dodatek A

Wyprowadzenia, dowody, twierdzenia

A.1 Wyprowadzenie postaci równania generującego rotacje dla wybranych parametryzacji

A.1.1 Parametry Eulera

Poniżej wyprowadzone zostanie równanie generujące rotacje dla parametrów Eulera (2.92). Zapiszmy macierz rotacji wyrażoną przez parametry Eulera, wzór (2.68), zapisując wyrazy na głównej przekątnej w nieco innej postaci

$$\mathbf{R} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - q_2^2 - q_3^2 & q_1 q_2 - q_0 q_3 & q_1 q_3 + q_0 q_2 \\ q_1 q_2 + q_0 q_3 & \frac{1}{2} - q_1^2 - q_3^2 & q_2 q_3 - q_0 q_1 \\ q_1 q_3 - q_0 q_2 & q_2 q_3 + q_0 q_1 & \frac{1}{2} - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Skorzystaliśmy przy tym z własności $\sum_{i=0}^3 q_i^2 = 1$. Obliczmy teraz pochodną po czasie,

$$\dot{\mathbf{R}} = 2 \begin{bmatrix} -2q_2\dot{q}_2 - 2q_3\dot{q}_3 & \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_0 q_3 - q_0 \dot{q}_3 & \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_2 + q_0 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 q_3 + q_0 \dot{q}_3 & -2q_1 \dot{q}_1 - 2q_3 \dot{q}_3 & \dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_1 - q_0 \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_2 - q_0 \dot{q}_2 & \dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_1 + q_0 \dot{q}_1 & -2q_1 \dot{q}_1 - 2q_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Zapiszmy następnie iloczyn $\Omega \mathbf{R}$ w notacji wskaźnikowej

$$\Omega \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \omega_3 r_{21} - \omega_2 r_{31}, & \omega_3 r_{22} - \omega_2 r_{32}, & \omega_3 r_{23} - \omega_2 r_{33} \\ -\omega_3 r_{11} + \omega_1 r_{31}, & -\omega_3 r_{12} + \omega_1 r_{32}, & -\omega_3 r_{13} + \omega_1 r_{33} \\ \omega_2 r_{11} - \omega_1 r_{21}, & \omega_2 r_{12} - \omega_1 r_{22}, & \omega_2 r_{13} - \omega_1 r_{23} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie r_{ij} to odpowiednie wyrazy \mathbf{R} ze wzoru (A.1). Porównując wyrazy na głównej przekątnej powyższej macierzy z obliczonymi we wzorze (A.2) pochodnymi, otrzy-

mujemy układ równań na zmienne \dot{q}_1, \dot{q}_2 i \dot{q}_3

$$2 \begin{bmatrix} 0 & q_2 & q_3 \\ q_1 & 0 & q_3 \\ q_1 & q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2(q_1q_3 - q_0q_2) - \omega_3(q_1q_2 + q_0q_3) \\ -\omega_1(q_2q_3 + q_0q_1) + \omega_3(q_1q_2 - q_0q_3) \\ \omega_1(q_2q_3 - q_0q_1) - \omega_2(q_1q_3 + q_0q_2) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Wyznacznik macierzy powyższego układu jest równy $16q_1q_2q_3$. Jeżeli założymy, że $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0, q_3 \neq 0$, wówczas rozwiązując powyższy układ równań otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(-\omega_1q_0 + \omega_3q_2 - \omega_2q_3), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(-\omega_2q_0 - \omega_3q_1 + \omega_1q_3), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-\omega_3q_0 + \omega_2q_1 - \omega_1q_2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Rozpatrując trzy przypadki, gdy jedna zmienna $q_i = 0$, a pozostałe dwie zmienne są różne od 0, oraz trzy przypadki gdy jedna zmienna $q_i \neq 0$, a pozostałe dwie zmienne są równe 0, możemy udowodnić, że rozwiązanie (A.5) również spełnia otrzymany układ równań.

Aby obliczyć \dot{q}_0 rozważmy ponownie wyraz r_{11} macierzy rotacji we wzorze (2.68),

$$r_{11} = 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1, \quad \dot{r}_{11} = 4q_0\dot{q}_0 + 4q_1\dot{q}_1. \quad (\text{A.6})$$

Porównujemy pochodną \dot{r}_{11} z odpowiednim wyrazem iloczynu (A.3), gdzie w miejsce r_{21} i r_{31} wstawiamy odpowiednie wyrażenia ze wzoru (2.68), otrzymujemy

$$2(q_0\dot{q}_0 + q_1\dot{q}_1) = \omega_2(q_0q_2 - q_1q_3) + \omega_3(q_1q_2 + q_0q_3). \quad (\text{A.7})$$

Podstawiając za \dot{q}_1 wyrażenie ze wzoru (A.5) oraz wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymamy

$$q_0\dot{q}_0 = \frac{1}{2}(\omega_1q_0q_1 + \omega_2q_0q_2 + \omega_3q_0q_3). \quad (\text{A.8})$$

Jeżeli $q_0 \neq 0$ wówczas

$$\dot{q}_0 = \frac{1}{2}(\omega_1q_1 + \omega_2q_2 + \omega_3q_3). \quad (\text{A.9})$$

Jeżeli $q_0 = 0$ wówczas równanie (A.8) jest równaniem tożsamościowym i powyższe rozwiązanie również je spełnia.

Pochodne wyrażone wzorami (A.9) i (A.5) zostały obliczone z porównania wyrazów na głównych przekątnych macierzy $\dot{\mathbf{R}}$ i $\mathbf{\Omega R}$ i dlatego musimy sprawdzić czy spełniają również pozostałe równania w równaniu macierzowym $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{\Omega R}$. Mamy

$$\begin{aligned} \dot{r}_{12} &= 2(\dot{q}_1q_2 + q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_0q_3 - q_0\dot{q}_3) = \omega_3(q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) - 2\omega_2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ &= 2\omega_3\left(\frac{1}{2} - q_1^2 - q_3^2\right) - 2\omega_2(q_0q_1 + q_2q_3) = \omega_3r_{22} - \omega_2r_{32} \\ &= (\mathbf{\Omega R})_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{13} &= 2(\dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_2 + q_0 \dot{q}_2) = \omega_2(-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) - 2\omega_3(q_0 q_1 - q_2 q_3) \\
&= -2\omega_2\left(\frac{1}{2} - q_1^2 - q_2^2\right) + 2\omega_3(q_2 q_3 - q_0 q_1) = -\omega_2 r_{33} + \omega_3 r_{23} \\
&= (\mathbf{\Omega R})_{13},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{21} &= 2(\dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_0 q_3 + q_0 \dot{q}_3) = \omega_3(-q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - 2\omega_1(q_0 q_2 - q_1 q_3) \\
&= -2\omega_3\left(\frac{1}{2} - q_1^2 - q_3^2\right) - 2\omega_1(q_0 q_2 - q_1 q_3) = -\omega_3 r_{11} + \omega_1 r_{31} \\
&= (\mathbf{\Omega R})_{21},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{23} &= 2(\dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_1 - q_0 \dot{q}_1) = \omega_1(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) - 2\omega_3(q_0 q_2 + q_1 q_3) \\
&= 2\omega_1\left(\frac{1}{2} - q_1^2 - q_2^2\right) - 2\omega_3(q_0 q_2 + q_1 q_3) = \omega_1 r_{33} - \omega_3 r_{13} \\
&= (\mathbf{\Omega R})_{23},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{31} &= 2(\dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 - \dot{q}_0 q_2 - q_0 \dot{q}_2) = \omega_2(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) - 2\omega_1(q_0 q_3 + q_1 q_2) \\
&= 2\omega_2\left(\frac{1}{2} - q_2^2 - q_3^2\right) - 2\omega_1(q_0 q_3 + q_1 q_2) = \omega_2 r_{11} - \omega_1 r_{21} \\
&= (\mathbf{\Omega R})_{31},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r}_{32} &= 2(\dot{q}_2 q_3 + q_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_0 q_1 + q_0 \dot{q}_1) = \omega_1(-q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) - 2\omega_2(q_0 q_3 - q_1 q_2) \\
&= -2\omega_1\left(\frac{1}{2} - q_1^2 - q_3^2\right) + 2\omega_2(q_1 q_2 - q_0 q_3) = -\omega_1 r_{22} + \omega_2 r_{12} \\
&= (\mathbf{\Omega R})_{32}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie ze wzorów (A.9) i (A.5) otrzymujemy równanie genrujące rotacje dla parametrów Eulera w postaci (2.92).

A.1.2 Parametryzacja Cayleya

Poniżej wyprowadzone zostanie równanie genrujące rotacje w postaci dla parametryzacji Cayleya (2.94). Zapisujemy wzór na zależność odwrotną dla parametryzacji Cayleya (2.78) w postaci

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{1 + \alpha} [\alpha \mathbf{I} - (1 + \alpha) \mathbf{R} + \mathbf{R}^2], \quad (\text{A.10})$$

gdzie $\alpha = \text{tr} \mathbf{R}$. Różniczkujemy zależność (A.10) stronami i po przekształceniach otrzymujemy:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \frac{\dot{\alpha}}{(1 + \alpha)^2} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) + \frac{1}{1 + \alpha} [-(1 + \alpha) \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}].$$

Podstawiamy zależność $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}$ i po przekształceniach otrzymujemy

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \frac{\dot{\alpha}}{(1+\alpha)^2} (\mathbf{I} - \mathbf{R}^2) - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} + \frac{1}{1+\alpha} (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}). \quad (\text{A.11})$$

Obliczamy poszczególne wielkości po prawej stronie równania (A.11), aby uzyskać zależność jedynie od $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$.

1.

$$\alpha = \text{tr}\mathbf{R} = \text{tr}\left[\mathbf{I} + \frac{2}{1+t^2} (\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2)\right] = 3 + \frac{2}{1+t^2} (\text{tr}\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \text{tr}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2) = \frac{3-t^2}{1+t^2}, \quad (\text{A.12})$$

Skorzystaliśmy przy tym ze wzoru (2.78) na parametryzację Cayleya, oraz z zależności $t^2 = -\frac{1}{2}\text{tr}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2$.

2.

$$\mathbf{R}^2 = \left[\mathbf{I} + \frac{2}{1+t^2} (\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2)\right]^2 = \mathbf{I} + 4\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{8}{(1+t^2)^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2,$$

po wykorzystaniu zależności $\tilde{\boldsymbol{\psi}}^3 = -t^2\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ i $\tilde{\boldsymbol{\psi}}^4 = -t^2\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2$.

3.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R} = & \boldsymbol{\Omega} + \frac{2}{1+t^2} \left(-\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 - \tilde{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\Omega} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2\boldsymbol{\Omega} + \frac{2}{1+t^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}} - \frac{2}{1+t^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 \right. \\ & \left. - \frac{2}{1+t^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \frac{2}{1+t^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 \right). \end{aligned}$$

po podstawieniu za \mathbf{R} wzoru (2.78) i uproszczeniu.

4.

$$\dot{\alpha} = (\text{tr}\dot{\mathbf{R}}) = \text{tr}(\dot{\mathbf{R}}) = \text{tr}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}) = \text{tr}\left\{\boldsymbol{\Omega}\left[\mathbf{I} + \frac{2}{1+t^2} (\tilde{\boldsymbol{\psi}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2)\right]\right\}.$$

Korzystając z zależności $\text{tr}(\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}}) = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}$ i $\text{tr}(\boldsymbol{\Omega}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^2) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}^2 = 0$, otrzymujemy

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{1+t^2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}. \quad (\text{A.13})$$

Ponadto obliczmy

$$1 + \alpha = \frac{4}{1+t^2}, \quad \frac{\dot{\alpha}}{(1+\alpha)^2} = \frac{(1+t^2)(\boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}})}{8}. \quad (\text{A.14})$$

Oznaczmy dla ułatwienia poszczególne składniki prawej strony równania (A.11) zmiennymi

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1 = \frac{\dot{\alpha}}{(1+\alpha)^2} (\mathbf{I} - \mathbf{R}^2), \quad \tilde{\boldsymbol{\psi}}_2 = \frac{1}{1+\alpha} (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{R}).$$

Podstawiając (A.12)-(A.14) do powyższych zależności, otrzymamy

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\Omega \cdot \tilde{\psi}}{2(1+t^2)} \left[(1-t^2)\tilde{\psi} - 2\tilde{\psi}^2 \right], \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2 = & \frac{1+t^2}{2} \Omega + \frac{t^2-3}{2(1+t^2)} \Omega \tilde{\psi} + \frac{5+t^2}{2(1+t^2)} \Omega \tilde{\psi}^2 + \frac{1}{2} \left(-\tilde{\psi} \Omega + \tilde{\psi}^2 \Omega \right) \\ & + \frac{1}{1+t^2} \left(\tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi}^2 - \tilde{\psi}^2 \Omega \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^2 \Omega \tilde{\psi}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Podstawiając $\tilde{\psi}_1$ i $\tilde{\psi}_2$ z powrotem do wzoru (A.11) i przekształcając otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}} = & \frac{\Omega \cdot \tilde{\psi}}{2(1+t^2)} \left[(1-t^2)\tilde{\psi} - 2\tilde{\psi}^2 \right] + \frac{t^2-1}{2} \Omega + \frac{1}{2} \left(\Omega \tilde{\psi} + \Omega \tilde{\psi}^2 - \tilde{\psi} \Omega + \tilde{\psi}^2 \Omega \right) \\ & + \frac{1}{1+t^2} \left(\tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi}^2 - \tilde{\psi}^2 \Omega \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^2 \Omega \tilde{\psi}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Ponieważ $\tilde{\psi}$ jest tensorem skośnie-symetrycznym, więc jego pochodna $\dot{\tilde{\psi}}$ również. Zachodzi zatem związek $\dot{\tilde{\psi}} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{\psi}} - \dot{\tilde{\psi}}^T)$. Wykorzystując tę zależność w równaniu (A.17) otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}} = & \frac{1-t^2}{2(1+t^2)} (\Omega \cdot \tilde{\psi}) \tilde{\psi} + \frac{t^2-1}{2} \Omega + \frac{1}{2} \left(\Omega \tilde{\psi} + \Omega \tilde{\psi}^2 - \tilde{\psi} \Omega + \tilde{\psi}^2 \Omega \right) \\ & + \frac{1}{1+t^2} \left(\tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi} + \tilde{\psi}^2 \Omega \tilde{\psi}^2 \right). \end{aligned}$$

Rozbijamy następnie powyższe równanie na dwie części,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}}_A = & \frac{1-t^2}{2(1+t^2)} (\Omega \cdot \tilde{\psi}) \tilde{\psi} + \frac{t^2}{2} \Omega + \frac{1}{2} \left(\Omega \tilde{\psi}^2 + \tilde{\psi}^2 \Omega \right) + \frac{1-t^2}{2(1+t^2)} \tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi} + \frac{1}{1+t^2} \tilde{\psi}^2 \Omega \tilde{\psi}^2, \\ \dot{\tilde{\psi}}_B = & \frac{1}{2} \left(\tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \Omega + \Omega \tilde{\psi} - \Omega \right). \end{aligned}$$

Rozpisując człon $\dot{\tilde{\psi}}_A$ przy użyciu notacji wskaźnikowej, otrzymamy że jest on równy 0. Stąd otrzymamy ostatecznie

$$\dot{\tilde{\psi}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\psi} \Omega \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \Omega + \Omega \tilde{\psi} - \Omega \right),$$

co jest postacią równania ruchu obrotowego bryły sztywnej (2.86) dla parametryzacji Cayleya.

A.2 Dowód dokładnego rozwiązywania równania generującego rotacje dla parametryzacji kanonicznej

Udowodnimy, że równanie generujące rotacje dla parametryzacji kanonicznej (2.93) jest rozwiązywane dokładnie przy pomocy metod: punktu środkowego (2.118) oraz zmodyfikowanej metody trapezów (2.127). Zapiszmy równanie (2.93) w postaci

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{\Omega} - \frac{1}{2}(\mathbf{\Omega}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{\Omega}) + \gamma(\mathbf{S}^2\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}\mathbf{S}^2 - 2\mathbf{S}\mathbf{\Omega}\mathbf{S}), \quad (\text{A.18})$$

gdzie $\mathbf{\Omega}$ jest ustaloną macierzą skośnie symetryczną, a γ jest funkcją skalarną \mathbf{S} .

Prawą stronę równania (A.18) oznaczmy przez $\mathbf{f}(\mathbf{S})$. Zauważmy, że zachodzi wówczas

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega}, \quad \text{dla } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.19})$$

w szczególności $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{\Omega}$.

Wartość macierzy skośnie symetrycznej \mathbf{S} dla chwili czasu $t_n = nh$ oznaczmy przez \mathbf{S}_n .

Metoda punktu środkowego. Przepiszmy równanie (2.118) w postaci

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + hf\left(\mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{f}_n\right).$$

Dla wartości początkowej $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$, po pierwszym kroku mamy

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0 + hf\left(\mathbf{S}_0 + \frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{S}_0)\right) = hf\left(\frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{0})\right) = hf\left(\frac{h}{2}\mathbf{\Omega}\right) = h\mathbf{\Omega}. \quad (\text{A.20})$$

Następnie metodą indukcji matematycznej udowadniamy:

Zakładamy: $\mathbf{S}_n = nh\mathbf{\Omega}$.

Teza: $\mathbf{S}_{n+1} = (n+1)h\mathbf{\Omega}$.

Dowód:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbf{S}_n + hf\left(\mathbf{S}_n + \frac{h}{2}\mathbf{f}(\mathbf{S}_n)\right) = nh\mathbf{\Omega} + hf\left(nh\mathbf{\Omega} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(nh\mathbf{\Omega})\right) \\ &= nh\mathbf{\Omega} + hf\left(nh\mathbf{\Omega} + \frac{h}{2}\mathbf{\Omega}\right) = nh\mathbf{\Omega} + hf\left((nh + \frac{h}{2})\mathbf{\Omega}\right) \\ &= nh\mathbf{\Omega} + h\mathbf{\Omega} = (n+1)h\mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Zmodyfikowana metoda trapezów. Przepiszmy równanie (2.127) w postaci

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{S}_n) + \mathbf{f}(\mathbf{S}_{n+1})].$$

Dla $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$, po pierwszym kroku mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{S}_0 + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{S}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{S}_0 + h\mathbf{f}(\mathbf{S}_0))] \\ &= \frac{h}{2} [\mathbf{\Omega} + \mathbf{f}(h\mathbf{\Omega})] = \frac{h}{2} (\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}) = h\mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Następnie korzystamy z zasady indukcji matematycznej.

Zakładamy: $\mathbf{S}_n = nh\mathbf{\Omega}$.

Teza: $\mathbf{S}_{n+1} = (n+1)h\mathbf{\Omega}$.

Dowód:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbf{S}_n + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{S}_n) + \mathbf{f}(\mathbf{S}_n + h\mathbf{f}(\mathbf{S}_n))] = nh\mathbf{\Omega} + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(nh\mathbf{\Omega}) + \mathbf{f}(nh\mathbf{\Omega} + h\mathbf{f}(nh\mathbf{\Omega}))] \\ &= nh\mathbf{\Omega} + \frac{h}{2} [\mathbf{\Omega} + \mathbf{f}(nh\mathbf{\Omega} + h\mathbf{\Omega})] = nh\mathbf{\Omega} + \frac{h}{2} [\mathbf{\Omega} + \mathbf{f}((n+1)h\mathbf{\Omega})] \\ &= nh\mathbf{\Omega} + \frac{h}{2} (\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}) = nh\mathbf{\Omega} + h\mathbf{\Omega} = (n+1)h\mathbf{\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Zatem udowodniliśmy dla obu metod, że macierz $\mathbf{S}(t_n) = \mathbf{S}_n = nh\mathbf{\Omega}$. Stąd, na podstawie wzoru (2.74), odpowiadająca jej macierz rotacji ma postać

$$\mathbf{R}(t_n) = \mathbf{I} + \frac{\sin \sigma}{\sigma} (nh\mathbf{\Omega}) + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} (nh\mathbf{\Omega})^2, \quad (\text{A.24})$$

gdzie $\sigma = \sqrt{-\frac{1}{2}\text{tr}(nh\mathbf{\Omega})^2} = nh\sqrt{-\frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{\Omega})^2}$.

Rozwiązanie dokładne wyjściowego równania (2.86), dla chwili czasu $t_n = nh$, na podstawie wzoru (2.87), ma postać

$$\mathbf{R}_{dok}(t_n) = \mathbf{I} + \frac{\sin \sigma}{\sigma} (nh\mathbf{\Omega}) + \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} (nh\mathbf{\Omega})^2, \quad (\text{A.25})$$

gdzie σ ma taką samą postać jak we wzorze (A.24). Ze wzorów (A.24) i (A.25) wynika, że macierz rotacji uzyskana z numerycznego rozwiązania równania (A.18), dla chwili czasu $t_n = nh$, jest dokładnie taka sama jak rozwiązanie dokładne tego równania w tej samej chwili czasu. Podkreślamy, że wynik ten uzyskano dla $\mathbf{\Omega}$ stałego w czasie.

A.3 Twierdzenie o postaci rozwiązania liniowego macierzowego równania różniczkowego o współczynnikach zmiennych w czasie

Twierdzenie A.3.1 Niech dane będzie macierzowe równanie różniczkowe, jednorodne, pierwszego rzędu, o współczynnikach zmiennych w czasie

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t), \quad (\text{A.26})$$

gdzie \mathbf{X} i \mathbf{A} są funkcjami macierzowymi o wartościach należących do $\mathbb{R}^{n \times n}$, zmiennej rzeczywistej, z warunkiem początkowym

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \quad (\text{A.27})$$

Jeżeli \mathbf{A} jest funkcją ciągłą, wówczas rozwiązanie zagadnienia początkowego (A.26), (A.27) jest postaci:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{X}_0, \quad (\text{A.28})$$

gdzie:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{I}_n + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \dots \quad (\text{A.29})$$

Macierz Φ nazywamy *macierzą podstawową (fundamentalną, tranzycyjną)* równania (A.26).

Dowód powyższego twierdzenia podajemy za Kaczorek [18] str. 365. Rozwiązanie zagadnienia (A.26), (A.27) znajdujemy stosując metodę kolejnych przybliżeń. Całkując stronami równanie (A.26) w granicach od t_0 do t , oraz uwzględniając warunek początkowy (A.27) otrzymujemy:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}(\tau) d\tau.$$

Za przybliżenie zerowe rozwiązania $\mathbf{X}(t)$ przyjmujemy wartość początkową \mathbf{X}_0 . Kolejne przybliżenia rozwiązania $\mathbf{X}(t)$ otrzymujemy ze wzoru:

$$\mathbf{X}_{k+1}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}_k(\tau) d\tau.$$

Dla $k = 0$ mamy:

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}_0 d\tau = \left[\mathbf{I}_n + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right] \mathbf{X}_0.$$

Dla $k = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(t) &= \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}_1 d\tau = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \left[\mathbf{I}_n + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 \right] \mathbf{X}_0 d\tau \\ &= \left[\mathbf{I}_n + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right] \mathbf{X}_0. \end{aligned}$$

Kontynuując tę procedurę dla $k \rightarrow \infty$, otrzymujemy rozwiązanie (A.28). Można pokazać, że szereg (A.29) jest jednostajnie zbieżny dla t należącego do (ograniczonego lub nieograniczonego) przedziału, w którym \mathbf{A} jest funkcją ciągłą.

Zauważmy, że zachodzi własność:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0). \quad (\text{A.30})$$

Istotnie:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, t_0) &= \frac{d}{dt} \left[\mathbf{I}_n + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\tau + \dots \right] \\ &= \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau + \mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 d\tau + \dots \end{aligned}$$

Zmieniono przy tym, po zróżniczkowaniu, nazwy zmiennych niemych. Po wyłączeniu $\mathbf{A}(t)$ lewostronnie przed nawias, otrzymamy wzór (A.30). Jeżeli przyjmiemy teraz rozwiązanie równania zdefiniowane wzorem (A.28), wówczas ze wzoru (A.30) mamy:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{\Phi}(t, t_0) \mathbf{X}_0 = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{X}_0 = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t),$$

oraz

$$\mathbf{X}(t_0) = \Phi(t_0, t_0) \mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_n \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0.$$

Stąd funkcja (A.28) jest rozwiązaniem zagadnienia (A.26), (A.27).

A.4 Operatory \mathbf{T} i \mathbf{T}^{-1}

Poniżej zdefiniowano i wyprowadzono wzory na operatory styczne \mathbf{T} i \mathbf{T}^{-1} dla parametryzacji kanonicznej. Operatory te łączą przyrosty wektorów rotacji w różnych płaszczyznach stycznych i są wykorzystywane we wzorze na operator \mathbf{K} .

A.4.1 Operator \mathbf{T}

Rozważmy przyrost rotacji od położenia wyznaczonego przez macierz rotacji \mathbf{R}_n do położenia wyznaczonego przez macierz rotacji \mathbf{R}_{n+1} . Przypuśćmy, że przyrost ten jest realizowany przez prawostronne złożenie z macierzą rotacji o pseudowektorze rotacji Θ . Mamy wówczas zależność:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_n \exp(\widetilde{\Theta}), \quad (\text{A.31})$$

przy czym

$$\mathbf{R}_n \widetilde{\Theta} \in T_{\mathbf{R}_n} SO(3),$$

tzn. należy do przestrzeni stycznej do $SO(3)$ w \mathbf{R}_n . Rozważmy teraz pewne zaburzenie rotacji \mathbf{R}_{n+1} . Tę zaburzoną rotację można opisać na dwa sposoby. Pierwszy

sposób polega na złożeniu prawostronnym z macierzą wyznaczoną przez pseudowektor rotacji $\varepsilon\Delta\Theta$:

$$\mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{R}_{n+1} \exp(\varepsilon\widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)}), \quad (\text{A.32})$$

przy tym

$$\mathbf{R}_{n+1}\widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)} \in T_{\mathbf{R}_{n+1}}SO(3).$$

Dolny indeks $n+1$ przy wektorze $\Delta\Theta$ dodano dla podkreślenia, że wektor ten należy do przestrzeni stycznej do grupy $SO(3)$ w punkcie \mathbf{R}_{n+1} .

Drugi sposób polega na dodaniu do wektora Θ wektora przyrostu rotacji $\varepsilon\Delta\Theta_{(n)}$, należącego do tej samej przestrzeni stycznej, tzn. $T_{\mathbf{R}_n}SO(3)$:

$$\mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{R}_n \exp(\widetilde{\Theta}_\varepsilon), \quad (\text{A.33})$$

gdzie

$$\widetilde{\Theta}_\varepsilon = \Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}. \quad (\text{A.34})$$

Podobnie jak poprzednio dolny indeks n przy wektorze $\Delta\Theta$ oznacza, że wektor ten należy do przestrzeni stycznej $T_{\mathbf{R}_n}SO(3)$.

Wyprowadzimy teraz związek łączący wektory $\Delta\Theta_{(n)}$ i $\Delta\Theta_{(n+1)}$. Porównując wzory (A.32) i (A.33) mamy:

$$\exp(\widetilde{\Theta}_\varepsilon) = \exp(\widetilde{\Theta}) \exp(\varepsilon\widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)}). \quad (\text{A.35})$$

Korzystając ze związku

$$\exp(\widetilde{\Theta})^{-1} = \exp(-\widetilde{\Theta}), \quad (\text{A.36})$$

otrzymujemy z równości (A.35)

$$\exp(\varepsilon\widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)}) = \exp(-\widetilde{\Theta}) \exp(\widetilde{\Theta}_\varepsilon). \quad (\text{A.37})$$

Zdefiniujmy pół-tangensowy pseudowektor rotacji

$$\overline{\Theta} = \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \Theta. \quad (\text{A.38})$$

Korzystając ze wzoru (2.85) na składanie pseudowektorów rotacji, otrzymujemy z (A.37)

$$\overline{\varepsilon\Delta\Theta_{(n+1)}} = \frac{1}{1 + \overline{\Theta} \cdot \overline{\Theta}_\varepsilon} \left[\overline{\Theta}_\varepsilon - \overline{\Theta} - \overline{\Theta}_\varepsilon \times \overline{\Theta} \right], \quad (\text{A.39})$$

Następnie różniczkujemy obustronnie równość (A.39) ze względu na ε i podstawiamy $\varepsilon = 0$. Różniczkując lewą stronę otrzymujemy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \overline{\varepsilon\Delta\Theta_{(n+1)}} = \frac{\Delta\Theta_{(n+1)}}{2}. \quad (\text{A.40})$$

Różniczkujemy następnie prawą stronę równości (A.39) względem ε . (Różniczkowanie względem tej zmiennej będziemy oznaczali w poniższym wyprowadzeniu symbolem $'$):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1 + \bar{\Theta} \cdot \bar{\Theta}_\varepsilon} (\bar{\Theta}_\varepsilon - \bar{\Theta} - \bar{\Theta}_\varepsilon \times \bar{\Theta}) \right]' \\ &= \left(\frac{1}{1 + \bar{\Theta} \cdot \bar{\Theta}_\varepsilon} \right)' (\bar{\Theta}_\varepsilon - \bar{\Theta} - \bar{\Theta}_\varepsilon \times \bar{\Theta}) + \left(\frac{1}{1 + \bar{\Theta} \cdot \bar{\Theta}_\varepsilon} \right) (\bar{\Theta}_\varepsilon - \bar{\Theta} - \bar{\Theta}_\varepsilon \times \bar{\Theta})' \\ &= -\frac{\bar{\Theta} \cdot \bar{\Theta}'_\varepsilon}{(1 + \bar{\Theta} \cdot \bar{\Theta}_\varepsilon)^2} (\bar{\Theta}_\varepsilon - \bar{\Theta} - \bar{\Theta}_\varepsilon \times \bar{\Theta}) + \left(\frac{1}{1 + \bar{\Theta} \cdot \bar{\Theta}_\varepsilon} \right) (\bar{\Theta}'_\varepsilon + \bar{\Theta} \times \bar{\Theta}'_\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Podstawiając $\varepsilon = 0$ w powyższym wzorze, oraz zauważając że $\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \bar{\Theta}_\varepsilon = D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{\Theta} D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)}}{(1 + \|\bar{\Theta}\|^2)^2} (\bar{\Theta} - \bar{\Theta} - \bar{\Theta} \times \bar{\Theta}) + \frac{1}{1 + \|\bar{\Theta}\|^2} [D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)} + \bar{\Theta} \times (D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)})] \\ &= \frac{1}{1 + \|\bar{\Theta}\|^2} (\mathbf{I} + \bar{\Theta} \times \mathbf{I}) D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Ze wzorów (A.40) i (A.42) mamy

$$\frac{\Delta\Theta_{(n+1)}}{2} = \frac{1}{1 + \|\bar{\Theta}\|^2} (\mathbf{I} + \bar{\Theta} \times \mathbf{I}) D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)}. \quad (\text{A.43})$$

Następnie obliczamy pochodną kierunkową $D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)}$

$$D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \bar{\Theta}_\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \left(\frac{\text{tg}(\|\Theta_\varepsilon\|/2)}{\|\Theta_\varepsilon\|} \Theta_\varepsilon \right). \quad (\text{A.44})$$

Mamy

$$\begin{aligned} (\bar{\Theta}_\varepsilon)' &= \left(\frac{\text{tg}(\|\Theta_\varepsilon\|/2)}{\|\Theta_\varepsilon\|} \right)' \Theta_\varepsilon + \frac{\text{tg}(\|\Theta_\varepsilon\|/2)}{\|\Theta_\varepsilon\|} \Theta'_\varepsilon \\ &= \left(\frac{\|\Theta_\varepsilon\|' \|\Theta_\varepsilon\|}{2 \cos^2(\|\Theta_\varepsilon\|/2)} - \text{tg}(\|\Theta_\varepsilon\|/2) \|\Theta_\varepsilon\|' \right) \frac{1}{\|\Theta_\varepsilon\|^2} \Theta_\varepsilon + \frac{\text{tg}(\|\Theta_\varepsilon\|/2)}{\|\Theta_\varepsilon\|} \Delta\Theta_{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Korzystając ze wzoru

$$D\|\mathbf{x}\| = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \quad (\text{A.46})$$

dla dowolnego wektora \mathbf{x} , oraz wykorzystując wzór na pochodną funkcji złożonej mamy

$$\|\Theta_\varepsilon\|' = \left\| \Theta + \varepsilon \Delta\Theta_{(n)} \right\|' = \frac{\Theta + \varepsilon \Delta\Theta_{(n)}}{\|\Theta + \varepsilon \Delta\Theta_{(n)}\|} \cdot \Delta\Theta_{(n)}. \quad (\text{A.47})$$

Stąd,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \|\Theta_\varepsilon\| = \frac{\Theta \cdot \Delta\Theta_{(n)}}{\|\Theta\|}. \quad (\text{A.48})$$

Podstawiając $\varepsilon = 0$ w (A.45) oraz korzystając z (A.48) mamy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \bar{\Theta}_\varepsilon = \left(\frac{\Theta \cdot \Delta\Theta_{(n)}}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} - \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \Theta \cdot \Delta\Theta_{(n)} \right) \frac{1}{\|\Theta\|^2} \Theta + \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \Delta\Theta_{(n)}.$$

Wprowadzając oznaczenie $\mathbf{e} = \frac{\Theta}{\|\Theta\|}$ mamy:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \bar{\Theta}_\varepsilon &= \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \Delta\Theta_{(n)}}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} - \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \mathbf{e} \cdot \Delta\Theta_{(n)} \right) \mathbf{e} + \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \Delta\Theta_{(n)} \\ &= \frac{(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \Delta\Theta_{(n)}}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} - \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \Delta\Theta_{(n)} + \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \Delta\Theta_{(n)}. \end{aligned}$$

Po wyłączeniu $\Delta\Theta_{(n)}$ przed nawias ostatecznie otrzymujemy

$$D\bar{\Theta} \Delta\Theta_{(n)} = \left[\frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \frac{1}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right] \Delta\Theta_{(n)}. \quad (\text{A.49})$$

Podstawiamy następnie wzór (A.49) do równania (A.43) oraz korzystamy z definicji pseudowektora rotacji (A.38). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_{(n+1)} &= \frac{2}{1 + \text{tg}^2(\|\Theta\|/2)} (\mathbf{I} + \text{tg}(\|\Theta\|/2) \mathbf{e} \times \mathbf{I}) \\ &\quad \left[\frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \frac{1}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right] \Delta\Theta_{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Otrzymaliśmy zależność liniową między wektorami $\Delta\Theta_{(n+1)}$ i $\Delta\Theta_{(n)}$. Operator realizujący tę zależność oznaczmy symbolem \mathbf{T} . Mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\Theta) &= \frac{2}{1 + \text{tg}^2(\|\Theta\|/2)} \left[\frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \frac{1}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\text{tg}^2(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \mathbf{e} \times (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Zauważmy, że:

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \mathbf{e} \times \mathbf{I} - \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \tilde{\mathbf{e}} = \frac{\tilde{\Theta}}{\|\Theta\|}, \quad (\text{A.52})$$

gdyż $\mathbf{e} \times \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{e}}$, oraz $\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = (\mathbf{e} \times \mathbf{e}) \otimes \mathbf{e} = \mathbf{0}$. Ze wzorów (A.51) oraz (A.52) otrzymujemy

$$\mathbf{T}(\Theta) = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \gamma \tilde{\Theta}, \quad (\text{A.53})$$

gdzie, po przyjęciu oznaczenia $\Theta = \|\Theta\|$, mamy

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\Theta/2)}{\Theta [1 + \operatorname{tg}^2(\Theta/2)]} = \frac{2 \sin(\Theta/2) \cos(\Theta/2)}{\Theta} = \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}, \quad (\text{A.54})$$

$$\beta = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2(\Theta/2)} \frac{1}{2 \cos^2(\Theta/2)} - \frac{2 \operatorname{tg}(\Theta/2)}{\Theta [1 + \operatorname{tg}^2(\Theta/2)]} = 1 - \frac{\sin(\Theta)}{\Theta}, \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2 \operatorname{tg}^2(\Theta/2)}{\Theta^2 [1 + \operatorname{tg}^2(\Theta/2)]} = \frac{\operatorname{tg}(\Theta/2)}{\Theta} \alpha = \frac{\sin(\Theta/2)}{\cos(\Theta/2)} \frac{2 \sin(\Theta/2) \cos(\Theta/2)}{\Theta^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\Theta/2)}{\Theta/2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

przy tym skorzystano ze związku między funkcjami tg , \sin i \cos oraz wzoru na jedynkę trygonometryczną. Z (A.53) i (A.54) – (A.56) ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{T}(\Theta) = \frac{\sin(\|\Theta\|)}{\|\Theta\|} \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\sin \|\Theta\|}{\|\Theta\|} \right) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|/2} \right)^2 \widetilde{\Theta}. \quad (\text{A.57})$$

Ze wzorów (A.50) i (A.57) mamy zależność

$$\Delta\Theta_{(n+1)} = \mathbf{T}(\Theta) \Delta\Theta_{(n)}. \quad (\text{A.58})$$

Zatem operator liniowy \mathbf{T} pozwala wyrazić związek pomiędzy wektorem przyrostu rotacji należącym do przestrzeni stycznej do tensora rotacji \mathbf{R}_n , a wektorem przyrostu rotacji należącym do przestrzeni stycznej do tensora \mathbf{R}_{n+1} .

A.4.2 Operator \mathbf{T}^{-1}

Wyprowadzimy teraz związek odwrotny do (A.58), tzn. przeprowadzający wektor $\Delta\Theta_{(n+1)}$ w $\Delta\Theta_{(n)}$. Z równania (A.35) mamy

$$\exp(\widetilde{\Theta}_\varepsilon) = \exp(\widetilde{\Theta}) \exp(\varepsilon \widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)}),$$

gdzie $\Theta_\varepsilon = \Theta + \varepsilon \Delta\Theta_{(n)}$. Po zastosowaniu wzoru (2.85) na składanie półtangenso-
wych pseudowektorów rotacji, otrzymujemy z powyższej równości

$$\overline{\Theta}_\varepsilon = \frac{1}{1 - \overline{\Theta} \cdot \varepsilon \overline{\Delta\Theta}_{(n+1)}} \left(\overline{\Theta} + \varepsilon \overline{\Delta\Theta}_{(n+1)} - \overline{\Theta} \times \varepsilon \overline{\Delta\Theta}_{(n+1)} \right), \quad (\text{A.59})$$

Zróźniczkujemy następnie powyższą równość obustronnie względem ε a następnie podstawmy $\varepsilon = 0$. Pochodna lewej strony dla $\varepsilon = 0$ jest postaci

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \overline{\Theta}_\varepsilon = D\overline{\Theta} \Delta\Theta_{(n)}. \quad (\text{A.60})$$

Zróżniczkujemy teraz prawą stronę równości (A.59). Podobnie jak poprzednio pochodną względem ε będziemy oznaczać znakiem $'$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{1 - \bar{\Theta} \cdot \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)}} \left(\bar{\Theta} + \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} - \bar{\Theta} \times \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} \right) \right]' \\ &= \left(\frac{1}{1 - \bar{\Theta} \cdot \varepsilon \Theta_{(n+1)}} \right)' \left(\bar{\Theta} + \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} - \bar{\Theta} \times \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} \right) + \\ & \quad \frac{1}{1 - \bar{\Theta} \cdot \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)}} \left[\left(\varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} \right)' - \bar{\Theta} \times \left(\varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} \right)' \right], \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

gdzie

$$\left(\frac{1}{1 - \bar{\Theta} \cdot \varepsilon \Theta_{(n+1)}} \right)' = \frac{\bar{\Theta} \cdot \left(\varepsilon \Theta_{(n+1)} \right)'}{\left(1 - \bar{\Theta} \cdot \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)} \right)^2}. \quad (\text{A.62})$$

Ze wzoru (A.40) mamy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)}}{\varepsilon \Theta_{(n+1)}} = \frac{\Delta \Theta_{(n+1)}}{2}. \quad (\text{A.63})$$

Stąd i ze wzoru (A.62)

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\frac{1}{1 - \bar{\Theta} \cdot \varepsilon \Delta \Theta_{(n+1)}} \right) = \frac{\bar{\Theta} \cdot \Delta \Theta_{(n+1)}}{2}. \quad (\text{A.64})$$

Podstawiając $\varepsilon = 0$ do (A.61) i korzystając z (A.64) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\Theta} \cdot \Delta \Theta_{(n+1)}}{2} \bar{\Theta} + \frac{\Delta \Theta_{(n+1)}}{2} - \bar{\Theta} \times \left(\frac{\Delta \Theta_{(n+1)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{\Theta} \cdot \Delta \Theta_{(n+1)} \bar{\Theta} + \Delta \Theta_{(n+1)} - \bar{\Theta} \times \Delta \Theta_{(n+1)} \right) \\ &= \left(\mathbf{I} + \bar{\Theta} \otimes \bar{\Theta} - \bar{\Theta} \times \mathbf{I} \right) \frac{\Delta \Theta_{(n+1)}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Ze wzorów (A.60) i (A.65) mamy

$$D\bar{\Theta} \Delta \Theta_{(n)} = \left(\mathbf{I} + \bar{\Theta} \otimes \bar{\Theta} - \bar{\Theta} \times \mathbf{I} \right) \frac{\Delta \Theta_{(n+1)}}{2}. \quad (\text{A.66})$$

Z równania (A.49) wynika, że pochodną $\bar{\Theta}(\Theta)$ można przedstawić w postaci

$$D\bar{\Theta} = \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \mathbf{I} + \left(\frac{1}{2 \cos^2(\|\Theta\|/2)} - \frac{\text{tg}(\|\Theta\|/2)}{\|\Theta\|} \right) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (\text{A.67})$$

Aby w równaniu (A.66) uzyskać po lewej stronie $\Delta \Theta_{(n)}$, musimy znaleźć tensor odwrotny do (A.67). Posłużymy się tu własnością (patrz Cardona, Gerardin [8] wzór (43))

$$\left(\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right)^{-1} = \alpha_1 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \quad (\text{A.68})$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad \beta_1 = \frac{-\beta}{\alpha(\alpha + \beta)}.$$

W przypadku pochodnej (A.67) mamy

$$\alpha_1 = \frac{\|\Theta\|}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)}, \quad (\text{A.69})$$

$$\beta_1 = 2 \cos^2(\|\Theta\|/2) - \frac{\|\Theta\|}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)}, \quad (\text{A.70})$$

i stąd

$$(D\bar{\Theta})^{-1} = \frac{\|\Theta\|}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)} \mathbf{I} + \left[2 \cos^2(\|\Theta\|/2) - \frac{\|\Theta\|}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)} \right] \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (\text{A.71})$$

Wracając do związku (A.66) mamy

$$\Delta\Theta_{(n)} = (D\bar{\Theta})^{-1} (\mathbf{I} + \bar{\Theta} \otimes \bar{\Theta} - \bar{\Theta} \times \mathbf{I}) \frac{\Delta\Theta_{(n+1)}}{2}. \quad (\text{A.72})$$

Otrzymaliśmy ponownie zależność liniową między wektorami $\Delta\Theta_{(n)}$ i $\Delta\Theta_{(n+1)}$. Operator realizujący tę zależność jest, na mocy (A.58), operatorem odwrotnym do \mathbf{T} . Mamy zatem

$$\mathbf{T}^{-1}(\Theta) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\|\Theta\|}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)} \mathbf{I} + \left[2 \cos^2(\|\Theta\|/2) - \frac{\|\Theta\|}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)} \right] \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \right\} (\mathbf{I} + \bar{\Theta} \otimes \bar{\Theta} - \bar{\Theta} \times \mathbf{I}).$$

Oznaczając $\Theta = \|\Theta\|$ i mnożąc w powyższym wzorze przez siebie wyrażenia w nawiasach mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}(\Theta) &= \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \mathbf{I} + \left[\cos^2(\Theta/2) - \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \right] \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \bar{\Theta} \otimes \bar{\Theta} \\ &+ \left[\cos^2(\Theta/2) - \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \right] (\mathbf{e} \cdot \bar{\Theta}) \mathbf{e} \otimes \bar{\Theta} - \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \bar{\Theta} \times \mathbf{I} \\ &- \left[\cos^2(\Theta/2) - \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \right] (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) (\bar{\Theta} \times \mathbf{I}). \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Zauważmy, że

$$(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) (\bar{\Theta} \times \mathbf{I}) = \mathbf{e} \otimes (\mathbf{e} \times \bar{\Theta}) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.74})$$

gdym

$$\bar{\Theta} = \frac{\operatorname{tg}(\Theta/2)}{\Theta} \Theta = \operatorname{tg}(\Theta/2) \mathbf{e}. \quad (\text{A.75})$$

Wracając do (A.73) i wykorzystując (A.74) oraz (A.75) mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}(\Theta) &= \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \mathbf{I} + \left\{ \cos^2(\Theta/2) - \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} + (\Theta/2) \operatorname{tg}(\Theta/2) \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos^2(\Theta/2) - \frac{\Theta/2}{\operatorname{tg}(\Theta/2)} \right] (\mathbf{e} \cdot \overline{\Theta}) \operatorname{tg}(\Theta/2) \right\} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \frac{\Theta}{2 \operatorname{tg}(\Theta/2)} \widetilde{\Theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

Przekształcając wyrażenie w nawiasie klamrowym, korzystając z definicji (A.38) operatora $\overline{(\cdot)}$ i zastępując $\Theta = \|\Theta\|$ otrzymamy:

$$\mathbf{T}^{-1}(\Theta) = \frac{\|\Theta\|/2}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)} \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\|\Theta\|/2}{\operatorname{tg}(\|\Theta\|/2)} \right) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \frac{1}{2} \widetilde{\Theta}. \quad (\text{A.77})$$

Ostatecznie ze wzorów (A.72) i (A.77) mamy:

$$\Delta \Theta_{(n)} = \mathbf{T}^{-1} \Delta \Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.78})$$

Operator liniowy \mathbf{T}^{-1} pozwala zatem wyrazić związek pomiędzy wektorem przyrostu rotacji należącym do przestrzeni stycznej do tensora rotacji \mathbf{R}_{n+1} , opisującego końcowe położenie ciała, a wektorem przyrostu rotacji należącym do przestrzeni stycznej do tensora \mathbf{R}_n , opisującego początkowe położenie ciała.

A.5 Operatory styczne dla algorytmów A1, A2 i A3

Poniżej wyprowadzimy wzory na pochodne funkcji residuów dla algorytmów opisywanych w Rozdz.4, rozważając dwa przypadki wektora momentu zewnętrznego:

1. niezależny od położenia ciała opisanego przez tensor rotacji \mathbf{R} , czyli od wektora przyrostu rotacji Θ , oraz
2. zależny od położenia ciała, a więc i od wektora przyrostu rotacji Θ , dla obciążenia z przykładu dla wirującego bąka z Rozdz.5.2.

Pochodne funkcji residuów wyznaczają operatory styczne \mathbf{K} i \mathbf{K}_m dla metody Newtona.

A.5.1 Algorytm A1

Poniżej wyprowadzona zostanie postać operatora stycznego dla algorytmu A1, omówionego w Rozdz. 4.2.1. Rozważmy, postać residuum w funkcji nieznanego wektora Θ ,

$$\mathbf{r}(\Theta) = \mathbb{J}\mathbf{A}_{n+1} + \mathbf{W}_{n+1} \times \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{m}_{n+1}. \quad (\text{A.79})$$

Aby znaleźć miejsce zerowe powyższej funkcji metodą Newtona, musimy znać jej pochodną $\mathbf{K}(\Theta) = D\mathbf{r}(\Theta)$. W tym celu obliczmy pochodną kierunkową funkcji $\mathbf{r}(\Theta)$ w kierunku dowolnego wektora $\Delta\Theta$

Moment niezależny od Θ

Zakładamy, że moment siły zewnętrznej \mathbf{m}_{n+1} nie zależy od wektora przyrostu rotacji Θ , w szczególności od położenia ciała opisanego tensorem rotacji \mathbf{R}_{n+1} . Pochodna kierunkowa funkcji residuum w kierunku pewnego wektora $\Delta\Theta_{(n)}$ ma wówczas postać

$$\begin{aligned} D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{r}(\Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}) \\ &= \mathbb{J} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{A}_{n+1}^\varepsilon \right) + \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon \right) \times \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{n+1} \times \mathbb{J} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon \right) - \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon \right)^T \mathbf{m}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Z równań 3 i 4 w Tabeli 4.1 wynika, że wektory prędkości i przyspieszenia kąowego w chwili t_{n+1} , w funkcji wektora Θ , $\mathbf{W}_{n+1}(\Theta)$ i $\mathbf{A}_{n+1}(\Theta)$, dla algorytmu A1, wyrażają

się następującymi wzorami

$$\mathbf{W}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \boldsymbol{\Theta} - \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{W}_n^*, \quad (\text{A.81})$$

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \boldsymbol{\Theta} - \frac{1}{\beta h} \mathbf{W}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \mathbf{A}_n, \quad (\text{A.82})$$

przy tym wzór na prędkość kątową jest taki sam jak dla algorytmu A3, tzn. w postaci (4.71). Pochodne kierunkowe powyższych wektorów będą wyrażać się wzorami

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\frac{\gamma}{\beta h} (\boldsymbol{\Theta} + \varepsilon \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)}) - \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{W}_n^* \right] = \frac{\gamma}{\beta h} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)}, \quad (\text{A.83})$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{A}_{n+1}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\frac{1}{\beta h^2} (\boldsymbol{\Theta} + \varepsilon \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)}) - \frac{1}{\beta h} \mathbf{W}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \mathbf{A}_n \right] = \frac{1}{\beta h^2} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)}. \quad (\text{A.84})$$

Obliczmy teraz pochodną kierunkową $\mathbf{R}_{n+1}(\boldsymbol{\Theta})$. Mamy

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\mathbf{R}_n \exp(\tilde{\boldsymbol{\Theta}} + \varepsilon \tilde{\Delta} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{(n)}) \right] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\mathbf{R}_n \exp(\tilde{\boldsymbol{\Theta}}) \exp(\varepsilon \tilde{\Delta} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{(n+1)}) \right] \\ &= \mathbf{R}_n \exp(\tilde{\boldsymbol{\Theta}}) \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \tilde{\Delta} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{(n+1)}). \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Obliczmy pochodną w zerze funkcji postaci $\exp(\varepsilon \tilde{\boldsymbol{\Theta}})$. Mamy

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \tilde{\boldsymbol{\Theta}}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\mathbf{I} + \frac{\sin(\varepsilon \Theta)}{\Theta} \tilde{\boldsymbol{\Theta}} + \frac{1 - \cos(\varepsilon \Theta)}{\Theta^2} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^2 \right] \\ &= \left[\cos(\varepsilon \Theta) \tilde{\boldsymbol{\Theta}} + \frac{\sin(\varepsilon \Theta)}{\Theta} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^2 \right]_{\varepsilon=0} = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}, \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

przy tym skorzystano ze wzoru (2.87) na reprezentację eksponentialną tensora rotacji. Korzystając z powyższego wyniku, wzór (A.85) przyjmuje postać:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{R}_n \exp(\tilde{\boldsymbol{\Theta}}) \Delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{(n+1)} = \mathbf{R}_{n+1} \Delta \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{(n+1)}. \quad (\text{A.87})$$

Podstawiając (A.83), (A.84) i (A.87) do wzoru na pochodną kierunkową residuum (A.80) otrzymujemy

$$\begin{aligned} D \mathbf{r}(\boldsymbol{\Theta}) \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)} &= \frac{1}{\beta h^2} \mathbb{J} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)} + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)} \times \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{W}_{n+1} \times \mathbb{J} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{(n)} \\ &\quad + \tilde{\Delta} \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_{(n+1)} \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{m}_{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)}\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1} &= \Delta\Theta_{(n+1)} \times (\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1}) = -(\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1}) \times \Delta\Theta_{(n+1)} \\ &= -(\widetilde{\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1}})\Delta\Theta_{(n+1)}.\end{aligned}\quad (\text{A.89})$$

Podstawiając powyższe do (A.88) i dokonując pewnych przekształceń mamy

$$\begin{aligned}D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h}\mathbb{J}\Delta\Theta_{(n)} - \gamma\mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} \times \Delta\Theta_{(n)} + \gamma\mathbf{W}_{n+1} \times \mathbb{J}\Delta\Theta_{(n)} \right) \\ &\quad - (\widetilde{\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1}})\Delta\Theta_{(n+1)} \\ &= \frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h}\mathbb{J} - \gamma\mathbb{J}\widetilde{\mathbf{W}_{n+1}} + \gamma\widetilde{\mathbf{W}_{n+1}}\mathbb{J} \right) \Delta\Theta_{(n)} - (\widetilde{\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1}})\Delta\Theta_{(n+1)}.\end{aligned}\quad (\text{A.90})$$

Wykorzystując (A.78), tzn.

$$\Delta\Theta_{(n)} = \mathbf{T}^{-1}(\Theta)\Delta\Theta_{(n+1)},$$

z powyższej zależności otrzymujemy

$$D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} = \mathbf{K}(\Theta)\Delta\Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.91})$$

gdzie szukana pochodna funkcji residuum (A.79), czyli operator styczny, jest postaci

$$\mathbf{K}(\Theta) = \frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h}\mathbb{J} - \gamma\mathbb{J}\widetilde{\mathbf{W}_{n+1}} + \gamma\widetilde{\mathbf{W}_{n+1}}\mathbb{J} \right) \mathbf{T}^{-1}(\Theta) - (\widetilde{\mathbf{R}_{n+1}^T\mathbf{m}_{n+1}}). \quad (\text{A.92})$$

Moment zależny od Θ dla wirującego bąka

W przykładzie z wirującym bąkiem, Rozdz.5.2, moment siły jest zależny od położenia ciała, a zatem i od wektora Θ . Stąd jego pochodna nie znika i należy ją uwzględnić przy obliczaniu pochodnej residuum. Mamy

$$\begin{aligned}D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{r}(\Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}) \\ &= \mathbf{K}(\Theta)\Delta\Theta_{(n+1)} - \mathbf{R}_{n+1}^T \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+1}^\varepsilon \right),\end{aligned}\quad (\text{A.93})$$

gdzie \mathbf{K} jest pochodną funkcji residuum (A.79) dla momentu siły \mathbf{m}_{n+1} niezależnego od Θ , daną wzorem (A.92).

Zapiszemy moment siły dany dla wirującego bąka wzorem (5.1) następująco,

$$\mathbf{m}_{n+\alpha} = -Mgl(\mathbf{R}_{n+\alpha}\mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3 = -Mgl[\mathbf{R}_n \exp(\alpha\widetilde{\Theta})\mathbf{e}_3] \times \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.94})$$

Obliczmy pochodną kierunkową $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ dla dowolnej wartości $\alpha \in [0; 1]$. Wzór ten zostanie wykorzystany później dla algorytmów A2 i A3.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\alpha}^\varepsilon &= -Mgl \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\mathbf{R}_n \exp(\alpha \widetilde{\Theta} + \varepsilon \alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n)}) \mathbf{e}_3 \right] \times \mathbf{e}_3 \\ &= -Mgl \left[\mathbf{R}_n \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\alpha \widetilde{\Theta} + \varepsilon \alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n)}) \mathbf{e}_3 \right] \times \mathbf{e}_3 \\ &= -Mgl \left[\mathbf{R}_n \exp(\alpha \widetilde{\Theta}) \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}) \mathbf{e}_3 \right] \times \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Ze wzoru (A.86) mamy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}) = \alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}. \quad (\text{A.96})$$

Z powyższego i z (A.95) mamy

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\alpha}^\varepsilon &= -Mgl \left[\mathbf{R}_n \exp(\alpha \widetilde{\Theta}) (\alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}) \mathbf{e}_3 \right] \times \mathbf{e}_3 \\ &= Mgl \mathbf{e}_3 \times \left[\mathbf{R}_n \exp(\alpha \widetilde{\Theta}) (\alpha \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}) \mathbf{e}_3 \right] \\ &= Mgl \alpha \widetilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\alpha} \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)} \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

Podobnie jak w (A.89) mamy

$$\widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)} \mathbf{e}_3 = -\widetilde{\mathbf{e}}_3 \Delta \Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.98})$$

Stąd wracając do (A.97) otrzymujemy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\alpha}^\varepsilon = -Mgl \alpha \widetilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\alpha} \widetilde{\mathbf{e}}_3 \Delta \Theta_{(n+1)} = \mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta) \Delta \Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.99})$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta) = -Mgl \alpha \widetilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\alpha} \widetilde{\mathbf{e}}_3, \quad (\text{A.100})$$

jest pochodną momentu siły $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ w punkcie Θ . W rozpatrywanym przypadku, dla $\alpha = 1$,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{K}_{m1}(\Theta) \Delta \Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.101})$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{m1}(\Theta) = -Mgl \widetilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+1} \widetilde{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{A.102})$$

Wracając do (A.93) mamy

$$D\mathbf{r}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)} = \left[\mathbf{K}(\Theta) - \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{K}_{m1}(\Theta) \right] \Delta \Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.103})$$

Ostatecznie pochodna funkcji residuum (A.79) dla problemu wirującego bąka i algorytmu A1 ma postać

$$\mathbf{K}_B(\Theta) = \mathbf{K}(\Theta) - \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{K}_{m1}(\Theta), \quad (\text{A.104})$$

gdzie \mathbf{K} i \mathbf{K}_{m1} dane są odpowiednio wzorami (A.92) i (A.102).

A.5.2 Algorytm A2

Postać operatora stycznego dla algorytmu A2, omówionego w Rozdz.4.2.1, wyprowadzimy analogicznie jak dla algorytmu A1. Residuum, którego miejsca zerowego szukamy, dla algorytmu A2, w funkcji nieznanego wektora Θ , ma postać

$$\mathbf{r}(\Theta) = \mathbb{J}\mathbf{A}_{n+\gamma} + \mathbf{W}_{n+\gamma} \times \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+\gamma} - \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma}, \quad (\text{A.105})$$

gdzie

$$\mathbf{R}_{n+\gamma} = \mathbf{R}_n \exp(\gamma \widetilde{\Theta}), \quad \mathbf{W}_{n+\gamma} = (1-\gamma)\mathbf{W}_n + \gamma\mathbf{W}_{n+1}, \quad \mathbf{A}_{n+\gamma} = (1-\gamma)\mathbf{A}_n + \gamma\mathbf{A}_{n+1},$$

patrz wzór 1 w Tabeli 4.2. Podobnie jak dla algorytmu A1, w celu znalezienia pochodnej $\mathbf{K}(\Theta) = D\mathbf{r}(\Theta)$, obliczamy pochodną kierunkową funkcji $\mathbf{r}(\Theta)$ w kierunku dowolnego wektora $\Delta\Theta_{(n)}$.

Moment niezależny od Θ

Zakładamy, że moment siły zewnętrznej $\mathbf{m}_{n+\gamma}$ nie zależy od wektora przyrostu rotacji Θ , w szczególności od położenia ciała (tensora rotacji \mathbf{R}). Pochodna kierunkowa funkcji residuum w kierunku dowolnego wektora $\Delta\Theta_{(n)}$ ma wówczas postać

$$\begin{aligned} D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{r}(\Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}) \\ &= \mathbb{J} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{A}_{n+\gamma}^\varepsilon \right) + \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+\gamma}^\varepsilon \right) \times \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+\gamma} \\ &\quad + \mathbf{W}_{n+\gamma} \times \mathbb{J} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+\gamma}^\varepsilon \right) - \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+\gamma}^\varepsilon \right)^T \mathbf{m}_{n+\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

Obliczmy pochodne kierunkowe $\mathbf{W}_{n+\gamma}(\Theta)$, $\mathbf{A}_{n+\gamma}(\Theta)$ i $\mathbf{R}_{n+\gamma}(\Theta)$. Mamy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+\gamma}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [(1-\gamma)\mathbf{W}_n + \gamma\mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon] = \gamma \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon = \frac{\gamma^2}{\beta h} \Delta\Theta_{(n)}, \quad (\text{A.107})$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{A}_{n+\gamma}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [(1-\gamma)\mathbf{A}_n + \gamma\mathbf{A}_{n+1}^\varepsilon] = \gamma \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{A}_{n+1}^\varepsilon = \frac{\gamma}{\beta h^2} \Delta\Theta_{(n)}, \quad (\text{A.108})$$

przy tym skorzystaliśmy ze wzorów (A.83) i (A.84) na pochodne kierunkowe $\mathbf{W}_{n+1}(\Theta)$ i $\mathbf{A}_{n+1}(\Theta)$.

Pochodną kierunkową $\mathbf{R}_{n+\gamma}(\Theta)$ możemy obliczyć analogicznie jak pochodną $\mathbf{R}_{n+1}(\Theta)$ dla algorytmu A1 (wzory (A.85) – (A.87)). Mamy

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+\gamma}^\varepsilon &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [\mathbf{R}_n \exp(\gamma \widetilde{\Theta} + \varepsilon\gamma \widetilde{\Delta\Theta}_{(n)})] = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} [\mathbf{R}_n \exp(\gamma \widetilde{\Theta}) \exp(\varepsilon\gamma \widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)})] \\ &= \mathbf{R}_n \exp(\gamma \widetilde{\Theta}) \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon\gamma \widetilde{\Delta\Theta}_{(n+1)}). \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Na mocy wzoru (A.86) mamy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon \gamma \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}) = \gamma \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)}.$$

Z powyższego i (A.109) mamy:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+\gamma}^\varepsilon = \gamma \mathbf{R}_n \exp(\gamma \widetilde{\Theta}) \Delta \widetilde{\Theta}_{(n+1)} = \gamma \mathbf{R}_{n+\gamma} \Delta \widetilde{\Theta}_{(n+1)}. \quad (\text{A.110})$$

Podstawiając (A.107), (A.108) i (A.110) do wzoru na pochodną kierunkową residuum (A.106) otrzymujemy

$$\begin{aligned} D \mathbf{r}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)} &= \gamma \left[\frac{1}{\beta h^2} \mathbb{J} \Delta \Theta_{(n)} + \frac{\gamma}{\beta h} \Delta \Theta_{(n)} \times \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{W}_{n+\gamma} \times \mathbb{J} \Delta \Theta_{(n)} \right. \\ &\quad \left. + \widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)} \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.111})$$

Podobnie jak w (A.89) mamy

$$\widetilde{\Delta \Theta}_{(n+1)} \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma} = -(\widetilde{\mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma}}) \Delta \Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.112})$$

Wracając do (A.111) i dokonując pewnych przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned} D \mathbf{r}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)} &= \gamma \left[\frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h} \mathbb{J} \Delta \Theta_{(n)} - \gamma \mathbb{J} \mathbf{W}_{n+\gamma} \times \Delta \Theta_{(n)} + \gamma \mathbf{W}_{n+\gamma} \times \mathbb{J} \Delta \Theta_{(n)} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\widetilde{\mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma}}) \Delta \Theta_{(n+1)} \right] \\ &= \gamma \left[\frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h} \mathbb{J} - \gamma \mathbb{J} \widetilde{\mathbf{W}}_{n+\gamma} + \gamma \widetilde{\mathbf{W}}_{n+\gamma} \mathbb{J} \right) \Delta \Theta_{(n)} - (\widetilde{\mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma}}) \Delta \Theta_{(n+1)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.113})$$

Wykorzystując (A.78), z powyższej zależności otrzymujemy

$$D \mathbf{r}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)} = \mathbf{K}(\Theta) \Delta \Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.114})$$

gdzie pochodna funkcji residuum (A.105) jest postaci

$$\mathbf{K}(\Theta) = \gamma \left[\frac{1}{\beta h} \left(\frac{1}{h} \mathbb{J} - \gamma \mathbb{J} \widetilde{\mathbf{W}}_{n+\gamma} + \gamma \widetilde{\mathbf{W}}_{n+\gamma} \mathbb{J} \right) \mathbf{T}^{-1}(\Theta) - (\widetilde{\mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{m}_{n+\gamma}}) \right]. \quad (\text{A.115})$$

Moment zależny od Θ dla wirującego bąka

W przykładzie z wirującym bąkiem, Rozdz.5.2, musimy w pochodnej kierunkowej residuum uwzględnić również pochodną momentu siły, który zależy od wektora Θ i którego pochodna nie znika, podobnie jak dla algorytmu A1. Mamy

$$\begin{aligned} D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{r}(\Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}) \\ &= \mathbf{K}(\Theta)\Delta\Theta_{(n+1)} - \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\gamma}^\varepsilon \right), \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

gdzie \mathbf{K} jest pochodną funkcji residuum (A.105) obliczoną dla momentu siły $\mathbf{m}_{n+\gamma}$ niezależnego od Θ , daną wzorem (A.115). Moment $\mathbf{m}_{n+\gamma}$ działający na wirującego bąka jest, zgodnie ze wzorem (5.1), równy

$$\mathbf{m}_{n+\gamma} = -Mgl(\mathbf{R}_{n+\gamma}\mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.117})$$

a jego pochodna kierunkowa, zgodnie ze wzorem (A.99), jest postaci

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\gamma}^\varepsilon = \mathbf{K}_{m\gamma}(\Theta) \Delta\Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.118})$$

gdzie pochodna momentu $\mathbf{m}_{n+\gamma}$ w punkcie Θ dana jest wzorem

$$\mathbf{K}_{m\gamma}(\Theta) = -Mgl\gamma \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\gamma} \tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{A.119})$$

Podstawiając (A.118) do (A.116) mamy

$$D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} = \left[\mathbf{K}(\Theta) - \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{K}_{m\gamma}(\Theta) \right] \Delta\Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.120})$$

Ostatecznie pochodna funkcji residuum (A.105) dla problemu wirującego bąka i algorytmu A2 ma postać

$$\mathbf{K}_B(\Theta) = \mathbf{K}(\Theta) - \mathbf{R}_{n+\gamma}^T \mathbf{K}_{m\gamma}(\Theta), \quad (\text{A.121})$$

gdzie \mathbf{K} i $\mathbf{K}_{m\gamma}$ dane są odpowiednio wzorami (A.115) i (A.119).

A.5.3 Algorytm A3

Pochodną funkcji residuum $\mathbf{r}(\Theta)$ dla algorytmu A3, omówionego w Rozdz.4.2.2, obliczamy analogicznie jak dla algorytmów A1 i A2, tzn. obliczając pochodną kierunkową tej funkcji, która w tym przypadku ma postać

$$\mathbf{r}(\Theta) = \mathbf{R}_{n+1}\mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{R}_n\mathbb{J}\mathbf{W}_n - h\mathbf{m}_{n+\alpha}, \quad (\text{A.122})$$

w kierunku dowolnego wektora $\Delta\Theta_{(n)}$.

Moment siły niezależny od Θ

Zakładamy, że moment siły zewnętrznej $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ nie zależy od wektora przyrostu rotacji Θ , w szczególności od położenia ciała (tensora rotacji \mathbf{R}). Pochodna kierunkowa funkcji residuum w kierunku dowolnego wektora $\Delta\Theta_{(n)}$ ma wówczas postać

$$\begin{aligned} D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{r}(\Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}) \\ &= \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon \right) \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{R}_{n+1} \mathbb{J} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (\text{A.123})$$

Pochodne kierunkowe $\mathbf{R}_{n+1}(\Theta)$ i $\mathbf{W}_{n+1}(\Theta)$ zostały obliczone już wcześniej dla algorytmu A1. Z (A.87) mamy

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{R}_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{R}_{n+1} \Delta\widetilde{\Theta}_{(n+1)}. \quad (\text{A.124})$$

Analogicznie jak w (A.83), pochodna kierunkowa $\mathbf{W}_{n+1}(\Theta)$ jest postaci

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{W}_{n+1}^\varepsilon = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left[\frac{\gamma}{\beta h} (\Theta + \varepsilon\Delta\Theta_{(n)}) - \mathbf{W}_n + \left(2 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \mathbf{W}_n^* \right] = \frac{\gamma}{\beta h} \Delta\Theta_{(n)}, \quad (\text{A.125})$$

gdzie skorzystano ze wzoru (4.71) na postać prędkości kątovej w chwili t_{n+1} dla algorytmu A3. Podstawiając (A.124) i (A.125) do wzoru na pochodną kierunkową residuum (A.123) mamy

$$\begin{aligned} D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} &= \mathbf{R}_{n+1} \Delta\widetilde{\Theta}_{(n+1)} \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} + \mathbf{R}_{n+1} \mathbb{J} \left(\frac{\gamma}{\beta h} \Delta\Theta_{(n)} \right) \\ &= \mathbf{R}_{n+1} \left(\Delta\widetilde{\Theta}_{(n+1)} \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbb{J}\Delta\Theta_{(n)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.126})$$

Podobnie jak w (A.89) mamy

$$\Delta\widetilde{\Theta}_{(n+1)} \mathbb{J}\mathbf{W}_{n+1} = -\widetilde{\mathbb{J}}\mathbf{W}_{n+1} \Delta\Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.127})$$

Wykorzystując (A.127) i (A.78), mamy

$$D\mathbf{r}(\Theta)\Delta\Theta_{(n)} = \mathbf{K}(\Theta)\Delta\Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.128})$$

gdzie pochodna funkcji residuum (A.122) jest postaci

$$\mathbf{K}(\Theta) = \mathbf{R}_{n+1} \left[\frac{\gamma}{\beta h} \mathbb{J}\mathbf{T}^{-1}(\Theta) - \widetilde{\mathbb{J}}\mathbf{W}_{n+1} \right]. \quad (\text{A.129})$$

Identyczną postać operatora \mathbf{K} otrzymano w [31], równanie (A12), jednak bez podania wyprowadzenia.

Moment zależny od Θ dla wirującego bąka

W przykładzie z wirującym bąkiem, Rozdz. 5.2), analogicznie jak dla algorytmów A1 i A2, przy obliczaniu pochodnej kierunkowej residuum uwzględniamy również pochodną momentu siły, który zależy od wektora Θ . Mamy

$$D \mathbf{r}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{r}(\Theta + \varepsilon \Delta \Theta_{(n)}) \quad (\text{A.130})$$

$$= \mathbf{K}(\Theta) \Delta \Theta_{(n+1)} - h \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\alpha}^\varepsilon. \quad (\text{A.131})$$

gdzie \mathbf{K} jest pochodną funkcji residuum (A.122) obliczoną dla momentu $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ niezależnego od Θ , daną wzorem (A.129). Moment $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ działający na wirującego bąka jest, zgodnie ze wzorem (5.1), równy

$$\mathbf{m}_{n+\alpha} = -Mgl (\mathbf{R}_{n+\alpha} \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.132})$$

Jego pochodna kierunkowa, na podstawie wzoru (A.99), równa jest

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathbf{m}_{n+\alpha}^\varepsilon = \mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta) \Delta \Theta_{(n+1)}, \quad (\text{A.133})$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta) = -Mgl \alpha \tilde{\mathbf{e}}_3 \mathbf{R}_{n+\alpha} \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (\text{A.134})$$

jest pochodną momentu siły $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ w punkcie Θ . Wracając do (A.130) mamy

$$D \mathbf{r}(\Theta) \Delta \Theta_{(n)} = [\mathbf{K}(\Theta) - h \mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta)] \Delta \Theta_{(n+1)}. \quad (\text{A.135})$$

Ostatecznie pochodna funkcji residuum (A.122) dla problemu wirującego bąka i algorytmu A3 ma postać

$$\mathbf{K}_B(\Theta) = \mathbf{K}(\Theta) - h \mathbf{K}_{m\alpha}(\Theta), \quad (\text{A.136})$$

gdzie \mathbf{K} i $\mathbf{K}_{m\alpha}$ dane są odpowiednio wzorami (A.129) i (A.134). Warto zauważyć, że w pracy [31] nie podano postaci operatora $\mathbf{K}_{m\alpha}$, a więc jego postać i jego wyprowadzenie są oryginalnym wynikiem rozprawy.