

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
ZAKŁAD TECHNOLOGII INTELIGENTNYCH



Rozprawa doktorska

**Nieparametryczna metoda identyfikacji zmian
masy i sztywności konstrukcji**

Grzegorz Suwała

Promotor: dr hab. inż. Łukasz Jankowski

Warszawa, 2015

*Pragnę serdecznie podziękować mojemu promotorowi,
dr. hab. inż. Łukaszowi Jankowskiemu,
za współpracę, pomoc i cenne wskazówki
udzielone w czasie realizacji pracy.*

*Za wsparcie i cenne wskazówki dziękuję również
kierownikowi Zakładu Technologii Inteligentnych,
prof. dr. hab. inż. Janowi Holnickiemu-Szulcowi.*

*Szczególne podziękowania składam mojej żonie Magdalenie
za cierpliwość, wyrozumiałość i okazane wsparcie.*

Badania realizowane w ramach projektów “Smart technologies for safety engineering – Smart and safe” (TEAM/2008-1/4, Fundacja na Rzecz Nauki Polskiej) i “Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym” (POIG.01.01.02-00-015/08-00) w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekty współfinansowane przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.

Streszczenie

W niniejszej pracy zaproponowano i eksperymentalnie zweryfikowano niskoczęstotliwościową metodę identyfikacji zmian masy i sztywności konstrukcji. Zaproponowana metoda wykorzystuje nieparametryczny model konstrukcji referencyjnej w postaci zbioru jej doświadczalnie zarejestrowanych odpowiedzi. Takie podejście pozwala uniknąć kłopotliwego i podatnego na błędy etapu budowy i kalibracji parametrycznego modelu konstrukcji referencyjnej, a jednocześnie — co jest charakterystyczną cechą zaproponowanej metody — umożliwia modelowanie i identyfikację jej parametrycznie wyrażonych modyfikacji i obciążeń.

W celu formalizacji metody wykorzystana została ogólna metodologia metody dystorsji wirtualnych, a główną ideą jest zastąpienie zmian parametrów masowych i sztywnościowych konstrukcji równoważnym im pseudo obciążeniem, którego wpływ na odpowiedź konstrukcji modelowany jest w sposób nieparametryczny. Takie ogólne postawienie problemu pozwoliło na opracowanie szczegółowych sformułowań w dziedzinie czasu i w dziedzinie Laplace'a, w tym problemu wprost i problemu odwrotnego. Gradient i hesjan funkcji celu zostały wyznaczone w formie analitycznej, co umożliwiło zastosowanie do rozwiązania zadania odwrotnego klasycznych gradientowych metod optymalizacyjnych pierwszego i drugiego rzędu. Podstawowe sformułowanie zostało rozszerzone na przypadek identyfikacji parametrów uderzenia idealnie niesprężystego.

Weryfikację doświadczalną opracowanej metody przeprowadzono w zakresie identyfikacji zmian masy, sztywności i obciążenia dynamicznego przy wykorzystaniu przestrzennej konstrukcji 70-elementowego wspornika kratowego.

Abstract

This thesis proposes and experimentally verifies a low-frequency method for identification of modifications of structural mass and stiffness. The proposed method is based on a nonparametric model of the unmodified structure, which is constituted by a set of its experimentally recorded responses. Such a nonparametric approach avoids the troublesome and error-prone stage of parametric model updating, while it allows parametrically expressed structural modifications and loads to be modeled and identified.

The approach was formalized by means of the general methodology of the virtual distortion method. The main idea is to model parametric modifications with the equivalent pseudo load, whose effect on the structural response is modeled nonparametrically. Such a general idea was developed into two specific formulations in time domain and in Laplace domain, including the direct and inverse problems. The gradient and the Hessian of the objective function were expressed analytically, which allowed the inverse problem to be solved by means of classical, gradient-based optimization methods of the first and second order. The basic formulations were extended to include the case of identification of an inelastic impact.

In the experimental verification, a 70-element space cantilever truss was used in the tasks of identification of mass and stiffness modifications and of dynamic loads.

Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów

$\mathbf{B}(t)$	–	macierz wpływu
\mathbf{C}	–	macierz tłumienia
\mathbf{D}	–	dyskretna macierz wpływu
\mathbf{F}	–	macierz Fouriera
$f(t)$	–	funkcja jednej zmiennej
$\mathbf{f}(t)$	–	wymuszenie testowe
$F(\boldsymbol{\mu})$	–	funkcja celu
$\nabla F(\boldsymbol{\mu})$	–	gradient funkcji celu
$\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu})$	–	hesjan funkcji celu
$h(t)$	–	impulsowa funkcja odpowiedzi
k	–	szytywność
$K(t, \tau)$	–	jądro równania całkowego
\mathbf{K}	–	macierz sztywności
$\Delta \mathbf{K}$	–	zmiana macierzy sztywności
m	–	masa
\mathbf{M}	–	macierz mas
$\Delta \mathbf{M}$	–	zmiana macierzy masy
N_t	–	liczba próbek czasowych
N_μ	–	liczba parametrów uszkodzenia
$\mathbf{p}^0(t)$	–	pseudo obciążenie
\mathbf{u}_i	–	lewostronny wektor szczególny
$\mathbf{u}(t)$	–	odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej
$\mathbf{u}^L(t)$	–	odpowiedź konstrukcji referencyjnej
$\mathbf{u}^R(t)$	–	odpowiedź rezydualna konstrukcji
v	–	prędkość
\mathbf{v}_i	–	prawostronny wektor szczególny
w_i	–	współczynnik wagowy kwadratury
$\Delta \mathbf{x}_{\text{per}}$	–	błąd zaburzenia
$\Delta \mathbf{x}_{\text{reg}}$	–	błąd metody regularyzującej
\mathbf{Q}	–	macierz wymuszenia

$\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma(t), \lambda(t)$	–	wektory zmiennych sprzężonych
γ_i	–	funkcja wagowa
$\delta(t)$	–	delta Diraca
δ_{ij}	–	delta Kroneckera
$\kappa(\lambda)$	–	krzywizna krzywej
λ	–	parametr regularyzujący
$\boldsymbol{\mu}$	–	wektor parametrów uszkodzenia
$\phi(t)$	–	niewiadoma funkcja jednej zmiennej
σ_i	–	wartości szczególne
ω	–	częstość kołowa
AVM	–	adjoint variable method
BFGS	–	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
CG	–	conjugate gradient
CGLS	–	conjugate gradient least square
CoMAC	–	coordinate modal assurance criterion
DDM	–	direct differentiation method
DFP	–	Davidon-Fletcher-Powell
FDM	–	finite difference method
FFT	–	fast Fourier transform
LTI	–	linear time invariant
MAC	–	modal assurance criterion
NDT	–	non-destructive testing
PR	–	pattern recognition
SHM	–	structural health monitoring
SR1	–	symmetric rank one
SVD	–	singular value decomposition
SVE	–	singular value expansion
TSVD	–	truncated singular value decomposition

Spis treści

1	Wstęp	9
1.1	Metody monitorowania stanu technicznego konstrukcji	9
1.1.1	Podział metodologiczny	9
1.1.2	Podział ze względu na przedmiot identyfikacji	18
1.2	Cele pracy	20
1.3	Koncepcja pracy	20
2	Modelowanie zmian masy i sztywności konstrukcji	23
2.1	Odpowiedź rezydualna konstrukcji	23
2.1.1	Układ zachowawczy o jednym stopniu swobody	24
2.1.2	Konstrukcja o wielu stopniach swobody	26
2.2	Pseudo obciążenia równoważne zmianom masy i sztywności	27
2.3	Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej	28
2.4	Dyskretyzacja w dziedzinie czasu	29
2.5	Doświadczalne macierze wpływu	31
2.6	Modelowanie uderzenia niesprężystego	33
3	Identyfikacja zmian masy i sztywności konstrukcji	37
3.1	Funkcja celu	37
3.2	Metody analizy wrażliwości	39
3.3	Gradient funkcji celu	40
3.3.1	Metoda bezpośredniego różniczkowania (DDM)	41
3.3.2	Metoda zmiennej sprzężonej (AVM)	41
3.3.3	Koszt numeryczny	43
3.4	Hesjan funkcji celu	44
3.4.1	Metoda DDM-DDM	45
3.4.2	Metoda DDM-AVM	45
3.4.3	Metoda AVM-AVM	47
3.4.4	Metoda AVM-DDM	50
3.4.5	Koszt numeryczny	50
3.5	Dyskretyzacja w dziedzinie czasu	51
3.5.1	Funkcja celu	52
3.5.2	Gradient	52
3.5.3	Hesjan	54

4	Sformułowanie w dziedzinie Laplace'a	55
4.1	Transformacja Laplace'a	56
4.2	Problem wprost	57
4.2.1	Równania ruchu	57
4.2.2	Pseudo obciążenie	57
4.2.3	Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej	58
4.2.4	Obszar wiarygodności	58
4.3	Problem odwrotny	59
4.3.1	Funkcja celu	59
4.3.2	Gradient funkcji celu	60
4.3.3	Hesjan funkcji celu	62
4.3.4	Dyskretyzacja	64
4.4	Optymalne wymuszenie testowe	64
5	Techniki numeryczne	67
5.1	Liniowe równania całkowe	67
5.1.1	Klasyfikacja liniowych równań całkowych	67
5.1.2	Dyskretyzacja liniowych równań całkowych	69
5.2	Rozkład macierzy według wartości szczególnych	71
5.2.1	Dyskretny warunek Picarda	72
5.3	Metody regularyzacji	75
5.3.1	Metody bezpośrednie	75
5.3.2	Metody iteracyjne	76
5.4	Optymalna wartość parametru regularyzacji	79
6	Weryfikacja doświadczalna	83
6.1	Stanowisko doświadczalne	83
6.1.1	Konstrukcja	83
6.1.2	Modyfikacja masy	84
6.1.3	Modyfikacja sztywności elementu	85
6.1.4	Uderzenie niesprężyste	87
6.1.5	Układ pomiarowy	88
6.2	Identyfikacja modyfikacji masy	89
6.2.1	Scenariusze modyfikacji masy	90
6.2.2	Identyfikacja w dziedzinie czasu	93
6.2.3	Identyfikacja w dziedzinie Laplace'a	104
6.2.4	Dyskusja wyników	114
6.3	Identyfikacja modyfikacji sztywności	116
6.4	Identyfikacja uderzenia niesprężystego	119
7	Zakończenie	123
7.1	Oryginalne osiągnięcia pracy	124
7.2	Plany dalszych badań	124
	Bibliografia	126

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Metody monitorowania stanu technicznego konstrukcji

Systemem monitorowania stanu technicznego konstrukcji (ang. structural health monitoring, SHM) nazywa się układ łączący ze sobą sieć czujników, system transmisji i przetwarzania sygnałów oraz jednostkę centralną (lub szereg jednostek rozproszonych), którego zadaniem jest analiza danych pomiarowych w celu wykrycia, lokalizacji w obrębie monitorowanego obiektu i oszacowania wielkości defektu konstrukcyjnego, mogącego być przyczyną wystąpienia awarii [1–6]. Systemy SHM stosowane są głównie w obiektach inżynierii lądowej [7] oraz w przemyśle lotniczym [8].

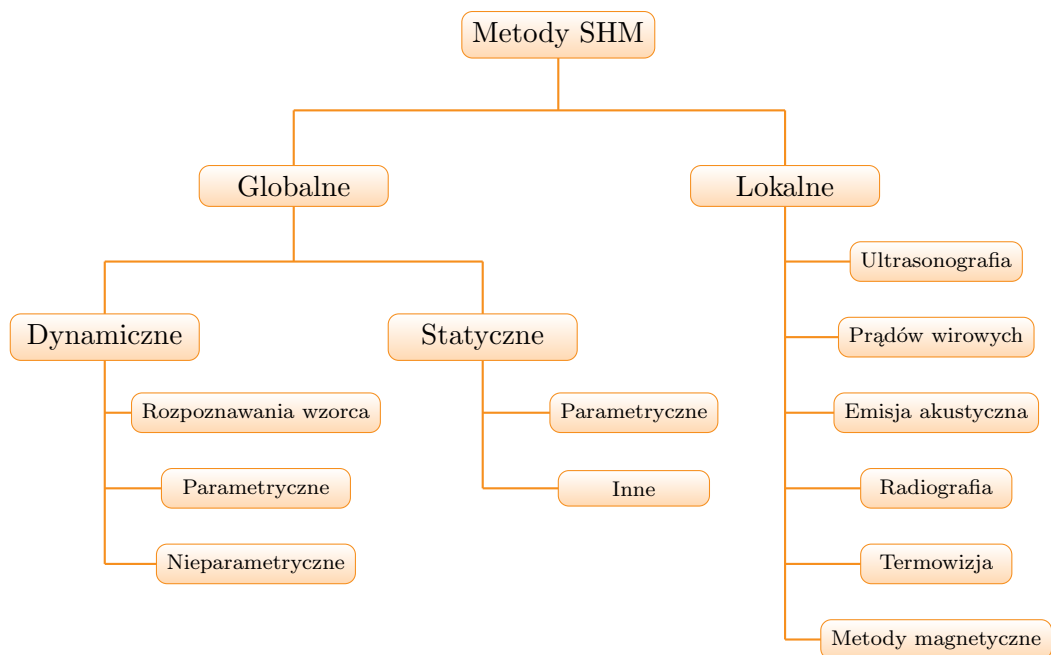
W pracy [9], Anders Rytter zaproponował następującą czterostopniową klasyfikację metod SHM:

- Poziom 1 — detekcja uszkodzenia;
- Poziom 2 — lokalizacja uszkodzenia;
- Poziom 3 — kwantyfikacja uszkodzenia, tj. identyfikacja jego typu i wielkości;
- Poziom 4 — oszacowanie pozostałego czasu życia konstrukcji.

Podział ten grupuje metody SHM na podstawie stopnia identyfikacji uszkodzenia, nie daje jednak pełnego obrazu różnorodności oraz liczby metod stosowanych w tym celu. Z tego powodu na rys. 1-1 oraz w Części 1.1.1 przedstawiono ogólny podział metod SHM ze względu na zastosowaną metodologię wraz z dyskusją cech metody zaproponowanej w niniejszej pracy. W Części 1.1.2 przedstawiono natomiast ogólny podział metod SHM ze względu na identyfikowany czynnik.

1.1.1 Podział metodologiczny

Ogólny podział metodologiczny metod monitorowania stanu technicznego konstrukcji przedstawiono na rys. 1-1. Ze względu na obszerny zakres tematyczny dziedziny



Rysunek 1-1: Ogólny podział metodologiczny metod monitorowania stanu technicznego konstrukcji

monitorowania stanu technicznego konstrukcji oraz liczbę dostępnych publikacji poświęconej tej tematyce, poniżej zamieszczono jedynie ogólny opis wybranych grup metod, pozwalający na kwalifikację i umieszczenie w szerszym kontekście podejścia opracowanego w niniejszej pracy.

Podstawowym podziałem metod SHM jest podział na metody lokalne i metody globalne.

Metody lokalne

Metody lokalne, nazywane też metodami wysokoczęstotliwościowymi, wywodzą się z badań nieniszczących (ang. non-destructive testing, NDT) i stosowane są do wykrywania lokalnych uszkodzeń relatywnie niewielkich i zwykle łatwo dostępnych obszarów konstrukcji, kluczowych z punktu widzenia zachowania jej integralności. Metody te bazują na zjawiskach fizycznych takich jak propagacja fal ultradźwiękowych, które swoim zasięgiem obejmują niewielki obszar konstrukcji wokół urządzenia, którym przeprowadzane jest badanie (zestawu wzbudników i czujników).

Metody lokalne charakteryzują się dużą dokładnością w lokalizowaniu i oszacowaniu wielkości uszkodzenia; ponadto w ogólności nie wymagają one znajomości charakterystyk konstrukcji referencyjnej (nieuszkodzonej). W praktyce najczęściej stosowane są następujące metody lokalne:

- *Defektoskopia ultradźwiękowa*. Metody tej grupy wykorzystują zjawisko propagacji fali sprężystej w ośrodkach stałych, która na skutek wystąpienia nieciągłości materiału ulega rozpraszaniu, odbiciu lub osłabieniu. Identyfikacja uszkodzenia jest przeprowadzana na podstawie analizy zarejestrowanych zaburzeń

fali. Metody ultradźwiękowe są szeroko stosowane do kontroli połączeń spawanych [10]; inne przykłady ich zastosowań można znaleźć w publikacjach [11–14]. W pracy [15] przedstawiono propozycję zautomatyzowanej procedury identyfikacji wykorzystującej sztuczną sieć neuronową. Obszerny przegląd pozycji literaturowych dotyczących wykrywania uszkodzeń przy zastosowaniu fal Lamba w konstrukcjach kompozytowych zamieszczono w pracy [16].

- *Metody prądów wirowych* są bezdotykowymi metodami badania materiałów metalowych, przeznaczonymi do wykrywania nieciągłości zlokalizowanych na powierzchni badanego obiektu lub w strefie podpowierzchniowej. Metody te oparte są na zjawisku indukcji elektromagnetycznej; pozwalają one na wykrycie defektów na podstawie analizy zmian amplitudy, przesunięcia fazowego i natężenia pola elektromagnetycznego. W przeglądowej pracy [17] zamieszczono przykłady zastosowania metod prądów wirowych między innymi do wykrywania pęknięć zmęczeniowych.
- *Metody emisji akustycznej* (ang. acoustic emission, AE) są pasywnymi metodami wykorzystującymi sieć czujników mierzących fale sprężyste generowane spontanicznie w wyniku powstania i ewolucji mikrorys, procesów korozyjnych, pęknięcia strun w konstrukcjach sprężonych itp. Lokalizacja uszkodzenia odbywa się na podstawie analizy różnic czasu rejestracji fali sprężystej pomiędzy czujnikami [18]. Metody emisji akustycznej są stosowane między innymi do wykrywania defektów w elementach kompozytowych [19] i wykonanych z betonu zbrojonego [20].
- *Metody radiograficzne* są metodami wolumetrycznymi, pozwalającymi na badania wewnętrznej struktury ośrodka stałego za pomocą promieniowania jonizującego lub promieniowania gamma. Identyfikacja uszkodzenia przeprowadzana jest w oparciu o zdjęcie radiograficzne badanego obiektu, na którym przedstawione są obszary o różnym poziomie absorpcji promieniowania. Metody te są stosowane w różnych gałęziach przemysłu, między innymi do wykrywania defektów połączeń spawanych [21] lub łopat siłowni wiatrowych [22].
- *Metody termograficzne* bazują na analizie gradientów rozkładu temperatury na powierzchni badanego obiektu spowodowanych wystąpieniem uszkodzenia. Techniki termograficzne można podzielić na pasywne i aktywne. Metody pasywne nie wymagają dostarczenia energii do monitorowanego obiektu z zewnątrz. Natomiast w metodach aktywnych energię dostarcza się na przykład poprzez ogrzanie powierzchni zewnętrznej monitorowanego obiektu źródłem ciepła takim jak lampy halogenowe lub poprzez wzbudzenie go do drgań. Obszerny przegląd metod termografii stosowanych do wykrywania defektów w połączeniach spawanych, w inżynierii lądowej oraz w monitorowaniu stanu technicznego urządzeń mechanicznych można znaleźć w pracy [23].
- *Metody magnetyczne* stanowią relatywnie nową grupę metod opierających się na analizie zjawisk magnetycznych. W ogólności można je podzielić na metody aktywne, wykorzystujące efekt Barkhausena, oraz pasywne (metoda pamięci

magnetycznej). Przegląd metod magnetycznych oraz zjawisk fizycznych, na których one bazują, zawarty jest w pracy [24].

Zestawienie publikacji dotyczących lokalnych metod nieniszczących używanych w celu wykrywania uszkodzeń w elementach siłowni wiatrowych można znaleźć w pracy [25].

Pomimo ich zalet, stosowanie metod lokalnych do monitorowania rozległych obszarów konstrukcji o złożonej geometrii jest bardzo czasochłonne i kosztowne, albo z uwagi na konieczność wyłączenia badanego obiektu z użytku i wysokie wymagania dotyczące kwalifikacji personelu testującego, albo — w wypadku zautomatyzowanego wykorzystania czujników osadzonych — z uwagi na wymaganą dużą gęstość sieci takich czujników.

Metody globalne

Metody globalne, inaczej nazywane metodami niskoczęstotliwościowymi, bazują na analizie zaobserwowanych zmian globalnej, strukturalnej odpowiedzi konstrukcji, wywołanych powstaniem lokalnych uszkodzeń w jej elemencie lub w grupie elementów. W porównaniu do metod lokalnych, istotną zaletą metod globalnych jest możliwość identyfikacji uszkodzeń znajdujących się w znacznej odległości od czujników rejestrujących odpowiedź konstrukcji, a zatem relatywnie niewielka sieć czujników umożliwia monitorowanie dużych obiektów o skomplikowanej geometrii. Z drugiej strony, metody te odznaczają się relatywnie niską czułością detekcji i lokalizacji uszkodzeń w ich początkowej fazie rozwoju, co związane jest z niewielką wrażliwością globalnych, niskoczęstotliwościowych charakterystyk konstrukcji względem małych zmian parametrów masowych i sztywnościowych jej elementów składowych. Zmienne czynniki środowiskowe, takie jak temperatura i wilgotność, mogą mieć znaczący wpływ na zmianę parametrów modalnych [26–29], co dodatkowo utrudnia identyfikację małych uszkodzeń. Dla przykładu, zmiany pierwszych trzech częstotliwości własnych mostu Alamosa Canyon Bridge spowodowane zmienną temperaturą w przeciągu 24 godzin wynosiły odpowiednio 4.7%, 6.6%, i 5.0% [30].

Globalne metody SHM można podzielić na dwie główne grupy ze względu na charakter odpowiedzi konstrukcji użytej w procesie identyfikacji uszkodzenia. Według takiego kryterium podziału, metody globalne dzielą się na metody statyczne i metody dynamiczne.

Metody statyczne opierają się na pomiarach i analizie przemieszczeń i/lub odkształceń konstrukcji poddanej znanemu obciążeniu statycznemu. Metody te stosowane są głównie do monitorowania stanu technicznego mostów [31–33], choć znajdują zastosowania również w innych dziedzinach, na przykład w pracy [34] zaproponowana została metoda identyfikacji statycznych obciążeń skrzydła samolotu. Z uwagi na często występującą konieczność wyłączenia obiektu z eksploatacji na czas wykonywania prac związanych z obciążaniem i pomiarem odpowiednich wielkości fizycznych, metody statyczne w ogólności nie mogą być stosowane w celu ciągłego monitorowania konstrukcji.

Metody dynamiczne. W procesie identyfikacji uszkodzenia metody dynamiczne korzystają z przebiegów czasowych dynamicznych odpowiedzi konstrukcji lub z charakterystyk konstrukcji wyznaczonych na ich podstawie. Pobudzenie konstrukcji do drgań realizowane jest najczęściej przy użyciu wymuszenia o charakterze impulsowym, harmonicznym lub środowiskowym. Rodzaj charakterystyk odpowiedzi wykorzystywanych w procesie identyfikacji zależy od specyfiki przyjętej metodologii, niemniej najczęściej opierają się one na analizie zmian zaobserwowanych w charakterystykach modalnych konstrukcji lub charakterystykach od nich pochodnych [35]. W szczególności, najczęściej wykorzystuje się metody identyfikacji uszkodzeń oparte o analizę zmian następujących czynników:

- *Częstotliwości własne.* Prawdopodobnie najbardziej naturalnym wyborem charakterystyk użytych w procesie identyfikacji uszkodzenia są częstotliwości własne, których wartości w bezpośredni sposób zależą od sztywności i masy konstrukcji, co oznacza, że każde uszkodzenie wpływa na ich zmianę. Niemniej takie same zmiany częstotliwości własnych mogą być spowodowane wystąpieniem kilku mniejszych lub jednego większego uszkodzenia.

G. Hearn i R. Testa wykazali w pracy [36], że dla niewielkich uszkodzeń, stosunek znormalizowanych zmian dwóch częstotliwości własnych jest niezależny od wielkości uszkodzenia i jest funkcją wyłącznie jego położenia. Autorzy pracy [37] prezentują natomiast metodę umożliwiającą lokalizację pojedynczego uszkodzenia w oparciu o iloraz zmian dwóch częstotliwości własnych. Identyfikacja miejsca wystąpienia defektu opiera się na minimalizacji błędu między wartościami ilorazu wyznaczonego na podstawie zmian zmierzonych częstotliwości własnych i uzyskanego z numerycznego modelu konstrukcji. Zaprezentowane podejście zostało zweryfikowane na prostych elementach konstrukcyjnych. J.-T. Kim ze współautorami pracy [38] proponują dwie metody, bazujące na analizie zmian częstotliwości własnych oraz modalnej energii odkształcenia, do identyfikacji wielkości i lokalizacji uszkodzenia. Porównanie przeprowadzone jest z wykorzystaniem modelu parametrycznego zbrojonej betonowej belki, w której rozpatruje się przypadek wystąpienia pojedynczego uszkodzenia. Wyniki uzyskane metodą opartą o analizę zmian modalnej energii odkształcenia charakteryzują się większą dokładnością w lokalizacji uszkodzenia.

Jednakże, jak powyżej wspomniano, zmiany częstotliwości własnych mogą być spowodowane również czynnikami zewnętrznymi. Ponadto w wielu wypadkach wrażliwość wartości praktycznie mierzalnych częstotliwości własnych względem nawet istotnych uszkodzeń jest relatywnie niska (na przykład uszkodzenie stałego zbrojenia konstrukcji żelbetonowych często nie powoduje żadnych znaczących zmian tych parametrów [39]). Ze względu na trudności praktyczne związane z estymacją wyższych częstotliwości własnych posiadających często jedynie lokalny charakter i niskie amplitudy, funkcjonalność metod opartych o analizę zmian częstotliwości własnych jest mocno ograniczona i w wielu zastosowaniach sprowadza się wyłącznie do wykrywania wystąpienia uszkodzenia (poziom 1 według klasyfikacji Ryttera).

- *Postaci drgań własnych.* W wyniku pojawienia się uszkodzenia konstrukcji, oprócz częstotliwości drgań własnych, zmianom ulegają również ich postaci. W porównaniu do częstotliwości własnych, postaci drgań własnych charakteryzują się mniejszą wrażliwością na warunki atmosferyczne [40], a ponadto zawierają bezpośrednią informację o lokalnych własnościach konstrukcji. Opracowane zostały metody monitorowania i identyfikacji uszkodzeń bazujące na postaciach drgań własnych w sposób zarówno bezpośredni, jak i pośredni.

Najbardziej znanymi metodami bezpośrednio bazującymi na postaciach drgań własnych są metody kwantyfikujące korelacje postaci drgań własnych między konstrukcją referencyjną i konstrukcją uszkodzoną przy wykorzystaniu współczynników MAC (ang. modal assurance criterion) lub CoMAC (ang. coordinate MAC). Przykładowo, wymienione współczynniki zostały zastosowane w pracach [41, 42] do zbadania zmian w postaciach drgań konstrukcji mostów wywołanych pracami remontowo-naprawczymi. Innym przykładem bezpośredniego wykorzystania postaci drgań własnych są badania przedstawione w pracy [43]. Jej autorzy, korzystając z liniowego, laserowego skanera dopplerowskiego, przeprowadzili w warunkach laboratoryjnych odcinkowy pomiar postaci drgań własnych trzech elementów konstrukcyjnych: stalowej belki wspornikowej, cienkiej stalowej płyty utwierdzonej na jednej krawędzi i belki wykonanej z betonu zbrojonego podpartej na obu końcach. Dla każdego z wymienionych elementów rozważano wystąpienie pojedynczego uszkodzenia w postaci pęknięcia, a pomiar postaci drgań własnych wykonywany był w otoczeniu wprowadzonego defektu. Z uzyskanych wyników pomiarowych, na podstawie nieciągłości wyznaczonych postaci drgań własnych, możliwe było wykrycie uszkodzenia zarówno w stalowej płycie, jak i w belce ze zbrojonego betonu. W przypadku stalowej belki wspornikowej wykrycie wprowadzonego nacięcia było możliwe dopiero wtedy, gdy jego głębokość była większa niż 50% wysokości belki. Postacie drgań własnych wykazują małą wrażliwość na uszkodzenia w początkowej fazie ich rozwoju, nawet w przypadku zastosowania dużej liczby pomiarów [44].

Postaci drgań własnych w sposób pośredni wykorzystywane są najczęściej w scharakteryzowanych poniżej metodach bazujących na analizie krzywizny modalnej lub modalnej energii odkształcenia.

- *Krzywizna modalna.* Liczna grupa prac dotyczy metod identyfikacji uszkodzeń na podstawie analizy krzywizny modalnej [45–48]. Jako pierwszy analizę zmian drugiej pochodnej postaci drgań względem współrzędnych w celu identyfikacji uszkodzenia wykorzystał A. K. Pandey i in. [45]. Oryginalną metodę, opartą o analizę krzywizny modalnej i nie wymagającą informacji o stanie referencyjnym konstrukcji, zaproponowali autorzy pracy [49]. Główną ideą, na której bazuje zaproponowana przez nich metoda, w języku angielskim nazwana *gapped smoothing method*, jest założenie, że uszkodzenie uwidacznia się w postaci nieciągłości krzywizny modalnej. Metoda ta porównuje krzywiznę modalną wyznaczoną dla konstrukcji uszkodzonej z jej krzywizną odcinkami aproksymowaną wielomianem trzeciego stopnia wygładzającym nieciągłości. Punkty, w których

występuje największą wartość różnicy, są utożsamiane z miejscami wystąpienia uszkodzenia. Rozszerzenie metody na elementy powłokowe zostało zaprezentowane w pracy [50]. Można zauważyć, że w wypadku prostych konstrukcji, takich jak belka wspornikowa poddana zginaniu, zgodnie z teorią Eulera–Bernoulliego, odkształcenie zewnętrznej warstwy jest proporcjonalne do krzywizny belki, a zatem w tym wypadku możliwy jest bezpośredni pomiar krzywizny modalnej.

- *Modalna energia odkształcenia.* Metody oparte na analizie modalnej energii odkształcenia [51, 52] korzystają z obserwacji, że uszkodzenie lokalnie zmienia jej wartość w sposób istotny. Jedna z pierwszych takich metod została zaproponowana w pracach N. Stubbs i in. [53, 54].
- *Modalny współczynnik tłumienia.* C. Modena ze współautorami pracy [55] opracowali nową metodę, wykorzystującą analizę zmian tłumienia modalnego, do identyfikacji uszkodzeń w prefabrykatach wykonanych ze zbrojonego betonu. Wykazano, że nawet niewielkie uszkodzenia, powodujące jedynie nieznaczne zmiany częstości własnych, mogą powodować zmiany tłumienia modalnego sięgające około 50%. Inne przykłady metod opartych o analizę zmian parametrów tłumienia można znaleźć w pracach [56, 57].
- *Metoda filtrów modalnych.* Celem działania filtru modalnego [58–60] jest wyodrębnienie ze zmierzonej odpowiedzi konstrukcji jej składowej odpowiadającej wybranej postaci drgań własnych. W wypadku wystąpienia uszkodzenia, filtr modalny traci dopasowanie do wybranej postaci drgań własnych i w jego charakterystyce wyjściowej pojawiają się dodatkowe piki odpowiadające pozostałym, niezupełnie odfiltrowanym postaciom drgań. Autorzy pracy [61], korzystając z parametrycznego modelu ramy aluminiowo-stalowej (ok. 10 tys. elementów skończonych), badali wpływ lokalnego uszkodzenia (pęknięcie) oraz globalnych i lokalnych zmian temperatury na wyjściowe charakterystyki filtrów modalnych. Wyniki uzupełnia laboratoryjny eksperyment wykonany z wykorzystaniem trzyelementowej ramy stalowej. Analogiczne przykłady numeryczne i laboratoryjne oraz przykład polowego zastosowania metody filtrów modalnych do monitorowania kładki dla pieszych można znaleźć w pracy [62].
- *Wektory Ritza.* W pracy [63] autorzy porównali wartości współczynników MAC wyznaczonych odpowiednio dla wektorów postaci drgań własnych oraz wektorów Ritza w celu wykrycia uszkodzenia ramowego stanowiska laboratoryjnego. Współczynniki obliczone dla wektorów Ritza wykazały się znacznie większą wrażliwością na uszkodzenie w porównaniu do współczynników wyznaczonych na podstawie wektorów postaci drgań własnych. Inne przykłady zastosowań metody można znaleźć w pracach [64, 65].
- *Dynamiczna macierz podatności.* Dynamiczną macierz podatności, w odróżnieniu od dynamicznej macierzy sztywności, można relatywnie dokładnie aproksymować za pomocą niewielkiej liczby pierwszych częstotliwości i postaci drgań własnych konstrukcji. Eksperymentalny przykład zastosowania metody można

znaleźć w pracy [66]. Jej autorzy z dobrą dokładnością zidentyfikowali nacięcie o głębokości 13 mm wykonane w stalowej belce o wysokości 102 mm, posiadającej przekrój poprzeczny dwuteownika. Autorzy pracy [67] prezentują wyniki zastosowania metody w celu identyfikacji uszkodzeń numerycznie modelowanej przestrzennej konstrukcji kratowej. Identyfikację można przeprowadzić również na lokalnym poziomie kluczowych podstruktur konstrukcji, na podstawie analizy lokalnej macierzy podatności [68]. W pracach [69, 70] przedstawiono natomiast metody identyfikacji wykorzystujące dynamiczną macierz podatności otrzymaną w wyniku operacyjnej analizy modalnej, co potencjalnie umożliwia opracowanie metod monitorowania ciągłego z wykorzystaniem wymuszenia środowiskowego.

Niezależnie od powyższych metod opartych o analizę zagregowanych, głównie modalnych, charakterystyk konstrukcji, istnieje liczna grupa metod dynamicznych, które bezpośrednio przetwarzają sygnały w dziedzinie czasu (analiza szeregów czasowych [71], analiza głównych składowych [72]) lub w dziedzinie czasowo-częstotliwościowej (analiza falkowa) i analizują wyniki za pomocą metod inteligencji obliczeniowej takich jak sieci neuronowe. Autorzy pracy [73] stosują analizę falkową w celu wykrycia nieciągłości postaci drgań własnych wywołanych uszkodzeniem. Metoda została zweryfikowana eksperymentalnie na belce wspornikowej oraz na prostokątnej, stalowej płycie utwierdzonej na wszystkich krawędziach. Miejsca uszkodzenia zostały dokładnie oszacowane z niewielkimi błędami względnymi wynoszącymi odpowiednio 9.1% i 1.25%. Inny doświadczalny przykład zastosowania analizy falkowej w wykrywaniu defektów można znaleźć w pracy [74].

Obszerne przeglądy prac poświęconych dynamicznym metodom identyfikacji uszkodzeń można znaleźć w publikacjach [75–78]. W 2003 r., H. Sohn wraz z współautorami [79] opublikowali uaktualnioną wersję pracy [75] zawierającą przegląd prac opublikowanych w latach 1996–2001. E. P. Carden i P. Fanning zamieścili w pracy [80] przegląd publikacji z lat 1996–2003. Natomiast przegląd publikacji ze szczególnym uwzględnieniem metod stosowanych w celu identyfikacji uszkodzeń elementów kompozytowych przedstawił D. Montalvo i in. w pracy [81].

Wszystkie powyżej wymienione metody dynamiczne można podzielić na trzy ogólne grupy: metody parametryczne, metody rozpoznawania wzorca (ang. pattern recognition, PR) i metody nieparametryczne; krótką charakterystykę poszczególnych grup zamieszczono poniżej.

Metody parametryczne bazują na parametrycznym modelu konstrukcji referencyjnej, który w większości przypadków tworzony jest w oparciu o metodę elementów skończonych [82–85], choć z powodzeniem stosowane są też inne metody, takie jak metoda elementów brzegowych [86, 87], metoda elementów spektralnych [88–93] lub bezpośredni opis analityczny [94]. Proces identyfikacji uszkodzenia poprzedzony jest procedurą kalibracji modelu parametrycznego konstrukcji referencyjnej, przeprowadzanej na podstawie danych pomiarowych. Celem tej procedury jest dopasowanie wybranych charakterystyk modelu, na przykład częstotliwości i postaci drgań własnych, do charakterystyk fizycznej konstrukcji referencyjnej wyznaczonych na podstawie po-

miarów, poprzez optymalny dobór jego parametrów. Przegląd technik stosowanych w celu tak rozumianej kalibracji modelu (ang. model updating) można znaleźć w pracach [95, 96].

Identyfikacja uszkodzenia w metodach parametrycznych formułowana jest zwykle w postaci zadania odwrotnego, rozwiązywanego z zastosowaniem procedur optymalizacyjnych minimalizujących wartość funkcji celu będącej pewną liczbową miarą dopasowania wybranych fizycznych charakterystyk modelu do analogicznych charakterystyk konstrukcji uszkodzonej. Funkcja celu zależy i jest optymalizowana względem wartości wybranych parametrów zastosowanego modelu, o których zakłada się, że mogą modelować potencjalne uszkodzenie (np. sztywność wybranych elementów skończonych). Procedury optymalizacyjne bazują na klasycznych, analitycznych metodach gradientowych pierwszego i drugiego rzędu [97] lub na metodach inteligencji obliczeniowej (algorytmy genetyczne lub ewolucyjne, sztuczne sieci neuronowe itp.) [98].

Podstawowym problemem specyficznym dla metod bazujących na modelu parametrycznym są trudności w otrzymaniu dostatecznie wiarygodnego modelu dużych obiektów o złożonej konstrukcji, co przekłada się na pogorszenie dokładności identyfikacji uszkodzenia.

Metody rozpoznawania wzorca opierają się na analizie wzorców wyodrębnionych z odpowiedzi dynamicznej konstrukcji referencyjnej oraz, ewentualnie, konstrukcji poddanych różnym scenariuszom uszkodzenia [99–103]. W odróżnieniu od powyżej opisanej grupy metod parametrycznych, metody rozpoznawania wzorca nie wymagają modelu parametrycznego konstrukcji, a etap jego kalibrowania jest zastąpiony procesem budowania bazy wzorców. Proces wyodrębnienia wzorców przeprowadzany jest zazwyczaj metodami inteligencji obliczeniowej takimi jak sztuczne sieci neuronowe, które z założenia abstrahują od bezpośredniej fizycznej interpretacji przetwarzanych danych. W efekcie wyodrębnione wzorce są pozbawione bezpośredniego sensu fizycznego, co jest charakterystyczną cechą całej grupy metod rozpoznawania wzorca. Identyfikacja uszkodzenia przeprowadzana jest poprzez porównanie wzorców wyodrębnionych ze zmierzonej odpowiedzi konstrukcji monitorowanej z bazą wzorców referencyjnych, które również jest przeprowadzane zwykle w oparciu o metody inteligencji obliczeniowej, w szczególności sztuczne sieci neuronowe.

Metody rozpoznawania wzorców są w naturalny sposób ograniczone do poziomów 1, 2 i częściowo 3 wymienionej wyżej klasyfikacji Ryttera: stwierdzenie istotnej rozbieżności pomiędzy wzorcami jest równoznaczne z wykryciem uszkodzenia (poziom 1), jego ewentualna przybliżona lokalizacja (poziom 2) jest możliwa poprzez powiązanie wzorców z konkretnymi czujnikami, a zgrubne oszacowanie wielkości uszkodzenia (poziom 3) — poprzez analizę stopnia rozbieżności. Rozszerzenie funkcjonalności metod o dodatkowy mechanizm opisujący ewolucję uszkodzenia, a w rezultacie umożliwiający predykcję pozostałego czasu życia konstrukcji (poziom 4), jest znacznie utrudniony z uwagi na brak bezpośredniej fizycznej interpretacji wzorców. Z tego samego powodu zazwyczaj niemożliwa jest również pełna identyfikacja typu uszkodzenia (poziom 3), choć często możliwe jest oszacowanie jego wielkości, rozumianej jednak nie wprost, lecz jako pewien odpowiednik rozbieżności porównywanych wzorców.

Metody nieparametryczne. Trzecia grupa dynamicznych metod SHM nie wymaga parametrycznego modelu monitorowanej konstrukcji, podobnie jak metody rozpoznania wzorca. Jednak w odróżnieniu od nich, metody nieparametryczne bazują na analizie zmian wielkości posiadających bezpośrednią fizyczną interpretację i wyznaczonych wprost na podstawie zarejestrowanych odpowiedzi konstrukcji referencyjnej i uszkodzonej. Niektóre metody, pierwotnie zaliczane do grupy metod parametrycznych, zostały przystosowane do identyfikacji uszkodzeń z wykorzystaniem wyłącznie danych pomiarowych. Podejście takie z reguły wymaga wykonania znacznie większej liczby pomiarów w celu zastąpienia w sposób nieparametryczny informacji, które w modelu parametrycznym zawarte są wprost. Metody nieparametryczne, podobnie jak parametryczne, bazują najczęściej na analizie zmian częstotliwości własnych [37], postaci drgań własnych [104–106], energii odkształcenia [107, 108], krzywizn modalnych, widmowych funkcji przejścia, macierzy podatności [109, 110], wykładników Lapunowa [111] itp.

Metoda proponowana w niniejszej pracy nie wymaga modelu parametrycznego, a konstrukcja referencyjna modelowana jest bezpośrednio przez zbiór jej eksperymentalnie zarejestrowanych odpowiedzi, przechowywanych w uporządkowanej strukturze zwanej doświadczalną macierzą wpływu. W przeciwieństwie jednak do metod rozpoznawania wzorca, możliwe jest wyznaczenie pełnej odpowiedzi konstrukcji uszkodzonej (w dziedzinie czasu, częstości lub Laplace’a) w zależności od uszkodzenia definiowanego w sposób parametryczny, a więc posiadający bezpośrednią interpretację fizyczną. Takie podejście pozwala uniknąć kłopotliwego i podatnego na błędy etapu budowy i kalibracji parametrycznego modelu konstrukcji referencyjnej, a jednocześnie ułatwia fizyczną interpretację wyników i analizę na wszystkich czterech poziomach klasyfikacji Ryttera. Proponowaną metodę należy zatem zaliczyć do grupy nieparametrycznych metod monitorowania stanu technicznego konstrukcji.

1.1.2 Podział ze względu na przedmiot identyfikacji

Monitorowanie stanu technicznego konstrukcji w większości przypadków utożsamiane jest z wykrywaniem uszkodzeń jako potencjalnie jedynej przyczyny prowadzącej do zniszczenia konstrukcji. Niemniej również inne czynniki, takie jak zmiany obciążenia statycznego (dodatkowa masa) lub dynamicznego konstrukcji, mogą doprowadzić do jej uszkodzenia lub zniszczenia i często podlegają monitorowaniu.

Identyfikacja defektów jest pierwotnym zadaniem systemów monitorowania stanu technicznego konstrukcji. Defekt może być postrzegany jako zmiana parametrów materiałowych i/lub geometrycznych jednego lub kilku elementów składowych obiektu. W przypadku obiektów inżynierii lądowej, takich jak mosty, uszkodzenie może być rozumiane jako pęknięcie zmęczeniowe, korozja lub też utrata stateczności elementu na skutek ponadnormatywnego obciążenia eksploatacyjnego. W badaniach SHM, defekty są często modelowane w sposób parametryczny jako utrata sztywności wybranych elementów monitorowanej konstrukcji.

Identyfikacja zmiany masy. Na przestrzeni lat wiele obiektów inżynierii lądowej uległo zniszczeniu na skutek ponadnormatywnego obciążenia statycznego spowodowanego oblodzeniem lub warstwą śniegu zalegającą na dachu [112–114]. W zależności od rodzaju rozpatrywanej konstrukcji, obciążenie takie można traktować jako dodatkową masę rozłożoną w sposób ciągły lub dyskretnie rozłożoną między węzłami struktury nośnej. Inny praktyczny problem związany z identyfikacją zmian masy został przedstawiony w pracy [115], gdzie metodami globalnymi identyfikowana jest masa dodatkowych urządzeń zamocowanych na masztach telekomunikacyjnych, bez konieczności ich demontażu. Problem identyfikacji masy i jej lokalizacji na swobodnie podpartej płycie prostokątnej metodami parametrycznymi rozważany jest w pracy [94]. W pracy [116] autor rozwiązuje podobny problem odwrotny, jednak przy wykorzystaniu techniki kaskadowych sieci neuronowych. W Rozdziale 6 niniejszej pracy zaprezentowano wyniki identyfikacji masy odważników mocowanych w wybranych węzłach konstrukcji, których dodatkowa masa może być utożsamiana z obciążeniem pochodzącym od oblodzenia.

W praktyce eksperymentalnej tymczasowe zamocowanie masy skupionej w celach testowych jest znacznie prostsze w realizacji niż wprowadzenie odwracalnego uszkodzenia związanego ze sztywnością elementów konstrukcyjnych. Z tego powodu masa skupiona często pojawia się w polowych badaniach metod SHM w roli czynnika wprowadzającego lokalne zaburzenie parametrów bezwładnościowych, prowadzące do zmian globalnych charakterystyk dynamicznych konstrukcji utożsamianych z wystąpieniem uszkodzenia. W rezultacie takiego podejścia opracowane metody są testowane w zastępczych zadaniach identyfikacji zmian masy zamiast rzeczywistego uszkodzenia. Podejście takie jest szeroko stosowane w konstrukcjach lotniczych [117, 118]. Innym podejściem proponowanym w literaturze jest wprowadzenie dodatkowych mas do układu w celu zwiększenia wrażliwości jego mierzonej odpowiedzi względem identyfikowanego uszkodzenia [119, 120].

Identyfikacja obciążeń dynamicznych. Monitorowanie dynamicznych obciążeń konstrukcji jest istotne z punktu widzenia niezawodności, czyli analizy procesu zmęczenia postępującego w konstrukcji i ewentualnej predykcji jej pozostałego czasu życia, oraz w celu wstępnej lokalizacji i kwantyfikacji uszkodzeń konstrukcji związanych z obciążeniami o charakterze udarowym. W wypadku wielu konstrukcji inżynierskich, takich jak mosty, kładki, wiadukty itp., celem systemu identyfikacji obciążeń może być również monitorowanie ruchu pojazdów lub pieszych.

Zadanie identyfikacji sił wymuszających konstrukcję należy do klasy zadań odwrotnych identyfikacji danych wejściowych i, jako takie, jest zasadniczo odmienne od zadań identyfikacji uszkodzeń lub innych modyfikacji konstrukcji, które należą do klasy zadań odwrotnych identyfikacji systemu. Przegląd metod stosowanych w celu rozwiązywania zadań odwrotnych tego typu można znaleźć w pracach [121, 122]. Większość podejść wykorzystuje numeryczny model monitorowanej konstrukcji i sprowadza się do zadania rozwikłania splotu jej zmierzonej odpowiedzi względem obliczonej odpowiedzi impulsowej, co wykonywane jest bezpośrednio [123], za pomocą technik zaczerpniętych z teorii sterowania [124], takich jak obserwatory lub filtry odwrotne

(ang. inverse structural filter), lub metod inteligencji obliczeniowej [125]. Należy jednak zauważyć, że w niektórych wypadkach możliwa jest parametryzacja nieznanego obciążenia dynamicznego, co upodabnia zadanie jego identyfikacji do zadań identyfikacji parametrycznie wyrażonych uszkodzeń i modyfikacji konstrukcji. Wypadki te obejmują wymuszenia masami ruchomymi takimi jak pojazdy, gdzie identyfikowana jest masa pojazdu, oraz rozważane w niniejszej pracy uderzenia niesprężyste, gdzie identyfikowana jest masa i prędkość obiektu uderzającego.

1.2 Cele pracy

Głównym celem dysertacji jest

- opracowanie niskoczęstotliwościowej metody monitorowania stanu technicznego konstrukcji, wykorzystującej *nieparametryczny* model konstrukcji referencyjnej, ale jednocześnie umożliwiającą identyfikację *parametrycznie* wyrażonych modyfikacji tej konstrukcji, oraz
- eksperymentalna weryfikacja opracowanej metody w obszarze identyfikacji zmiany masy, sztywności i niesprężystych obciążeń ustrojów prętowych.

Szczegółowe cele pracy obejmują:

1. Opracowanie metodologii nieparametrycznego modelowania konstrukcji referencyjnej przy wykorzystaniu ogólnego podejścia metody dystorsji wirtualnych [126].
2. Opracowanie sposobów wprowadzania parametrycznie wyrażonych modyfikacji, uszkodzeń lub obciążeń do takiego modelu konstrukcji.
3. Opracowanie efektywnych numerycznie technik obliczania odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej lub obciążonej.
4. Opracowanie sposobu identyfikacji modyfikacji, uszkodzeń lub obciążeń rzeczywistej konstrukcji poprzez porównanie wybranych charakterystyk odpowiedzi zmierzonej z odpowiedzią modelowaną nieparametrycznie.
5. Opracowanie efektywnych numerycznie technik analizy wrażliwości.
6. Weryfikacja doświadczalna opracowanej metodologii identyfikacji zmian masy, sztywności i obciążenia dynamicznego przy wykorzystaniu 70-elementowego wspornika kratowego.

1.3 Koncepcja pracy

Praca składa się z niniejszego wstępu, pięciu rozdziałów merytorycznych, w których opisano sformułowanie proponowanej metody, odpowiednie algorytmy numeryczne i uzyskane wyniki doświadczalne, oraz z zakończenia. Poniżej zamieszczono zwięzłą charakterystykę rozdziałów merytorycznych.

Modelowanie zmian masy i sztywności konstrukcji. W rozdziale przedstawiono teoretyczne sformułowanie opracowanej metody modelowania nieparametrycznego w dziedzinie czasu (dla czasu ciągłego i czasu dyskretnego). Wychodząc z dynamicznego równania ruchu konstrukcji referencyjnej, wykazano, że zmiana masy i sztywności elementów składowych konstrukcji może być efektywnie modelowana za pomocą równoważnego, dodatkowego obciążenia (tzw. pseudo obciążenia) przyłożonego w odpowiednich stopniach swobody. W rozdziale przedstawiono ponadto koncepcję doświadczalnej macierzy wpływu oraz całkową reprezentację pseudo obciążenia. Rozdział kończy opis modelowania parametrów obciążenia dynamicznego konstrukcji za pomocą pseudo obciążenia.

Identyfikacja zmian masy i sztywności konstrukcji. W rozdziale przedstawiono metodologię rozwiązania problemu odwrotnego identyfikacji zmiany masy i sztywności konstrukcji za pomocą procedury optymalizacyjnej. Procedura minimalizuje funkcję celu będącą pewną liczbową miarą dopasowania nieparametrycznie modelowanej odpowiedzi konstrukcji uszkodzonej do jej odpowiedzi zmierzonej. Ponadto wyprowadzono ściśle, analityczne zależności na gradient i hesjan funkcji celu stosując metodę różniczkowania bezpośredniego i gradientów sprzężonych, a otrzymane zależności porównano pod kątem ich złożoności numerycznej.

Sformułowanie w dziedzinie Laplace’a. W rozdziale zaprezentowano teoretyczne sformułowanie opracowanej metody nieparametrycznego modelowania i identyfikacji w dziedzinie Laplace’a. Podobnie jak w Rozdziale 2, zależność na pseudo obciążenie modelujące równoważnie zmiany parametrów masowych i sztywnościowych konstrukcji uzyskano na podstawie dynamicznego równania ruchu. W rozdziale sformułowano również problem odwrotny identyfikacji zmiany parametrów i zaproponowano metodę jego rozwiązania przy użyciu procedur optymalizacyjnych minimalizujących przyjętą funkcję celu. Wyprowadzono zależności wyrażające gradient i hesjan funkcji celu w sposób analityczny.

Techniki numeryczne. Pseudo obciążenie równoważne rozważanym modyfikacjom konstrukcji dane jest w postaci rozwiązania pewnego liniowego równania całkowego. W rozdziale przedstawiono klasyfikację liniowych równań całkowych i omówiono ich najważniejsze właściwości. Stosując metodę rozkładu macierzy według wartości szczególnych, wyjaśniono przyczyny niestabilności rozwiązań równań źle uwarunkowanych i prześledzono wybrane bezpośrednie i iteracyjne mechanizmy regularyzacji numerycznej. Opisano również sposób optymalnego doboru parametrów metod regularyzujących w oparciu o metodę krzywej L. Ponadto omówiono proces dyskretyzacji liniowych równań całkowych oraz korzyści numeryczne wynikające z otrzymania dyskretnego jądra całkowego o strukturze macierzy Toeplitza.

Weryfikacja doświadczalna. Rozdział zawiera opis stanowiska laboratoryjnego, urządzeń pomiarowych oraz sposobu wprowadzenia zmian masy, sztywności i obciążenia konstrukcji badanego wspornika kratowego. Przeprowadzona następnie wery-

fikacja opracowanej metody obejmuje stworzenie doświadczalnej macierzy wpływu składającej się ze zmierzonych odpowiedzi konstrukcji referencyjnej oraz przeprowadzenie identyfikacji w dziedzinie czasu i w dziedzinie Laplace'a:

- masy dodatkowych odważników mocowanych w wybranych węzłach konstrukcji,
- zmiany sztywności osiowej wybranego elementu,
- parametrów symulowanego uderzenia niesprężystego.

Rozdział 2

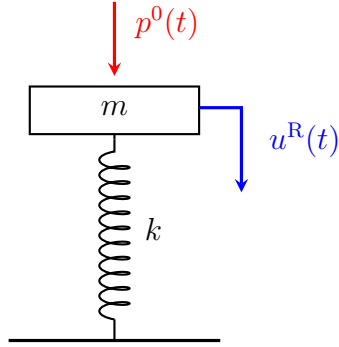
Modelowanie zmian masy i sztywności konstrukcji

W niniejszym rozdziale przedstawiono nieparametryczne rozwiązanie problemu wprost modelowania czasowego przebiegu odpowiedzi konstrukcji o zmodyfikowanych parametrach masowych i sztywnościowych [127]. Problem rozwiązywany jest w dwóch etapach: w pierwszym, dla parametrycznie wyrażonych zmian masy i sztywności elementów składowych konstrukcji, wyznacza się równoważne im pseudo obciążenie konstrukcji niezmodyfikowanej. W drugim etapie oblicza się odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej jako sumę zmierzonej doświadczalnie odpowiedzi konstrukcji niezmodyfikowanej na rozważane wymuszenie testowe oraz jej odpowiedzi na wyznaczone pseudo obciążenie. W obu etapach wykorzystywany jest nieparametryczny model konstrukcji niezmodyfikowanej dany w postaci zbioru jej odpowiedzi impulsowych.

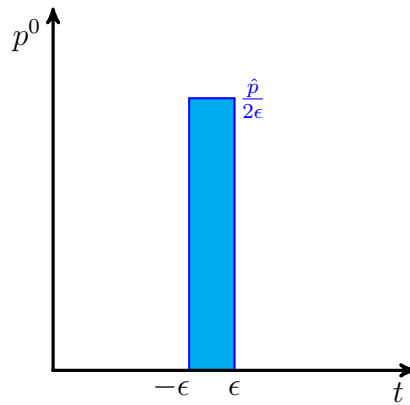
Niniejszy rozdział można podzielić na dwie zasadnicze części. W pierwszej z nich sformułowano zagadnienie dla czasu ciągłego. Wychodząc od równania ruchu konstrukcji referencyjnej, wyprowadzono zależność na pseudo obciążenie w formie całkowego równania Volterry drugiego rodzaju (Część 2.2), a następnie przedstawiono sposób wyznaczania odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej (Część 2.3). Druga część rozdziału zawiera analogiczne zależności dla czasu dyskretnego (Część 2.4). Dodatkowo w rozdziale wprowadzono i omówiono koncepcję doświadczalnej macierzy wpływu (Część 2.5) i metodologię modelowania uderzenia idealnie niesprężystego (Część 2.6).

2.1 Odpowiedź rezydualna konstrukcji

Odpowiedzią rezydualną konstrukcji nazywamy jej odpowiedź $\mathbf{u}^R(t)$ na wymuszenie pseudo obciążeniem $\mathbf{p}^0(t)$ równoważnym modelowanej modyfikacji masy lub sztywności konstrukcji. W niniejszej części wyprowadzone zostaną zależności (2.12) wyrażające odpowiedź rezydualną za pomocą splotu impulsowych funkcji odpowiedzi konstrukcji z pseudo obciążeniem. Równoważność modyfikacji ze specyficzną postacią pseudo obciążenia wykazana zostanie w kolejnej części rozdziału (Część 2.2).



Rysunek 2-1: Układ zachowawczy o jednym stopniu swobody



Rysunek 2-2: Przybliżenie (2.2) funkcji delta Diraca

2.1.1 Układ zachowawczy o jednym stopniu swobody

Wymuszenie impulsowe. Rozpatrzmy układ zachowawczy o jednym stopniu swobody obciążony siłą $p^0(t)$. Poglądowy schemat takiego układu został przedstawiony na rys. 2-1. Drgania układu opisane są następującym równaniem ruchu:

$$m\ddot{u}^R(t) + ku^R(t) = p^0(t), \quad (2.1)$$

gdzie m i k oznaczają odpowiednio masę i sztywność układu. Załóżmy, że siła $p^0(t)$ przyłożona do masy m opisana jest wzorem (2.2) i przedstawiona na rys. 2-2,

$$p^0(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq -\epsilon, \\ \frac{\hat{p}}{2\epsilon} & \text{dla } -\epsilon < t < \epsilon, \\ 0 & \text{dla } t \geq \epsilon, \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie ϵ jest dowolnie małą liczbą dodatnią. Funkcja definiująca siłę $p^0(t)$ przyjmuje wartości niezerowe tylko w zakresie $-\epsilon < t < \epsilon$; gdy ϵ dąży do zera, amplituda siły

$p^0(t)$ dąży do nieskończoności. Impuls siły I funkcji $p^0(t)$ można zapisać w formie:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} p^0(t) dt = \hat{p}. \quad (2.3)$$

Funkcja $p^0(t)$ o jednostkowym impulsie, opisana równaniem (2.2), dąży dla $\epsilon \rightarrow 0$ do funkcji znanej w literaturze jako *delta Diraca* i oznaczanej symbolem $\delta(t)$. Funkcja delta Diraca posiada następującą własność:

$$(q \star \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = q(t), \quad (2.4)$$

gdzie $q(t)$ jest dowolną funkcją ciągłą i ograniczoną, a \star oznacza operację splotu. Korzystając z przytoczonej właściwości, wartość funkcji $q(t)$ w dowolnej chwili czasowej t można przedstawić w postaci całkowej.

Przyjmijmy jednorodne warunki początkowe, równe $u^R(0^-) = \dot{u}^R(0^-) = 0$, w chwili poprzedzającej przyłożenie impulsowego wymuszenia siłą $p^0(t)$ działającą na rozważany układ. Zgodnie z zasadą zachowania pędu, impuls siły I działający na układ można zastąpić prędkością początkową równą:

$$\dot{u}^R(0) = \frac{\hat{p}}{m}. \quad (2.5)$$

Korzystając z powyższej zależności, układ dynamiczny opisany równaniem ruchu (2.1) można dla $t \geq 0$ przedstawić w postaci następującego zagadnienia początkowego:

$$m\ddot{u}^R(t) + ku^R(t) = 0, \quad u^R(0) = 0, \quad \dot{u}^R(0) = \frac{\hat{p}}{m}. \quad (2.6)$$

Odpowiedź układu opisanego powyższym równaniem i danymi warunkami początkowymi można dla $t \geq 0$ przedstawić w formie:

$$u^R(t) = \hat{p} \frac{1}{m\omega} \sin \omega t = \hat{p}h(t), \quad (2.7)$$

gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$ oraz $h(t)$ jest impulsową funkcją odpowiedzi układu,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{1}{m\omega} \sin \omega t & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Funkcja $h(t)$ jest odpowiedzią układu na jednostkowe wymuszenie impulsowe, tj. wymuszenie opisane funkcją delta Diraca, przyłożone w czasie $t = 0$. Jeśli wymuszenie impulsowe jest przyłożone w czasie $t = \tau$, odpowiedź układu dla $t \geq \tau$ ma postać

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega(t - \tau), \quad (2.9)$$

natomiast dla $t < \tau$ funkcja $h(t - \tau)$ przyjmuje wartości zerowe.

Dowolne wymuszenie. W przypadku ogólnym, gdy siła $p^0(t)$ działająca na układ począwszy od momentu $t = 0$ ma dowolną postać, odpowiedź układu przy zerowych warunkach początkowych można przedstawić jako sumę jego odpowiedzi na elementarne wymuszenia impulsowe z których, zgodnie z (2.4), składa się funkcja wymuszająca $p^0(t)$:

$$u^R(t) = \int_0^t p^0(\tau)h(t - \tau) d\tau = (p^0 \star h)(t). \quad (2.10)$$

W literaturze powyższa zależność znana jest jako *całka Duhamela*.

2.1.2 Konstrukcja o wielu stopniach swobody

Równanie ruchu konstrukcji o wielu stopniach swobody, wymuszanej wektorem dowolnych sił $\mathbf{p}^0(t)$, można zapisać w formie macierzowej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^R(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^R(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}^R(t) = \mathbf{p}^0(t), \quad (2.11)$$

gdzie \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} są odpowiednio macierzami mas, tłumienia i sztywności, a wektory $\mathbf{u}^R(t)$, $\dot{\mathbf{u}}^R(t)$, $\ddot{\mathbf{u}}^R(t)$ zawierają składowe odpowiedzi układu wyrażone w formie przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Przy założeniu zerowych warunków początkowych, odpowiedź konstrukcji można wyznaczyć za pomocą przytoczonej w poprzednim paragrafie całki Duhamela (2.10):

$$\mathbf{u}^R(t) = \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau)\mathbf{p}^0(\tau) d\tau, \quad (2.12a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^R(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{B}}(t - \tau)\mathbf{p}^0(\tau) d\tau, \quad (2.12b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^R(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}^0(t) + \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}(t - \tau)\mathbf{p}^0(\tau) d\tau, \quad (2.12c)$$

gdzie macierze $\mathbf{B}(t)$, $\dot{\mathbf{B}}(t)$ i $\ddot{\mathbf{B}}(t)$ zawierają impulsowe funkcje odpowiedzi konstrukcji, tzn. ich kolumny są wektorami odpowiedzi konstrukcji (we wszystkich stopniach swobody) na wymuszenia opisane funkcją delta Diraca przyłożone w kolejnych stopniach swobody. W zgodzie z ogólną terminologią metody dystorsji wirtualnych [128], macierze te dalej będą nazywane *macierzami wpływu*. Prawdziwość (2.12) można w prosty sposób potwierdzić poprzez ich podstawienie do równania ruchu (2.11). Jeśli pierwszy człon po prawej stronie równania (2.12c) zostanie włączony pod znak całki, otrzymamy następującą zależność:

$$\ddot{\mathbf{u}}^R(t) = \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau)\mathbf{p}^0(\tau) d\tau, \quad (2.12d)$$

w której $\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t)$ jest przyspieszeniową macierzą wpływu zawierającą człon impulsowy w chwili $t = 0$,

$$\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t) = \mathbf{M}^{-1}\delta(t) + \ddot{\mathbf{B}}(t). \quad (2.13)$$

2.2 Pseudo obciążenia równoważne zmianom masy i sztywności

Równanie ruchu konstrukcji referencyjnej. Załóżymy, że konstrukcja referencyjna (niezmodyfikowana) jest liniowa i że jej dynamikę można zapisać w postaci następującego równania ruchu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^L(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}^L(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.14)$$

gdzie $\mathbf{f}(t)$ jest wymuszeniem testowym, \mathbf{M} , \mathbf{C} i \mathbf{K} są macierzami odpowiednio mas, tłumienia i sztywności konstrukcji referencyjnej, a $\mathbf{u}^L(t)$ nazywane jest odpowiedzią referencyjną.

Równanie ruchu konstrukcji zmodyfikowanej. W dalszej części pracy założono, że rozważane uszkodzenia lub modyfikacje elementów konstrukcji mogą wpływać na ich masę i sztywność, natomiast nie mają wpływu na tłumienie konstrukcji. Równanie ruchu konstrukcji uszkodzonej, poddanej działaniu tego samego wymuszenia testowego $\mathbf{f}(t)$, można zatem zapisać w następującej postaci:

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.15)$$

gdzie $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{K}$ oznaczają odpowiednio zmiany macierzy mas oraz sztywności związane z rozważanym uszkodzeniem lub modyfikacją konstrukcji. Poprzez proste przeniesienie na prawą stronę członów modelujących modyfikacje, powyższe równanie można przekształcić do postaci równoważnej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{p}^0(t), \quad (2.16)$$

która — porównaj z (2.14) — jest faktycznie równaniem ruchu konstrukcji referencyjnej, oprócz wymuszenia testowego $\mathbf{f}(t)$ poddanej działaniu również pewnego pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(t)$. Pseudo obciążenie to modeluje rozważane modyfikacje $\Delta\mathbf{M}$ i $\Delta\mathbf{K}$ oraz jest z nimi związane następującą zależnością:

$$\mathbf{p}^0(t) = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) - \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}(t). \quad (2.17)$$

Zgodnie z (2.16), odpowiedź $\mathbf{u}(t)$ konstrukcji zmodyfikowanej zależy od pseudo obciążenia, a więc (2.17) wyraża je w sposób uwikłany.

Pseudo obciążenie. Odpowiedź $\mathbf{u}(t)$ konstrukcji uszkodzonej zależy zarówno od wymuszenia testowego $\mathbf{f}(t)$, jak i od działającego na konstrukcję pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(t)$ modelującego uszkodzenie. Zgodnie z założeniem liniowości konstrukcji spełniającej równanie ruchu (2.16), odpowiedź $\mathbf{u}(t)$ konstrukcji uszkodzonej na sumę wymuszeń $\mathbf{f}(t)$ i $\mathbf{p}^0(t)$ można przedstawić w postaci sumy odpowiednich odpowiedzi konstrukcji niezmodyfikowanej, czyli odpowiedzi odpowiednio referencyjnej $\mathbf{u}^L(t)$

i rezydualnej $\mathbf{u}^R(t)$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^L(t) + \mathbf{u}^R(t), \quad (2.18a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \ddot{\mathbf{u}}^L(t) + \ddot{\mathbf{u}}^R(t). \quad (2.18b)$$

Po podstawieniu zależności (2.18) do (2.17), wykorzystaniu (2.12) i po przeprowadzeniu prostych algebraicznych przekształceń, można otrzymać następujące równanie z pseudo obciążeniem $\mathbf{p}^0(t)$ w roli niewiadomej:

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}] \mathbf{p}^0(t) + \int_0^t [\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{B}}(t - \tau) + \Delta\mathbf{K}\mathbf{B}(t - \tau)] \mathbf{p}^0(\tau) d\tau \\ = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L(t) - \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}^L(t). \end{aligned} \quad (2.19a)$$

Powyższe równie jest równaniem całkowym Volterra drugiego rodzaju. Równania tego typu są źle uwarunkowane, jednakże z twierdzeń Riesz [129] wynika, że równanie (2.19a) jest dobrze postawione w sensie Hadamarda, jeśli macierz $\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}$ jest nieosobliwa. Innymi słowy, równanie to posiada jednoznaczne rozwiązanie, jeśli modyfikacja masy $\Delta\mathbf{M}$ jest na tyle mała, że macierz mas konstrukcji zmodyfikowanej $\Delta\mathbf{M} + \mathbf{M}$ pozostaje dodatnio określona. Warunek ten jest zawsze spełniony dla konstrukcji inżynierskich, jeśli zmiana masy $\Delta\mathbf{M}$ nie jest na tyle duża, by powodować oddzielenie fragmentów konstrukcji. Korzystając z (2.13), równanie (2.19a) można zapisać w następującej formie:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0(t) + \int_0^t [\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) + \Delta\mathbf{K}\mathbf{B}(t - \tau)] \mathbf{p}^0(\tau) d\tau \\ = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L(t) - \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}^L(t). \end{aligned} \quad (2.19b)$$

W powyższym równaniu wszystkie elementy są znane (tj. mogą być bezpośrednio zmierzone eksperymentalnie) z wyjątkiem pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(t)$. Należy zwrócić uwagę, że wektor $\mathbf{p}^0(t)$ może posiadać niezerowe wartości tylko w stopniach swobody bezpośrednio związanych ze zmianą masy $\Delta\mathbf{M}$ lub sztywności $\Delta\mathbf{K}$. Przy zlokalizowanym uszkodzeniu oznacza to, że liczba nieznanych elementów wektora $\mathbf{p}^0(t)$ jest znacznie mniejsza niż liczba stopni swobody. A zatem równanie (2.19b) ma w takiej sytuacji znacznie mniej niewiadomych, niż pełne równanie ruchu konstrukcji uszkodzonej (2.15).

2.3 Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej

Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej $\mathbf{u}(t)$ zgodnie z równaniami (2.18) jest sumą odpowiedzi referencyjnej $\mathbf{u}^L(t)$ na wymuszenie testowe $\mathbf{f}(t)$ oraz odpowiedzi rezydualnej $\mathbf{u}^R(t)$ konstrukcji referencyjnej na pseudo obciążenie $\mathbf{p}^0(t)$, określonej zależnościami (2.12). A zatem sygnał $\mathbf{x}(t)$ pewnej liczby liniowych czujników (przemieszczenia, odkształcenia, prędkości, przyspieszenia itp.) mierzących odpowiedź konstrukcji zmo-

dyfikowanej na wymuszenie testowe $\mathbf{f}(t)$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^L(t) + \int_0^t \mathbf{B}^x(t - \tau) \mathbf{p}^0(\tau) d\tau, \quad (2.20)$$

w której pseudo obciążenia można obliczyć poprzez rozwiązanie równania (2.19b), $\mathbf{x}^L(t)$ jest sygnałem czujników mierzących odpowiedź konstrukcji niezmodyfikowanej, a $\mathbf{B}^x(t)$ jest macierzą wpływu związaną z czujnikami i zawiera odpowiedzi czujników na impulsowe wymuszenia w kolejnych stopniach swobody (jej wiersze odpowiadające ewentualnym akcelerometrom mogą zawierać składniki impulsowe dla chwili $t = 0$). Należy zauważyć, że $\mathbf{x}^L(t)$ i $\mathbf{B}^x(t)$ charakteryzują konstrukcję referencyjną (niezmodyfikowaną), a więc mogą być zmierzone doświadczalnie i są znane.

2.4 Dyskretyzacja w dziedzinie czasu

Przedstawione powyżej sformułowanie problemu wprost wykorzystuje ciągle zmienne czasowe; takie podejście jest uzasadnione z teoretycznego punktu widzenia, ponieważ pozwala na prawidłową charakteryzację matematycznej struktury problemu (całkowe równanie Volterry rodzaju drugiego). W niniejszej części rozdziału zostanie przedstawione sformułowanie opracowanej metody wykorzystujące czas dyskretny. Podejście dyskretne jest praktyczniejsze i bliższe eksperymentalnej rzeczywistości, gdyż w praktyce sygnały analogowe z czujników są wpieryw przetwarzane przez przetworniki analogowo-cyfrowe na sygnały dyskretne i dopiero w takiej postaci przetwarzane potem cyfrowo.

Odpowiednikami macierzy wpływu $\mathbf{B}(t)$ i $\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t)$ zawierających ciągle funkcje odpowiedzi impulsowych są dyskretne macierze wpływu oznaczane $\mathbf{D}(t)$ i $\ddot{\mathbf{D}}(t)$, które zawierają wartości chwilowe odpowiedzi w dyskretnych chwilach czasu, zwane próbkami:

$$\mathbf{D}(t) \approx \mathbf{B}(t)\Delta t, \quad (2.21a)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}(t) \approx \begin{cases} \mathbf{M}^{-1} + \ddot{\mathbf{B}}(0)\Delta t & \text{dla } t = 0, \\ \ddot{\mathbf{B}}(t)\Delta t & \text{dla } t > 0. \end{cases} \quad (2.21b)$$

Korzystając z dyskretnych wersji macierzy wpływu $\mathbf{D}(t)$ i $\ddot{\mathbf{D}}(t)$, równanie (2.19b) pozwalające obliczyć pseudo obciążenie równoważne rozważanej zmianie masy i sztywności można zapisać w następującej formie zdyskretyzowanej:

$$\sum_{\tau=0}^t \left[\delta_{\tau t} \mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{D}}(t - \tau) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{D}(t - \tau) \right] \mathbf{p}^0(t) = -\Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^L(t) - \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}^L(t), \quad (2.22)$$

gdzie symbol $\delta_{\tau t}$ oznacza deltę Kroneckera,

$$\delta_{\tau t} := \begin{cases} 1 & \text{gdy } t = \tau, \\ 0 & \text{gdy } t \neq \tau. \end{cases} \quad (2.23)$$

Należy zwrócić uwagę, że liczba niewiadomych funkcji w równaniu (2.19b) jest równa liczbie stopni swobody bezpośrednio związanych z modyfikacjami, podczas gdy liczba niewiadomych w jego dyskretnej wersji (2.22) jest większa N_t razy, gdzie N_t jest liczbą próbek czasowych.

Zapis powyższego równania można uprościć, grupując wyrażenia znajdujące się po lewej stronie równania w pojedynczą macierz blokową \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}\mathbf{p}^0 = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L - \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}^L, \quad (2.24)$$

gdzie wektory \mathbf{p}^0 , \mathbf{u}^L i $\ddot{\mathbf{u}}^L$ zawierają odpowiednio pseudo obciążenie, przemieszczenia i przyspieszenia we wszystkich rozpatrywanych stopniach swobody konstrukcji referencyjnej i dla wszystkich próbek czasowych. Macierz \mathbf{A} posiada strukturę blokową o wymiarze $nN \times nN$ bloków, gdzie liczba N odpowiada liczbie węzłów związanych z uszkodzonymi elementami, a n jest liczbą stopni swobody w węźle. Przyjmując model układu prętowego (rama przestrzenna), wymiar macierzy \mathbf{A} jest równy $6N \times 6N$ bloków (trzy przemieszczenia wzdłuż osi kartezjańskiego układu współrzędnych i trzy obroty wokół tych osi dla każdego węzła). W założeniu opracowana metoda ma mieć charakter doświadczalny, a przyjęcie modelu ramy przestrzennej może okazać się trudne w realizacji z powodu (1) konieczności dynamicznego pomiaru kątów obrotu wokół trzech ortogonalnych względem siebie kierunków oraz (2) konieczności przyłożenia impulsowego wymuszenia momentami w celu wygenerowania eksperymentalnych macierzy wpływu. W przeprowadzonych doświadczeniach przyjęto zatem model kratownicy przestrzennej, posiadającej po trzy stopnie swobody (przemieszczenia) w każdym węźle, dzięki czemu blokowy wymiar macierzy \mathbf{A} został zmniejszony do $3N \times 3N$ bloków. Każdy blok tej macierzy posiada wymiar $N_t \times N_t$ i jest macierzą trójkątną dolną typu Toeplitza. Wymiar N_t (liczba próbek czasowych) uzależniony jest od długości eksperymentalnie zarejestrowanej odpowiedzi i od częstości jej próbkowania. Struktura przykładowej macierzy jest zilustrowana na rys. 6-7.

Ze względu na duży rozmiar i złe uwarunkowanie numeryczne [130] równania (2.24), efektywne numerycznie obliczenie jego wiarygodnego rozwiązania wymaga zastosowania szeregu specjalnych technik numerycznych opisanych w Rozdziale 5. Obliczone rozwiązanie, obrazujące wartości pseudo obciążenia w dyskretnych chwilach czasu, pozwala na wyliczenie dyskretnego czasowo sygnału czujników umieszczonych w konstrukcji uszkodzonej za pomocą zdyskretyzowanych odpowiedników zależności (2.20),

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^L(t) + \sum_{\tau=0}^t \mathbf{D}^x(t - \tau)\mathbf{p}^0(\tau) \quad (2.25a)$$

lub, po pogrupowaniu sygnałów z różnych chwil czasowych w jeden wektor, analogicznie jak w (2.24),

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^L + \mathbf{D}^x\mathbf{p}^0. \quad (2.25b)$$

Analogiczną dyskretyzację czasową odpowiedzi konstrukcji (2.12) można przedstawić

w postaci:

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{D}\mathbf{p}^0, \quad (2.26a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^R = \dot{\mathbf{D}}\mathbf{p}^0, \quad (2.26b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^R = \ddot{\mathbf{D}}\mathbf{p}^0, \quad (2.26c)$$

gdzie macierze \mathbf{D} , $\dot{\mathbf{D}}$ i $\ddot{\mathbf{D}}$ mają strukturę blokową analogiczną do macierzy \mathbf{A} występującej w zależności (2.24).

2.5 Doświadczalne macierze wpływu

W dotychczasowych rozważaniach zakładano, że impulsowe macierze wpływu $\mathbf{B}(t)$, $\ddot{\mathbf{B}}(t)$ i $\mathbf{B}^x(t)$ oraz odpowiadające im dyskretne macierze wpływu $\mathbf{D}(t)$, $\ddot{\mathbf{D}}(t)$ i $\mathbf{D}^x(t)$ zawierają odpowiedzi konstrukcji na wymuszenie opisane funkcją delta Diraca. Z przyczyn technicznych pobudzenie rzeczywistego układu takim wymuszeniem jest trudne do realizacji lub wręcz niemożliwe. W przeprowadzonych doświadczeniach wymuszenie nie było realizowane przy użyciu młotka modalnego wyposażonego w przetwornik siły. Zarejestrowany przebieg siły w czasie $q(t)$ odbiega w znacznym stopniu od założonego w rozważaniach wymuszenia impulsowego. Bezpośrednie zbudowanie macierzy wpływu ze zmierzonych odpowiedzi konstrukcji doprowadziłoby do uzyskania błędnych wyników. Problem ten można rozwiązać na dwa sposoby:

Rozwikłanie splotu. Zmierzona odpowiedź konstrukcji $u_i(t)$ na wymuszenie $q_j(t)$ jest równa splotowi jej funkcji odpowiedzi impulsowej $h_{ij}(t)$ z wymuszeniem $q_j(t)$,

$$u_i(t) = (q_j \star h_{ij})(t) = \int_0^t q_j(t - \tau)h_{ij}(\tau) d\tau, \quad (2.27)$$

gdzie i jest indeksem stopnia swobody, w którym wykonywany jest pomiar, a j jest indeksem stopnia swobody, w którym jest przyłożone wymuszenie. Funkcję impulsowej odpowiedzi konstrukcji $h_{ij}(t)$ można obliczyć rozwiązując powyższe równanie.

Należy jednak zauważyć, że (2.27) jest liniowym równaniem całkowym Volterry pierwszego rodzaju. Takie równania są źle postawione w sensie Hadamarda [129]. Wartości osobliwe operatora splotu zbiegają do zera, a jego wersji zdyskretyzowanej do poziomu wyznaczonego przez dokładność arytmetyki zmiennopozycyjnej, co oznacza, że dyskretna wersja równania (2.27) jest skrajnie źle uwarunkowana [131, 132], i w przypadku gdy dane wejściowe obarczone są pewnym błędem, a w praktyce wszystkie pomiary obarczone są błędem wynikającym np. z niedoskonałości urządzeń pomiarowych, obliczone rozwiązanie $h_{ij}(t)$ może nie być wiarygodne. W takim wypadku rozwiązania należy szukać stosując odpowiednie metody numeryczne posiadające właściwości regularyzujące (np. regularyzacja metodą Tichonowa lub iteracyjna metoda CGLS [130, 132], patrz również Rozdział 5). Niezależnie od wybranej metody, problem opisany równaniem (2.27) należy rozwiązać osobno dla każdej pary wymuszenia i odpowiedzi.

Całkowa reprezentacja pseudo obciążeń. Pseudo obciążenie w i -tym stopniu swobody $p_i^0(t)$ można przedstawić w postaci splotu wymuszenia eksperymentalnie przyłożonego do konstrukcji $q_i(t)$ (na które odpowiedź jest zmierzona, a więc znana) z pewną niewiadomą funkcją $p_i(t)$,

$$p_i^0(t) = \int_0^t q_i(t - \tau) p_i(\tau) d\tau \quad (2.28a)$$

lub, w postaci wektorowej,

$$\mathbf{p}^0(t) = \int_0^t \mathbf{Q}(t - \tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau, \quad (2.28b)$$

gdzie $\mathbf{Q}(t)$ jest macierzą diagonalną zawierającą na przekątnej eksperymentalnie zastosowane wymuszenia $q_i(t)$,

$$\mathbf{Q}(t) = \text{diag} [q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)]. \quad (2.28c)$$

Bezpośrednie podstawienie zależności (2.28b) do równania (2.19b) prowadzi, po prostych operacjach zmiany kolejności całkowania i zamiany zmiennych, do następującej zależności

$$\begin{aligned} & \int_0^t \mathbf{Q}(t - \tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t \left[\Delta \mathbf{M} \int_0^{t-\tau} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau - \kappa) \mathbf{Q}(\kappa) d\kappa + \Delta \mathbf{K} \int_0^{t-\tau} \mathbf{B}(t - \tau - \kappa) \mathbf{Q}(\kappa) d\kappa \right] \mathbf{p}(\tau) d\tau \\ & = -\Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^L(t) - \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}^L(t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Zauważmy, że występujące w powyższym równaniu macierze

$$\int_0^{t-\tau} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau - \kappa) \mathbf{Q}(\kappa) d\kappa \quad \text{i} \quad \int_0^{t-\tau} \mathbf{B}(t - \tau - \kappa) \mathbf{Q}(\kappa) d\kappa \quad (2.30)$$

zawierają wartości odpowiedzi konstrukcji referencyjnej w chwili $t - \tau$ (we wszystkich rozważanych stopniach swobody) na eksperymentalnie zastosowane wymuszenia opisane funkcjami $q_i(t)$ (przyłożone kolejno we wszystkich rozważanych stopniach swobody). A zatem macierze (2.30) są eksperymentalnymi odpowiednikami macierzy wpływu. Jeśli założymy, że symbole $\mathbf{B}(t)$ i $\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t)$ oznaczają nie tyle idealne funkcje odpowiedzi impulsowych konstrukcji, co raczej zmierzone odpowiedzi konstrukcji na eksperymentalnie zastosowane wymuszenia quasi-impulsowe $q_i(t)$, tzn. jeśli wykonamy podstawienie

$$\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t) \longleftarrow \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \mathbf{Q}(\tau) d\tau, \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{B}(t) \longleftarrow \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{Q}(\tau) d\tau, \quad (2.31b)$$

to (2.29) przyjmie następującą postać:

$$\int_0^t \left[\mathbf{Q}(t - \tau) + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(t - \tau) \right] \mathbf{p}(\tau) d\tau = -\Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^L(t) - \Delta \mathbf{K} \mathbf{u}^L(t), \quad (2.32)$$

w której $\mathbf{B}(t)$ i $\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t)$ oznaczają eksperymentalnie zmierzone macierze wpływu i która jest eksperymentalnym odpowiednikiem (2.19b). Należy zauważyć, że (2.32) i (2.19b) stają się formalnie identyczne, jeśli zastosowane wymuszenie jest faktycznie wymuszeniem impulsowym (funkcją delta Diraca), tj. jeśli $q_i(t) = \delta(t)$.

Rozwiązanie równania (2.32) prowadzi do obliczenia funkcji $\mathbf{p}(t)$, będącej eksperymentalnym odpowiednikiem pseudo obciążenia $p^0(t)$. Sygnał czujników umieszczonych w konstrukcji zmodyfikowanej można następnie wyliczyć stosując analogon zależności (2.20):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^L(t) + \int_0^t \mathbf{B}^x(t - \tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau, \quad (2.33)$$

w którym, analogicznie jak w podstawieniu (2.31), macierz $\mathbf{B}^x(t)$ jest eksperymentalnie zmierzoną macierzą wpływu związaną z rozważanymi czujnikami i zawiera odpowiedzi czujników na eksperymentalnie zastosowane wymuszenia $q_i(t)$ przyłożone kolejno we wszystkich rozważanych stopniach swobody.

Zastosowanie całkowej reprezentacji pseudo obciążenia (2.28b) pozwala na bezpośrednie wykorzystanie zarejestrowanych odpowiedzi konstrukcji do budowy eksperymentalnych macierzy wpływu i pominięcie etapu kosztownych numerycznie obliczeń związanych z koniecznością rozwikłania splotu (2.27), co jest niewątpliwą zaletą takiego podejścia. Z teoretycznego punktu widzenia jego wadą jest natomiast fakt, że równanie (2.32) jest całkowym równaniem Volterry pierwszego rodzaju, którego rozwiązanie, w odróżnieniu od równań Volterry drugiego rodzaju, takich jak (2.19b), jest zadaniem formalnie źle postawionym w sensie Hadamarda [129], a więc jego rozwiązanie może być znacznie bardziej wrażliwe na błędy pomiarowe i wymagać zastosowania wyższego poziomu regularyzacji numerycznej.

2.6 Modelowanie uderzenia niesprężystego

Zależność (2.14) przedstawia ogólną postać równania ruchu konstrukcji referencyjnej poddanej działaniu pewnego wektora sił $\mathbf{f}(t)$. W analizie przedstawionej w poprzedniej części niniejszego rozdziału, wektor sił $\mathbf{f}(t)$ reprezentował zewnętrzne, powtarzalne wymuszenie testowe. W rozważanym w tej części rozdziału problemie identyfikacji zewnętrznego obciążenia, wektor $\mathbf{f}(t)$ jest związany z identyfikowanym obciążeniem i wobec tego pozostaje nieznanym. W podstawowych przypadkach obciążenie to może być utożsamiane z wymuszeniem siłowym, pochodzącym na przykład od wiatru, uderzenia obiektu lub innych oddziaływań zewnętrznych, które nie wywołują zmiany w parametrach masowych i sztywnościowych konstrukcji. Istnieje niemniej klasa zewnętrznych obciążeń, takich jak na przykład obciążenie mostu wywołane przejazdem pojazdu lub pochodzące od poruszającego się tłumu, których analiza powinna

uwzględniać również inercyjne efekty interakcji pomiędzy konstrukcją a obiektem obciążającym.

Rozważmy scenariusz uderzenia idealnie niesprężystego, w którym obciążenie konstrukcji jest wywołane uderzeniem w jeden z węzłów konstrukcji obiektu o masie m i prędkości $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]$. W takim scenariuszu:

1. Obiekt uderzający w chwili uderzenia zostaje efektywnie przytwierdzony do konstrukcji i porusza się razem z nią jako jeden układ, co powinno być modelowane za pomocą modyfikacji macierzy sztywności $\Delta\mathbf{M}$ odpowiadającej masie m . Równanie ruchu należy więc zapisać w postaci (2.16), gdzie wektor pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(t)$ modeluje jedynie zmianę masy:

$$\mathbf{p}^0(t) = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t), \quad (2.34)$$

co jest odpowiednikiem zależności (2.17) w wypadku braku modyfikacji sztywności ($\Delta\mathbf{K} = 0$) i co dla pojedynczego uderzenia węzłowego upraszcza się do wyrażenia

$$p_i^0(t) = -\Delta m_i \ddot{u}_i(t), \quad (2.35)$$

gdzie i indeksuje stopnie swobody oraz

$$\Delta m_i = \begin{cases} m & \text{dla stopni swobody } i \text{ związanych z uderzanym węzłem,} \\ 0 & \text{dla pozostałych stopni swobody.} \end{cases} \quad (2.36)$$

2. Wektor sił wymuszających $\mathbf{f}(t)$ występujący w rozważanym równaniu ruchu (2.16) reprezentuje jedynie siły kontaktowe w chwili uderzenia obiektu i nie uwzględnia inercyjnych efektów interakcji pomiędzy nim a konstrukcją. Składowe wektora $f_i(t)$ znikają w stopniach swobody niezwiązanych bezpośrednio z uderzanym węzłem, natomiast dla stopni swobody z nim związanych są one proporcjonalne do masy obiektu i odpowiedniej składowej jego prędkości, to jest

$$f_i(t) = \begin{cases} mv_i \delta(t) & \text{dla stopni swobody } i \text{ związanych z uderzanym węzłem,} \\ 0 & \text{dla pozostałych stopni swobody,} \end{cases} \quad (2.37)$$

gdzie $\delta(t)$ oznacza jednostkowe wymuszenie impulsowe (funkcję delta Diraca).

Po uwzględnieniu w równaniu całkowym (2.19b) powyższych zależności, specyficznych dla wypadku uderzenia idealnie niesprężystego, można stwierdzić, że pseudo obciążenie $p_i^0(t)$ jest zerowe w stopniach swobody i niezwiązanych bezpośrednio z uderzanym węzłem, natomiast w stopniach swobody bezpośrednio z nim związanych dane jest w postaci rozwiązania następującej prostej wersji równania (2.19b):

$$p_i^0(t) + \int_0^t m \ddot{B}_{\delta ii}(t - \tau) p_i^0(\tau) d\tau = -m \ddot{u}_i^L(t). \quad (2.38)$$

W poprzednich częściach niniejszego rozdziału $\ddot{u}_i^L(t)$ oznaczało zmierzoną, a więc znaną, odpowiedź konstrukcji referencyjnej na wymuszenie testowe. Natomiast $\ddot{u}_i^L(t)$

występujące w (2.38) nie jest bezpośrednio mierzone i znane, ponieważ oznacza odpowiedź konstrukcji niezmodyfikowanej jedynie na wektor wymuszających sił kontaktowych (2.37), bez uwzględnienia inercyjnych efektów interakcji pomiędzy konstrukcją a uderzającym obiektem, które są modelowane modyfikacją macierzy mas $\Delta\mathbf{M}$. Taką odpowiedź można jednak wyznaczyć jako liniową kombinację zmierzonych odpowiedzi $\ddot{u}_i^{Lx}(t)$, $\ddot{u}_i^{Ly}(t)$ i $\ddot{u}_i^{Lz}(t)$ na jednostkowe wymuszenie impulsowe $\delta(t)$ przyłożone w stopniach swobody związanych z węzłem, w który uderzył obiekt:

$$\ddot{u}_i^L(t) = mv_x \ddot{u}_i^{Lx}(t) + mv_y \ddot{u}_i^{Ly}(t) + mv_z \ddot{u}_i^{Lz}(t). \quad (2.39)$$

Zakładając znajomość wartości masy m i prędkości \mathbf{v} obiektu uderzającego oraz miejsca uderzenia, możliwe jest wyznaczenie równoważnego pseudo obciążenia $p_i^0(t)$ poprzez rozwiązanie równania (2.39). Odpowiedź konstrukcji niesprężystości uderzonej można wówczas obliczyć na podstawie zależności (2.20).

Należy zauważyć, że powyższe rozważania można uogólnić do przypadku wymuszeń quasi impulsowych i doświadczalnych macierzy wpływu w sposób całkowicie analogiczny do opisanego w Części 2.5.

Rozdział 3

Identyfikacja zmian masy i sztywności konstrukcji

Problem odwrotny identyfikacji zmian masy i sztywności został sformułowany w postaci zadania optymalizacyjnego, tzn. zadania minimalizacji funkcji celu $F(\boldsymbol{\mu})$ będącej pewną liczbową miarą różnicy pomiędzy zmierzoną odpowiedzią $\mathbf{x}^M(t)$ czujników umieszczonych na konstrukcji zmodyfikowanej (uszkodzonej) a ich odpowiedzią $\mathbf{x}(t)$ nieparametrycznie modelowaną za pomocą (2.20), patrz Rozdział 2. Minimalizacja jest wykonywana ze względu na wektor parametrów uszkodzenia $\boldsymbol{\mu}$, w sposób jednoznaczny charakteryzujący uszkodzenie.

Optymalne wartości $\boldsymbol{\mu}$ minimalizujące funkcję celu można znaleźć stosując metody gradientowe pierwszego lub drugiego rzędu. Efektywna grupa metod gradientowych pierwszego rzędu, określanych w literaturze jako metody quasi-Newtona, korzysta z dokładnej wartości gradientu funkcji celu $\nabla F(\boldsymbol{\mu})$ oraz z iteracyjnie wyznaczonej aproksymacji jej hesjanu $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu})$. Najbardziej popularnymi metodami tej grupy są metody BFGS (Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno), DFP (Davidon–Fletcher–Powell) oraz SR1 (ang. symmetric rank one); szczegółowe informacje o ich efektywności oraz o innych metodach wyznaczania aproksymacji Hesjanu można znaleźć np. w pracy [97]. Metody gradientowe drugiego rzędu, określane jako metody Newtona, korzystają podczas optymalizacji z dokładnych wartości zarówno gradientu funkcji celu $\nabla F(\boldsymbol{\mu})$ jak i hesjanu $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu})$.

W niniejszym rozdziale przedstawiona jest ogólna postać funkcji celu (Cześć 3.1), następnie pokrótce omówione są najczęściej stosowane metody analizy wrażliwości (Cześć 3.2) oraz szczegółowo przeprowadzona jest analiza wrażliwości pierwszego i drugiego rzędu w wypadku czasu ciągłego (Cześci 3.3 i 3.4) oraz w wypadku czasu dyskretnego (Cześć 3.5).

3.1 Funkcja celu

Proces identyfikacji parametrów uszkodzenia sprowadza się do minimalizacji funkcji celu $F(\boldsymbol{\mu})$, która jest miarą dopasowania modelowanej odpowiedzi czujników $\mathbf{x}(t)$, wyznaczonej za pomocą równania (2.20), do zmierzonej odpowiedzi czujników $\mathbf{x}^M(t)$

na znane wymuszenie testowe $\mathbf{f}(t)$. Za miarę dopasowania przyjęto normę ℓ^2 różnicy odpowiedzi czujników:

$$F(\boldsymbol{\mu}) := \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{d}(t)\|^2 dt, \quad (3.1)$$

gdzie wektor $\mathbf{d}(t)$ jest równy różnicy między zarejestrowaną czujnikami odpowiedzią konstrukcji uszkodzonej $\mathbf{x}^M(t)$ na znane testowe wymuszenia $\mathbf{f}(t)$ a modelowaną odpowiedź $\mathbf{x}(t)$ czujników na to samo wymuszenie testowe dla przyjętych parametrów uszkodzenia $\boldsymbol{\mu}$,

$$\mathbf{d}(t) := \mathbf{x}^M(t) - \mathbf{x}(t). \quad (3.2)$$

Wektor parametrów uszkodzenia $\boldsymbol{\mu}$ w sposób jednoznaczny określa uszkodzenie; interpretacja jego poszczególnych elementów zależy od rozważanego scenariusza uszkodzenia/modyfikacji. W rozważanym w tej pracy wypadku uszkodzenia dotyczącego masy $\Delta\mathbf{M}(\boldsymbol{\mu})$ lub sztywności konstrukcji $\Delta\mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})$, elementy wektora $\boldsymbol{\mu}$ mogą kwantyfikować albo masę dodaną, albo redukcję sztywności elementów,

$$\mu_i := \frac{\hat{E}_i}{E_i}, \quad (3.3)$$

gdzie \hat{E}_i oraz E_i oznaczają moduły Younga i -tego elementu konstrukcji odpowiednio po oraz przed modyfikacją lub uszkodzeniem. W wypadku zmiany sztywności (3.3) zachodzi zależność $0 \leq \mu_i \leq 1$, gdzie wartość $\mu_i = 0$ odpowiada całkowitej redukcji sztywności elementu.

Normalizacja funkcji celu Funkcja celu opisana równaniem (3.1) zakłada identyfikację wektora parametrów uszkodzenia elementów konstrukcji $\boldsymbol{\mu}$ na podstawie bezpośrednio zarejestrowanych wartości sygnałów czujników. W wypadku wykorzystania większej liczby czujników o liczbowo istotnie różniących się zakresach pomiarowych (np. przyspieszoniometry oraz czujników przemieszczeń lub odkształceń), pożądana może okazać się normalizacja wartości pomiarowych poszczególnych czujników w celu wyrównania wpływu ich sygnałów na funkcję celu i wynik identyfikacji. Brak takiego normowania może w skrajnych wypadkach doprowadzić do sytuacji, w której sygnał jedynie jednego z czujników (o największej amplitudzie) będzie dominujący w procesie identyfikacji parametrów uszkodzenia $\boldsymbol{\mu}$. Przy uwzględnieniu normalizacji, ogólną postać normalizowanej funkcji celu można zapisać następująco:

$$F(\boldsymbol{\mu}) := \frac{1}{2} \sum_i \frac{\int_0^T |x_i^M(t) - x_i(t)|^2 dt}{\|x_i^M\|^2}, \quad (3.4)$$

gdzie i indeksuje sygnały kolejnych czujników oraz

$$\|x_i^M\| := \sqrt{\int_0^T [x_i^M(t)]^2 dt}. \quad (3.5)$$

Poprzez wprowadzenie czynnika normalizującego pod znak całki, normalizowaną postać funkcji celu (3.4) można przedstawić w postaci równoważnej standardowej funkcji celu (3.1),

$$F(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \sum_i \int_0^T \left(\frac{x_i^M(t)}{\|x_i^M\|} - \frac{x_i(t)}{\|x_i^M\|} \right)^2 dt, \quad (3.6)$$

w której normalizacja jest przeprowadzona na poziomie zmierzonych sygnałów czujników konstrukcji uszkodzonej $x_i^M(t)$ oraz, zgodnie z (2.20), konstrukcji nieuszkodzonej $x_i^L(t)$ i $B_{ij}^x(t)$. Oznacza to, że normalizowaną funkcję celu (3.4) można zastąpić standardową funkcją celu (3.1) oraz wcześniejszą normalizacją sygnałów pomiarowych czujników przeprowadzoną zgodnie z następującymi podstawieniami:

$$x_i^M(t) \leftarrow \frac{x_i^M(t)}{\|x_i^M\|}, \quad (3.7a)$$

$$x_i^L(t) \leftarrow \frac{x_i^L(t)}{\|x_i^M\|}, \quad (3.7b)$$

$$B_{ij}^x(t) \leftarrow \frac{B_{ij}^x(t)}{\|x_i^M\|}, \quad (3.7c)$$

które można wykonać jeszcze na etapie wstępnej obróbki sygnałów pomiarowych czujników. Z uwagi na równoważność normalizowanej (3.4) i standardowej (3.1) postaci funkcji celu, w dalszej części pracy rozważana będzie jedynie jej standardowa postać (3.1).

3.2 Metody analizy wrażliwości

Większość metod stosowanych w celu przeprowadzenia analizy wrażliwości można zaliczyć do jednej z trzech grup:

1. aproksymacji różnicami skończonymi (ang. finite difference method, FDM),
2. różniczkowania bezpośredniego (ang. direct differentiation method, DDM),
3. zmiennej sprzężonej (ang. adjoint variable method, AVM).

Niewątpliwie najprostszą metodą z powyższych jest metoda FDM, która bazuje na przybliżeniu pochodnej funkcji celu $F(\boldsymbol{\mu})$ względem parametru μ_i , kwantyfikującego uszkodzenie i -tego elementu konstrukcji, za pomocą ilorazu różnicowego. Schemat aproksymacji pochodnej funkcji przy użyciu schematu różnic przednich (ang. forward differences) można przedstawić w następujący sposób:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} \approx \frac{F(\boldsymbol{\mu} + \Delta \mu \mathbf{e}_i) - F(\boldsymbol{\mu})}{\Delta \mu}, \quad (3.8)$$

gdzie \mathbf{e}_i jest wektorem jednostkowym zawierającym zera wszędzie oprócz i -tego elementu równego jedności. Dokładność przybliżenia zależy od wielkości perturbacji $\Delta \mu$

i wynosi $\mathcal{O}(\Delta\mu)$. Należy jednak zauważyć, że próba zwiększenia dokładności metody przez przyjęcie nadmiernie małej wartości $\Delta\mu$ może powodować problemy natury numerycznej związane ze zmiennoprzecinkową reprezentacją liczb rzeczywistych. Innym sposobem zwiększenia dokładności jest przyjęcie schematu aproksymacji o większej dokładności, takiego jak np. schemat różnic centralnych (ang. central differences), którego dokładność wynosi $\mathcal{O}(\Delta\mu^2)$:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} \approx \frac{F(\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\Delta\mu\mathbf{e}_i) - F(\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\Delta\mu\mathbf{e}_i)}{\Delta\mu}. \quad (3.9)$$

Przyjmując, że wektor $\boldsymbol{\mu}$ zawiera N_μ elementów, obliczenie $\nabla F(\boldsymbol{\mu})$ metoda FDM wymaga, w zależności od użytego schematu, N_μ lub $2N_\mu$ -krotnego obliczenia wartości funkcji celu, a więc również tylkokrotnego rozwiązania równania (2.19b). Zważywszy, że przy dość wysokiej złożoności obliczeniowej możliwe jest uzyskanie jedynie aproksymacji gradientu, w dalszej części rozdziału szczegółowo omówiono jedynie zastosowanie metod DDM i AVM umożliwiających wyprowadzenie dokładnych, analitycznych postaci gradientu $\nabla F(\boldsymbol{\mu})$ i hesjanu $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu})$ funkcji celu. W literaturze można znaleźć dyskusje czterech możliwych kombinacji metod DDM i AVM w celu wyznaczenia hesjanu [133, 134]:

- bezpośredniego różniczkowania – bezpośredniego różniczkowania (ang. direct–direct),
- bezpośredniego różniczkowania – zmiennej sprzężonej (ang. direct–adjoint),
- zmiennej sprzężonej – zmiennej sprzężonej (ang. adjoint–adjoint),
- zmiennej sprzężonej – bezpośredniego różniczkowania (ang. adjoint–direct).

Każda z wymienionych metod prowadzi do różnych, choć (w dokładnej arytmetyce) równoważnych sobie wzajemnie, postaci hesjanu $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu})$, jednak przy różnej złożoności obliczeniowej. Ich zastosowanie do problemu identyfikacji rozważanego w tej pracy omówiono w Części 3.4; analizę ich zastosowań w problemie innego typu (optymalizacja kształtu w aerodynamice) można znaleźć w [133].

3.3 Gradient funkcji celu

W niniejszej części przedstawiono wyprowadzenie analitycznych zależności pozwalających obliczyć gradient funkcji celu metodami bezpośredniego różniczkowania (DDM) oraz zmiennej sprzężonej (AVM). Po zróżniczkowaniu równania (3.1) względem parametru uszkodzenia μ_i , uzyskujemy następującą postać pochodnej funkcji celu:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = - \int_0^T \mathbf{d}^T(t) \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt, \quad (3.10)$$

gdzie $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mu_i$ jest pochodną odpowiedzi czujników konstrukcji, wyrażoną następującym wzorem powstałym poprzez zróżniczkowanie (2.20):

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} = \int_0^t \mathbf{B}^x(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau. \quad (3.11)$$

Powyższa zależność zawiera pochodną pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(t)$ względem parametru μ_i . Przedstawione poniżej metody DDM i AVM odpowiednio albo obliczają tę pochodną wprost, albo ją rugują wykorzystując w tym celu tzw. zmienną sprzężoną.

3.3.1 Metoda bezpośredniego różniczkowania (DDM)

Pochodna funkcji celu (3.10) względem parametru μ_i , po uwzględnieniu (3.11), zależy od pochodnej pseudo obciążenia. Metoda bezpośredniego różniczkowania oblicza tę pochodną poprzez wielokrotne rozwiązanie odpowiednio zróżniczkowanej zależności definiującej pseudo obciążenie (2.19b),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \mathbf{p}^0(\tau) d\tau \\ + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \mathbf{p}^0(\tau) d\tau \\ = -\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}^L(t) - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}^L(t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

która po przeniesieniu członów zawierających pod znakiem całki nieróżniczkowane pseudo obciążenie na prawą stronę i uwzględnieniu (2.12) przyjmuje postać równania całkowego Volterry drugiego rodzaju (podobnie jak (2.19b)),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau \\ = -\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3.2 Metoda zmiennej sprzężonej (AVM)

W poprzedniej części przedstawiono sposób wyprowadzenia analitycznych zależności pozwalających obliczyć gradient funkcji celu metodą bezpośredniego różniczkowania. Uzyskana zależność zależy bezpośrednio od pierwszych pochodnych pseudo obciążenia, które muszą być obliczone niezależnie dla każdego parametru uszkodzenia. Alternatywnym podejściem jest wyprowadzenie analitycznych zależności na pierwszą pochodną funkcji celu w oparciu o metodę zmiennej sprzężonej. Wprowadźmy dodatkowe zmienne $\boldsymbol{\gamma}(t)$ i $\boldsymbol{\lambda}(t)$, zwane zmiennymi sprzężonymi, i pomnóżmy przez nie skalarnie odpowiednio zależności na pochodną odpowiedzi (3.11) i na pochodną pseudo obciążenia (3.13). W rezultacie, po przeniesieniu wszystkich członów na jedną

stronę i scałkowaniu względem czasu t od 0 do T , otrzymamy:

$$0 = \int_0^T \boldsymbol{\gamma}^T(t) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} - \int_0^t \mathbf{B}^x(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau \right] dt \quad (3.14)$$

oraz

$$0 = \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau \right. \\ \left. + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (3.15)$$

Powyższe równania są spełnione niezależnie od wartości przyjmowanych przez zmienne $\boldsymbol{\lambda}(t)$ i $\boldsymbol{\gamma}(t)$, dzięki czemu możliwe jest dodanie ich stronami do pochodnej funkcji celu (3.10) bez wpływu na jej wartość. W wyniku takiej operacji otrzymujemy następującą zależność:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = - \int_0^T \mathbf{d}^T(t) \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt \\ + \int_0^T \boldsymbol{\gamma}^T(t) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} - \int_0^t \mathbf{B}^x(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau \right] dt \\ + \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau \right. \\ \left. + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t-\tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) \right] dt. \quad (3.16)$$

Celem dalszych przekształceń jest wyrugowanie z powyższego wyrażenia członów zawierających pochodne odpowiedzi czujników oraz pochodne pseudo obciążeń, tak by uniknąć kosztownej numerycznie konieczności wielokrotnego rozwiązywania całkowego równania (3.13). Po pogrupowaniu tych członów oraz, w wypadku pochodnych pseudo obciążeń, po zmianie kolejności całkowania, powyższe równanie można zapisać w równoważnej formie:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) \right] dt \\ + \int_0^T [\boldsymbol{\gamma}(t) - \mathbf{d}(t)]^T \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt \\ + \int_0^T \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t) + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau-t) d\tau \right. \\ \left. + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau-t) d\tau - \int_t^T \boldsymbol{\gamma}^T(\tau) \mathbf{B}^x(\tau-t) d\tau \right] \frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i} dt. \quad (3.17)$$

Należy zauważyć, że wartości zmiennych $\boldsymbol{\lambda}(t)$ i $\boldsymbol{\gamma}(t)$ można dobrać tak, by wyrażenia stojące przed pochodnymi odpowiedzi czujników i pseudo obciążeń, $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mu_i$

i $\partial \mathbf{p}^0(t)/\partial \mu_i$ równe były zero. Dzieje się tak, gdy

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{d}(t) \quad (3.18)$$

oraz gdy zmienna sprzężona $\boldsymbol{\lambda}(t)$ spełnia równanie sprzężone:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}^T(t) + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\ = \int_t^T \boldsymbol{\gamma}^T(\tau) \mathbf{B}^x(\tau - t) d\tau. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Powyższe równanie, podobnie jak (2.19b) i (3.13), jest równaniem całkowym Volterry drugiego rodzaju, które posiada jednoznaczne rozwiązanie, jeśli macierz $\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}$ jest nieosobliwa, co wynika z podstawowych twierdzeń teorii Riesza [129]. Na uwagę zasługuje fakt, że równanie (3.19), a zatem i zmienna sprzężona $\boldsymbol{\lambda}(t)$, nie zależą od parametru μ_i . Ostatecznie wyrażenie (3.16) na pochodną funkcji celu redukuje się do postaci:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) \right] dt, \quad (3.20)$$

która jest analitycznie równoważna (3.10), ale nie zawiera bezpośrednio pochodnych odpowiedzi czujników i pseudo obciążeń.

3.3.3 Koszt numeryczny

Obie przedstawione powyżej metody prowadzą do dokładnych, analitycznych postaci gradientu funkcji celu. Obie wyprowadzone zależności są sobie równoważne, jednak mają istotnie różny koszt numeryczny. W obu metodach głównym kosztem numerycznym jest koszt rozwiązania całkowego równania (3.13) lub całkowego równania sprzężonego (3.19):

- Obliczenia *metodą DDM* wymagają wielokrotnego rozwiązania równania (3.13) w celu obliczenia pochodnych pseudo obciążeń względem wszystkich rozważanych parametrów uszkodzenia μ_i . Koszt numeryczny jest zatem liniowo zależny od liczby elementów wektora $\boldsymbol{\mu}$ i wynosi $\mathcal{O}(N_\mu)$. W przypadku *metody FDM*, koszt numeryczny również wynosi $\mathcal{O}(N_\mu)$, jednak metoda DDM pozwala uzyskać analityczny (dokładny) gradient funkcji celu, podczas gdy metoda FDM prowadzi jedynie do aproksymacji gradientu.
- Zaletą *metody AVM* jest fakt, że zależność (3.20) nie zależy bezpośrednio od pochodnych $\partial \mathbf{x}(t)/\partial \mu_i$ i $\partial \mathbf{p}(t)/\partial \mu_i$, a zatem nie jest wymagane wielokrotne obliczanie rozwiązania (3.13). Główny koszt numeryczny jest tutaj związany z koniecznością obliczenia zmiennej sprzężonej, a zatem jedynie jednokrotnego rozwiązania (3.19), i wynosi $\mathcal{O}(1)$.

3.4 Hesjan funkcji celu

W tej części rozdziału przedstawiono wyprowadzenie analitycznych zależności pozwalających obliczyć hesjan funkcji celu metodami bezpośredniego różniczkowania (DDM-DDM), zmiennej sprzężonej (AVM-AVM) i dwiema możliwymi kombinacjami tych metod (DDM-AVM i AVM-DDM) oraz analizę ich efektywności numerycznej. Pierwszy człon oznaczenia metody koduje zależność wyjściową:

- W metodach DDM-DDM i DDM-AVM zależnością wyjściową jest bezpośrednio zróżniczkowana zależność (3.10) względem parametru uszkodzenia μ_j ,

$$\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_j} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt - \int_0^T \mathbf{d}^T(t) \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} dt, \quad (3.21)$$

gdzie $\partial^2 \mathbf{x}(t)/\partial \mu_i \partial \mu_j$ jest drugą pochodną odpowiedzi czujników konstrukcji, wyrażoną następującym wzorem powstałym poprzez zróżniczkowanie (3.11):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \int_0^t \mathbf{B}^x(t - \tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau. \quad (3.22)$$

- W metodach AVM-DDM i AVM-AVM zależnością wyjściową jest bezpośrednio zróżniczkowana zależność na pierwszą pochodną (3.20) otrzymana metodą AVM,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = & \int_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial \mu_j} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) \right] dt \\ & + \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_j} \right] dt, \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdzie przyjęto założenie, że zmiany macierzy mas i sztywności zależą liniowo od parametrów uszkodzenia, tzn.

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{M}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = 0, \quad (3.24)$$

oraz gdzie pochodne odpowiedzi konstrukcji $\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)/\partial \mu_j$ i $\partial \mathbf{u}(t)/\partial \mu_j$ zależą wprost od odpowiednich pochodnych pseudo obciążenia, patrz (2.12),

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_i} = \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau, \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_i} = \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i} d\tau. \quad (3.25b)$$

Powyższe zależności zawierają albo drugą pochodną pseudo obciążenia, albo pochodną zmiennej sprzężonej. Drugi człon oznaczenia metody koduje sposób traktowania tych pochodnych, które mogą być albo obliczone bezpośrednio (metody DDM-DDM

i AVM-DDM), albo wyrugowane za pomocą zmiennej sprzężonej przy użyciu techniki analogicznej jak w wypadku gradientu (metody DDM-AVM i AVM-AVM).

3.4.1 Metoda DDM-DDM

Zależnością wyjściową jest (3.21), z której wynika, że Hesjan funkcji celu zależy zarówno od pierwszej, jak i od drugiej pochodnej pseudo obciążenia, przy czym pierwsza pochodna została obliczona przy wyznaczaniu gradientu funkcji celu poprzez N_μ -krotne rozwiązanie (3.13). Druga pochodna pseudo obciążenia jest obliczana w sposób analogiczny, to jest poprzez wielokrotne (oddzielnie dla każdej kombinacji indeksów i i j , a zatem N_μ^2 -krotne) rozwiązanie dwukrotnie zróżniczkowanego równania (2.19b). Przy uwzględnieniu założenia (3.24), ma ono następującą postać równania całkowego Volterry drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau \\ &= - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_j} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_j} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_i}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

gdzie pochodne odpowiedzi konstrukcji zależą wprost od odpowiednich pochodnych pseudo obciążenia, patrz (3.25).

3.4.2 Metoda DDM-AVM

Podobnie jak w metodzie DDM-DDM, zależnością wyjściową jest (3.21). Występujące w niej drugie pochodne pseudo obciążenia pochodne są rugowane za pomocą techniki zmiennej sprzężonej, podobnie jak w wypadku gradientu. W pierwszym kroku zależności (3.22) i (3.26) są skalarnie mnożne przez zmienne sprzężone $\boldsymbol{\gamma}(t)$ i $\boldsymbol{\lambda}(t)$, oraz całkowane od 0 do T względem czasu, co prowadzi do

$$0 = \int_0^T \boldsymbol{\gamma}^T(t) \left[\frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} - \int_0^t \mathbf{B}^x(t - \tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau \right] dt \quad (3.27)$$

oraz

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) & \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau \right. \\ & + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_j} \\ & \left. + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_i} \right] dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Powyższe równania są spełnione niezależnie od wartości przyjmowanych przez zmienne $\boldsymbol{\lambda}(t)$ i $\boldsymbol{\gamma}(t)$, dzięki czemu możliwe jest dodanie ich stronami do drugiej pochodnej funkcji celu (3.21) bez wpływu na jej wartość. W wyniku takiej operacji otrzymujemy

następującą zależność:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_j} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt - \int_0^T \mathbf{d}^T(t) \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} dt \\
&+ \int_0^T \boldsymbol{\gamma}^T(t) \left[\frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} - \int_0^t \mathbf{B}^x(t-\tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau \right] dt \\
&+ \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t-\tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau \right. \\
&\quad + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t-\tau) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_j} \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_i} \right] dt. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Podobnie jak w wypadku metody AVM, celem dalszych przekształceń jest wyrugowanie z powyższego wyrażenia członów zawierających drugie pochodne odpowiedzi czujników oraz pseudo obciążeń, tak by uniknąć kosztownej numerycznie konieczności wielokrotnego rozwiązywania całkowitego równania (3.26). Po pogrupowaniu tych członów oraz, w wypadku pochodnych pseudo obciążeń, po zmianie kolejności całkowania, powyższe równanie można zapisać w równoważnej formie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_j} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt \\
&+ \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_i} \right] dt \\
&+ \int_0^T [\boldsymbol{\gamma}(t) - \mathbf{d}(t)]^T \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} dt \\
&+ \int_0^T \left[\boldsymbol{\lambda}^T(t) + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau-t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau-t) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_t^T \boldsymbol{\gamma}^T(\tau) \mathbf{B}^x(\tau-t) d\tau \right] \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} dt. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli zmienne $\boldsymbol{\lambda}(t)$ i $\boldsymbol{\gamma}(t)$ spełniają zależności (3.18) i (3.19), to wyrażenia stojące przed drugimi pochodnymi odpowiedzi czujników i pseudo obciążeń są równe zero. W takim wypadku wyrażenie (3.30) na drugą pochodną funkcji celu redukuje się do postaci

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(\mu)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \int_0^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_j} \right)^T \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mu_i} dt + \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial \mu_i} \right] dt, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

która jest analitycznie równoważna (3.21), ale nie zawiera bezpośrednio drugich pochodnych odpowiedzi czujników i pseudo obciążeń. Należy jednak zauważyć, że (3.31) zawiera pierwsze pochodne odpowiedzi i sygnałów czujników, zależące wprost od pierwszych pochodnych pseudo obciążeń, które (zgodnie z oznaczeniem metody, DDM-AVM) należy obliczyć metodą bezpośredniego różniczkowania poprzez wielokrotne rozwiązanie równania (3.13).

3.4.3 Metoda AVM-AVM

Zależnością wyjściową jest (3.23), czyli zróżniczkowane wyrażenie na pierwszą pochodną funkcji celu otrzymane metodą zmiennej sprzężonej (AVM). Wyrażenie to zawiera pierwsze pochodne zmiennej sprzężonej $\boldsymbol{\lambda}(t)$ oraz, uwzględniając zależność (3.25), również pierwsze pochodne wektora pseudo obciążeń $\mathbf{p}^0(t)$. Metoda AVM-AVM wykorzystuje dwie dodatkowe zmienne sprzężone, $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$ i $\boldsymbol{\beta}_i(t)$, zależne od indeksu i , w celu wyrugowania powyższych pochodnych. Pomnóżmy skalarnie przez te zmienne odpowiednio zależność na pochodną pseudo obciążenia względem μ_j (3.13) oraz bezpośrednio zróżniczkowaną względem μ_j zależność (3.19) definiującą zmienną sprzężoną $\boldsymbol{\lambda}(t)$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial \mu_j} + \int_t^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(\tau)}{\partial \mu_j} \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau \\
& + \int_t^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(\tau)}{\partial \mu_j} \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
& + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
& = - \int_t^T \left[\int_0^\tau \mathbf{B}^x(\tau - \kappa) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\kappa)}{\partial \mu_j} d\kappa \right]^T \mathbf{B}^x(\tau - t) d\tau,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

gdzie uwzględniono (3.18), (3.2) i (3.11). W rezultacie, po przeniesieniu wszystkich członów na jedną stronę i scałkowaniu względem czasu t od 0 do T otrzymamy dla (3.13)

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(t) & \left[\frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_j} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_j} d\tau \right. \\
& + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_j} d\tau \\
& \left. + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{u}(t) \right] dt \tag{3.33}
\end{aligned}$$

oraz, dla (3.32),

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial \mu_j} + \int_t^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(\tau)}{\partial \mu_j} \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(\tau)}{\partial \mu_j} \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \right. \\
& + \int_t^T \left[\int_0^\tau \mathbf{B}^x(\tau - \kappa) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\kappa)}{\partial \mu_j} d\kappa \right]^T \mathbf{B}^x(\tau - t) d\tau \\
& \left. + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \right] \boldsymbol{\beta}_i(t) dt. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Powyższe równania są spełnione niezależnie od wartości przyjmowanych przez zmienne sprzężone $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$ i $\boldsymbol{\beta}_i(t)$, dzięki czemu możliwe jest dodanie ich stronami do drugiej pochodnej funkcji celu (3.23) bez wpływu na jej wartość:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = & \int_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial \mu_j} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) \right] dt \\
& + \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_j} d\tau \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_j} d\tau \right] dt \\
& + \int_0^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(t) \left[\frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_j} + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_j} d\tau \right. \\
& \quad \left. + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\tau)}{\partial \mu_j} d\tau + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{u}(t) \right] dt \\
& + \int_0^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial \mu_j} + \int_t^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(\tau)}{\partial \mu_j} \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau \right. \\
& \quad + \int_t^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(\tau)}{\partial \mu_j} \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
& \quad + \int_t^T \left(\int_0^\tau \mathbf{B}^x(\tau - \kappa) \frac{\partial \mathbf{p}^0(\kappa)}{\partial \mu_j} d\kappa \right)^T \mathbf{B}^x(\tau - t) d\tau \\
& \quad + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau \\
& \quad \left. + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \right] \boldsymbol{\beta}_i(t) dt. \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Zgodnie z ogólną metodologią metody zmiennej sprzężonej, celem dalszych przekształceń jest wyrugowanie z powyższego wyrażenia członów zawierających pochodne zmiennej sprzężonej $\partial \boldsymbol{\lambda}(t)/\partial \mu_j$ oraz pochodne pseudo obciążeń $\partial \mathbf{p}^0(t)/\partial \mu_j$, tak by uniknąć kosztownej numerycznie konieczności wielokrotnego rozwiązywania bezpośrednio zróżniczkowanej zależności (3.19) oraz równania całkowego (3.13). Po pogrupowaniu członów zawierających pochodne oraz ewentualnej zmianie kolejności całko-

wania, powyższe równanie można zapisać w równoważnej formie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \int_0^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(t) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{u}(t) \right] dt \\
&+ \int_0^T \left[\int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \right] \boldsymbol{\beta}_i(t) dt \\
&+ \int_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial \mu_j} \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\beta}_i(t) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \boldsymbol{\beta}_i(\tau) d\tau + \int_0^t \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(t - \tau) \boldsymbol{\beta}_i(\tau) d\tau \right] dt \\
&+ \int_0^T \left[\boldsymbol{\alpha}_i^T(t) + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau \right. \\
&\quad + \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
&\quad + \int_t^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(\tau) \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(\tau) \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
&\quad \left. + \int_t^T \int_0^\tau \boldsymbol{\beta}_i^T(\kappa) [\mathbf{B}^x(\tau - \kappa)]^T \mathbf{B}^x(\tau - t) d\kappa d\tau \right] \frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_j} dt. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Wartości zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$ i $\boldsymbol{\beta}_i(t)$ należy dobrać tak, by wyrażenia stojące przy pochodnych zmiennej sprzężonej $\boldsymbol{\lambda}(t)$ i pseudo obciążeń równe były zero. W wypadku zmiennej sprzężonej $\boldsymbol{\beta}_i(t)$ dzieje się tak, gdy spełniona jest następująca zależność:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_i(t) + \Delta \mathbf{M} \int_0^t \ddot{\mathbf{B}}_\delta(t - \tau) \boldsymbol{\beta}_i(\tau) d\tau + \Delta \mathbf{K} \int_0^t \mathbf{B}(t - \tau) \boldsymbol{\beta}_i(\tau) d\tau \\
= - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(t), \tag{3.37}
\end{aligned}$$

która jest formalnie identyczna z zależnością (3.13), co potwierdza, że $\boldsymbol{\beta}_i(t)$ rzeczywiście zależy od indeksu i oraz oznacza, że

$$\boldsymbol{\beta}_i(t) = \frac{\partial \mathbf{p}^0(t)}{\partial \mu_i}. \tag{3.38}$$

Ostatni człon (3.36) jest natomiast równy zero, gdy zmienna sprzężona $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$ spełnia następującą zależność:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_i^T(t) + \int_t^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(\tau) \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau + \int_t^T \boldsymbol{\alpha}_i^T(\tau) \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
= - \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(\tau - t) d\tau - \int_t^T \boldsymbol{\lambda}^T(\tau) \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{B}(\tau - t) d\tau \\
- \int_t^T \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\tau)}{\partial \mu_i} \right)^T \mathbf{B}^x(\tau - t) d\kappa d\tau, \tag{3.39}
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystano (3.11). Zauważmy, że celem zależności (3.39) jest eliminacja pochodnej pseudo obciążeń z (3.36). Jednakże pochodne pseudo obciążeń muszą być i tak obliczone, ponieważ są one równe zmiennej sprzężonej $\beta_i(t)$, zgodnie z (3.37) i (3.38), co poddaje w wątpliwość sens próby eliminacji pochodnej pseudo obciążeń za pomocą zmiennej sprzężonej $\alpha_i(t)$ oraz efektywność samej metody AVM-AVM. Próba natomiast eliminacji jedynie pochodnych zmiennej sprzężonej $\lambda(t)$, tzn. przyjęcie $\alpha_i(t) = 0$, prowadzi do sformułowania równoważnego metodzie DDM-AVM.

3.4.4 Metoda AVM-DDM

Zależnością wyjściową jest (3.23), czyli zróżniczkowane wyrażenie na pierwszą pochodną funkcji celu otrzymane metodą zmiennej sprzężonej (AVM). Wyrażenie to zawiera pierwsze pochodne zmiennej sprzężonej $\lambda(t)$ oraz, uwzględniając (3.25), również pierwsze pochodne pseudo obciążeń. Pochodne te, zgodnie z oznaczeniem metody, są obliczane metodą różniczkowania bezpośredniego, a zatem poprzez bezpośrednie rozwiązanie równań odpowiednio (3.32) i (3.13).

3.4.5 Koszt numeryczny

Wszystkie cztery przedstawione powyżej metody prowadzą do dokładnych, analitycznych postaci macierzy drugich pochodnych (hesjanu) funkcji celu. Zależności te są sobie równoważne, jednak mają istotnie różny koszt numeryczny. We wszystkich metodach głównym kosztem numerycznym jest koszt rozwiązania równań całkowych, w których niewiadomymi są odpowiednio:

- pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(t)$, co wymaga jednokrotnego rozwiązania równania całkowego (2.19b),
- zmienna sprzężona $\lambda(t)$, co wymaga jednokrotnego rozwiązania równania całkowego (3.19),
- zmienne sprzężone $\alpha_i(t)$, co wymaga N_μ -krotnego rozwiązania równania całkowego (3.39),
- pochodne pseudo obciążeń $\partial \mathbf{p}^0(t)/\partial \mu_i$ lub równe im zmienne sprzężone $\beta_i(t)$, co wymaga N_μ -krotnego rozwiązania równania całkowego (3.13) lub identycznego z nim równania całkowego (3.37),
- pierwsze pochodne zmiennej sprzężonej $\partial \lambda(t)/\partial \mu_i$, co wymaga N_μ -krotnego rozwiązania równania całkowego (3.32),
- drugie pochodne pseudo obciążeń $\partial^2 \mathbf{p}^0(t)/\partial \mu_i \mu_j$, co wymaga $\frac{1}{2}N_\mu(N_\mu + 1)$ -krotnego rozwiązania równania całkowego (3.26),

gdzie przez N_μ oznaczono liczbę nieznanymi parametrów definiujących uszkodzenie, to jest długość wektora $\boldsymbol{\mu}$. W szczególności analiza wrażliwości drugiego rzędu

Tabela 3.1: Całkowita liczba najbardziej kosztownych numerycznie operacji (rozwiązanie równania całkowego) w zależności od zastosowanej metody analizy wrażliwości. Przez N_μ oznaczono liczbę elementów wektora parametrów uszkodzenia $\boldsymbol{\mu}$

	metoda	liczba rozwiązań	złożoność
funkcja celu		1	$\mathcal{O}(1)$
gradient	DDM	$N_\mu + 1$	$\mathcal{O}(N_\mu)$
gradient	AVM	2	$\mathcal{O}(1)$
hesjan	DDM-DDM	$\frac{1}{2}(N_\mu + 1)(N_\mu + 2)$	$\mathcal{O}(N_\mu^2)$
hesjan	DDM-AVM	$N_\mu + 2$	$\mathcal{O}(N_\mu)$
hesjan	AVM-AVM	$2N_\mu + 2$	$\mathcal{O}(N_\mu)$
hesjan	AVM-DDM	$2N_\mu + 2$	$\mathcal{O}(N_\mu)$

- metodą DDM-DDM wymaga obliczenia pseudo obciążeń oraz ich pierwszych i drugich pochodnych, czyli sumarycznie $\frac{1}{2}(N_\mu + 1)(N_\mu + 2)$ rozwiązań równań całkowych,
- metodą DDM-AVM wymaga obliczenia pseudo obciążeń i ich pierwszych pochodnych oraz zmiennej sprzężonej $\boldsymbol{\lambda}(t)$, czyli sumarycznie $N_\mu + 2$ rozwiązań równań całkowych,
- metodą AVM-AVM wymaga obliczenia pseudo obciążeń i ich pierwszych pochodnych (lub równych im zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\beta}_i(t)$) oraz zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\lambda}(t)$ i $\boldsymbol{\alpha}_i(t)$, czyli sumarycznie $2N_\mu + 2$ rozwiązań równań całkowych,
- metodą AVM-DDM wymaga obliczenia pseudo obciążeń i ich pierwszych pochodnych oraz zmiennej sprzężonej $\boldsymbol{\lambda}(t)$ wraz z jej pierwszymi pochodnymi, czyli sumarycznie $2N_\mu + 2$ rozwiązań równań całkowych.

Powyższe dane przedstawiono w formie tabeli 3.1. Najefektywniejszą numerycznie metodą analizy wrażliwości drugiego rzędu jest metoda DDM-AVM. Należy również zauważyć, że w wypadku analizy metodami DDM-AVM i AVM-DDM konieczne jest obliczenie zarówno pierwszych pochodnych pseudo obciążeń, jak i zmiennej sprzężonej $\boldsymbol{\lambda}(t)$, co oznacza, że analizę wrażliwości pierwszego rzędu można przeprowadzić obiema metodami przedstawionymi w Części 3.3, to jest zgodnie z zależnościami (3.10) i (3.20), co może być przydatne w celu weryfikacji poprawności implementacji wykorzystywanych metod.

3.5 Dyskretyzacja w dziedzinie czasu

Zgodnie z dyskusją przedstawioną w Części 2.4, poprawne sformułowanie i analiza zadania z czasem ciągłym są istotne z teoretycznego i poznawczego punktu widzenia.

Wobec konieczności dyskretyzacji sygnałów czasowych czujników w procesie pomiarowym, w praktyce wykorzystywane jest jednak sformułowanie z czasem dyskretnym. W niniejszej części przedstawiona zostanie dyskretna wersja zadania identyfikacji oraz analizy wrażliwości. W ramach analizy wrażliwości drugiego rzędu omówione zostanie jedynie sformułowanie DDM-AVM (bezpośredniego różniczkowania – zmiennej sprzężonej), które, zgodnie z analizą przedstawioną w poprzednich częściach rozdziału, jest numerycznie najbardziej efektywne.

3.5.1 Funkcja celu

W sformułowaniu z czasem dyskretnym funkcja celu (3.1) przyjmuje następującą postać:

$$F(\boldsymbol{\mu}) := \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{d}. \quad (3.40)$$

Wektor \mathbf{d} jest zdyskretyzowaną wersją wektora $\mathbf{d}(t)$,

$$\mathbf{d} := \mathbf{x}^M - \mathbf{x}, \quad (3.41)$$

gdzie oraz wektory \mathbf{x}^M i \mathbf{x} zawierają wartości sygnałów czujników (odpowiednio zmierzone i modelowane dla danego wektora parametrów uszkodzenia $\boldsymbol{\mu}$), w odpowiedzi na rozważane wymuszenie testowe \mathbf{f} , zebrane dla wszystkich czujników i chwil czasowych. Podobnie jak w sformułowaniu z czasem ciągłym, identyfikacja uszkodzenia/modyfikacji polega na minimalizacji funkcji celu (3.40) względem wektora parametrów $\boldsymbol{\mu}$ w sposób jednoznaczny definiującego uszkodzenie/modyfikację.

3.5.2 Gradient

Podobnie jak w wypadku sformułowania z czasem ciągłym, gradient funkcji celu (3.40) można obliczyć za pomocą metody różniczkowania bezpośredniego (DDM) lub metody zmiennej sprzężonej (AVM). Efektywniejsza numerycznie (o rząd wielkości) jest metoda zmiennej sprzężonej, ponieważ nie wymaga obliczeń pochodnych zdyskretyzowanych czasowo wektorów pseudo obciążeń. Poniżej przedstawione są jednak obie metody, ponieważ dla przeprowadzenia analizy wrażliwości drugiego rzędu metodą DDM-AVM i tak konieczne jest ich obliczenie, co pozwala na wykorzystanie dwóch alternatywnych metod obliczenia gradientu funkcji celu.

Metoda różniczkowania bezpośredniego (DDM). Bezpośrednie zróżniczkowanie funkcji celu (3.40) względem i -tego parametru uszkodzenia μ_i , po uwzględnieniu (2.25b), prowadzi do równania

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = -\mathbf{d}^T \mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i}, \quad (3.42)$$

które jest wprost zależne od wektora $\partial \mathbf{p}^0 / \partial \mu_i$ pierwszych pochodnych pseudo obciążenia. Metoda bezpośredniego różniczkowania oblicza te pochodne poprzez N_μ -krotne

rozwiązanie zróżniczkowanej wersji równania (2.24),

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} = - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}, \quad (3.43)$$

gdzie uwzględniono definicję macierzy \mathbf{A} , patrz (2.22). Rozwiązanie powyższego równania jest najkosztowniejszą numerycznie operacją, a zatem koszt numeryczny obliczeń gradientu metodą DDM wynosi $\mathcal{O}(N_\mu)$. Zauważmy, że podczas obliczeń pochodnych względem kolejnych elementów wektora $\boldsymbol{\mu}$ zmienia się jedynie prawa strona równania (3.43), podczas gdy macierz układu \mathbf{A} pozostaje niezmienna. Jeśli rozmiary układu (3.43) są na tyle niewielkie, że umożliwiają zastosowanie metody bezpośredniego rozwiązania, prowadzi to do znacznego skrócenia czasu obliczeń: wymagany jest wówczas jednokrotny kosztowny numerycznie wstępny rozkład macierzy \mathbf{A} . Przy częstych w praktyce znacznych rozmiarach układu konieczne jest jednak zastosowanie metod iteracyjnych, przy których takie skrócenie czasu obliczeń nie jest możliwe.

Metoda zmiennej sprzężonej (AVM). Celem metody jest wyeliminowanie pochodnych pseudo obciążeń z wyrażenia (3.42) za pomocą dodatkowej zmiennej sprzężonej, co pozwala uniknąć konieczności wielokrotnego rozwiązywania układu (3.43). Podobnie jak w wypadku sformułowania z ciągłą zmienną czasową, zależność (3.43) mnożymy skalarnie przez dodatkową zmienną sprzężoną $\boldsymbol{\lambda}$ (wektor dyskretnych wartości), a wynikową zależność, po przeniesieniu wszystkich członów na jedną stronę,

$$0 = \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u} \right), \quad (3.44)$$

dodajemy stronami do zróżniczkowanej funkcji celu (3.42) i grupujemy człony zawierające pochodną pseudo obciążenia,

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u} \right) + (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} - \mathbf{d}^T \mathbf{D}^x) \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i}. \quad (3.45)$$

Wartość zmiennej sprzężonej można dobrać tak, by człon stojący przy pochodnych pseudo obciążenia stawał się równy zero. Wówczas

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i} = \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u} \right), \quad (3.46)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ dana jest w sposób niejawni w postaci rozwiązania następującego liniowego równania sprzężonego:

$$\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} = \mathbf{d}^T \mathbf{D}^x. \quad (3.47)$$

Zauważmy, że (3.47) nie zależy od zmiennej μ_i względem której zachodzi różniczkowanie, a zatem obliczenie gradientu metodą zmiennej sprzężonej wymaga jedynie dwukrotnego rozwiązania całkowego równania Volterry, co jest operacją najkosztowniejszą numerycznie: (2.24) w celu obliczenia pseudo obciążeń oraz (3.47) w celu obliczenia zmiennej sprzężonej.

3.5.3 Hesjan

Najefektywniejszą numerycznie metodą analizy wrażliwości drugiego rzędu jest metoda DDM-AVM. Punktem wyjścia jest dwukrotnie zróżniczkowane wprost wyrażenie (3.40) definiujące funkcję celu,

$$\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \left(\mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} \right)^T \mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} - \mathbf{d}^T \mathbf{D}^x \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i \partial \mu_j}. \quad (3.48)$$

Metoda bezpośredniego różniczkowania oblicza te pochodne poprzez wielokrotne rozwiązanie podwójnie zróżniczkowanej wersji równania (2.24),

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i}, \quad (3.49)$$

gdzie przyjęto założenie (3.24) o liniowej zależności zmian macierzy mas i sztywności od parametrów uszkodzenia. Takie podejście ma nieefektywną, kwadratową złożoność obliczeniową. Metoda DDM-AVM natomiast eliminuje drugie pochodne pseudo obciążeń z (3.48): równanie (3.49) mnożone jest skalarnie przez zmienną sprzężoną $\boldsymbol{\lambda}$, wszystkie człony są przenoszone na jedną stronę i wynikową zależność,

$$0 = \boldsymbol{\lambda}^T \left(\mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} \right), \quad (3.50)$$

dodaje się do (3.48). Pogrupowanie razem członów zawierających drugie pochodne pseudo obciążeń prowadzi do

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \left(\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A} - \mathbf{d}^T \mathbf{D}^x \right) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \left(\mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} \right)^T \mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Jeśli zmienna sprzężona $\boldsymbol{\lambda}$ spełnia równanie sprzężone (3.47), to człon przy drugich pochodnych pseudo obciążeń staje się równy zero i ostatecznie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \left(\mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} \right)^T \mathbf{D}^x \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \ddot{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \mu_i} \right), \end{aligned} \quad (3.52)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest rozwiązaniem (3.47) a pierwsze pochodne pseudo obciążeń otrzymuje się przez N_μ -krotne rozwiązanie (3.43). Koszt obliczenia hesjanu funkcji celu wynosi zatem $\mathcal{O}(N_\mu)$, podobnie jak w wypadku sformułowania z czasem ciągłym.

Rozdział 4

Sformułowanie w dziedzinie Laplace’a

W poprzednich rozdziałach przedstawiono sformułowania problemu wprost i odwrotnego w dziedzinie czasu wykorzystujące metodę nieparametrycznego modelowania czasowego przebiegu odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej. Pomimo efektywnych technik numerycznych przedstawionych w Rozdziale 5, analiza w dziedzinie czasu jest kosztowna numerycznie i czasochłonna¹. Związane jest to znacznymi numerycznymi kosztami rozwiązania równania całkowego (2.19b), które po dyskretyzacji zmiennej czasowej przyjmuje formę dużego układu równań liniowych (2.24). Rozwiązanie takiego układu jest czasochłonne z powodu jego znacznych rozmiarów², gęstości macierzy układu i jej blokowej struktury, w której każdy blok ma postać dolnej trójkątnej macierzy typu Toeplitza, patrz rys. 6-7. Takie własności i struktura macierzy układu wynika z faktu, że pierwotne równanie całkowe jest równaniem macierzowym typu Volterry, a zadanie jego rozwiązania sprowadza się w istocie do zadania rozwikłania szeregu splotów, co jest zadaniem ze swojej istoty źle uwarunkowanym numerycznie [129, 131].

Przeprowadzenie procesu rozwiązania problemu wprost w dziedzinie czasu jest konieczne, jeśli celem analizy jest otrzymanie wiarygodnej postaci przebiegu czasowego modelowanej odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej lub uszkodzonej: zastosowany iteracyjny algorytm regularyzujący (CGLS) pozwala na precyzyjną kontrolę stopnia regularyzacji rozwiązania. Jeśli jednak celem obliczeń jest uzyskanie jedynie pewnych cech odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej w dziedzinie częstości, obliczenia można wielokrotnie przyspieszyć (2 do 3 rzędów wielkości razy) poprzez rozwiązanie układu (2.24) w dziedzinie częstości [135]. Należy jednak zauważyć, że rozwiązanie uzyskane w dziedzinie częstości będzie wiarygodne jedynie w pewnych zakresach częstości. Ponadto regularyzacja numeryczna w dziedzinie częstości nie jest równoważna regularyzacji numerycznej w dziedzinie czasu, a więc odtworzenie na podstawie takie-

¹W wypadku modyfikacji dwóch mas węzłowych konstrukcji rozważanej w eksperymentalnej części niniejszych badań, problem wprost jest rozwiązywany na komputerze klasy PC w czasie ok. 2 minut, a problem odwrotny w czasie ok. 1 godziny.

²Przykładowa macierz rozważana w przykładzie eksperymentalnym w Rozdziale 6 (modyfikacja dwóch mas węzłowych, ok. 15 000 tys. kroków czasowych) ma wymiary ok. 90 000 × 90 000.

go rozwiązania wiarygodnych postaci czasowych przebiegów odpowiedzi konstrukcji (tzn. powrót z dziedziny częstości w dziedzinę czasu) jest zadaniem nietrywialnym, którego z reguły nie można przeprowadzić poprzez bezpośrednie wykorzystanie standardowych technik szybkiej odwrotnej transformacji Fouriera.

W związku z dyskretnym charakterem danych eksperymentalnych oraz ograniczonym czasem pomiarów, analiza w dziedzinie częstości wymaga zastosowania wykładniczego okna czasowego do danych pomiarowych przed wykonaniem szybkiej transformacji Fouriera (FFT). W praktyce spektrum odpowiedzi obliczone w dziedzinie częstości (jak również jego wiarygodność związana z numerycznym uwarunkowaniem zadania sformułowanego dla danej częstości) może wykazywać znaczną wrażliwość względem przyjętego współczynnika zanikania wykładniczego okna czasowego. Jednoczesna analiza przy wykorzystaniu całego szeregu różnych współczynników zanikania, poprzez efektywne uśrednienie wyników, pozwala na istotne uniezależnienie ich dokładności od szczególnej wartości przyjętego współczynnika. Taka analiza jest w praktyce równoważna analizie w dziedzinie Laplace'a, której jest poświęcony niniejszy rozdział.

4.1 Transformacja Laplace'a

Sformułowanie przedstawione w tym rozdziale wykorzystuje transformację Laplace'a \mathcal{L} , która jest jedną z transformacji całkowych [136]. Standardowo definiuje się ją w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= f(s), \end{aligned} \tag{4.1}$$

gdzie s jest zmienną zespoloną,

$$s = \eta + i\omega \in \mathbb{C}, \tag{4.2a}$$

oraz

$$\begin{aligned} \eta &= \operatorname{Re} s \in \mathbb{R}, \\ \omega &= \operatorname{Im} s \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.2b}$$

są odpowiednio rzeczywistymi i urojonymi częściami zespolonej liczby s . W związku ze znanym faktem jednoznaczności³ odwrotnej transformacji Laplace w wypadku funkcji odcinkami ciągłych i wykładniczo ograniczonych (twierdzenie Lercha [136]), w niniejszym rozdziale funkcje i ich transformaty Laplace'a dla uproszczenia notacji są oznaczane tymi samymi symbolami i różnią się jedynie argumentami. A zatem, tam gdzie nie będzie to prowadziło do nieporozumień, transformata funkcji $f(t)$, w miejsce $(\mathcal{L}f)(s)$, będzie po prostu oznaczana $f(s)$, podobnie jak w (4.1).

³Z dokładnością do zbioru miary zero, czyli w praktyce z dokładnością do wartości funkcji w pojedynczych izolowanych punktach.

Z punktu widzenia efektywności obliczeniowej, podstawową zaletą transformacji Laplace'a, podobnie jak transformacji Fouriera, jest fakt, że operacja splotu w dziedzinie czasu odpowiada w dziedzinie Laplace'a operacji mnożenia. Innymi słowy transformata splotu jest iloczynem transformat, czyli

$$(\mathcal{L}(f \star g))(s) = (\mathcal{L}f)(s) (\mathcal{L}g)(s), \quad (4.3)$$

gdzie $f \star g$ oznacza splot funkcji f i g ,

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

oraz $f(t)$ i $g(t)$ są dowolnymi funkcjami odcinkami ciągłymi i wykładniczo ograniczonymi określonymi dla $t \geq 0$.

4.2 Problem wprost

4.2.1 Równania ruchu

Transformacja Laplace'a (4.1) przekształca sformułowane w dziedzinie czasu równania ruchu konstrukcji oryginalnej (2.14) i zmodyfikowanej (2.15) w następujące ich odpowiedniki:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L(s) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^L(s) + \mathbf{K}\mathbf{u}^L(s) = \mathbf{f}(s), \quad (4.5)$$

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(s) + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{u}(s) = \mathbf{f}(s), \quad (4.6)$$

gdzie modyfikacje/uszkodzenia konstrukcji są kwantyfikowane poprzez zmiany macierzy mas $\Delta\mathbf{M}$ i sztywności $\Delta\mathbf{K}$, człon $\mathbf{f}(s)$ jest transformatą Laplace'a wymuszenia testowego $\mathbf{f}(t)$, a $\mathbf{u}^L(s)$ i $\mathbf{u}(s)$ są transformatami Laplace'a odpowiednio odpowiedzi konstrukcji oryginalnej i zmodyfikowanej, $\mathbf{u}^L(t)$ i $\mathbf{u}(t)$.

4.2.2 Pseudo obciążenie

Przeniesienie w zależności (4.6) członów odpowiadających modyfikacji na prawą stronę równania prowadzi do następującej zależności, która jest odpowiednikiem sformułowanego w dziedzinie czasu równania ruchu konstrukcji oryginalnej (2.16) z modyfikacjami modelowanymi pseudo obciążeniem $\mathbf{p}^0(s)$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{K}\mathbf{u}(s) = \mathbf{f}(s) + \mathbf{p}^0(s). \quad (4.7)$$

Porównanie (4.6) i (4.7) prowadzi do następującego odpowiednika (2.17), w sposób uwikłany wyrażającego pseudo obciążenia $\mathbf{p}^0(s)$ równoważne modyfikacjom masy i sztywności $\Delta\mathbf{M}$ i $\Delta\mathbf{K}$:

$$\mathbf{p}^0(s) = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(s) - \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}(s). \quad (4.8)$$

Zgodnie z zależnością (4.3), operacji splotu w dziedzinie czasu w dziedzinie Laplace'a odpowiada operacja mnożenia. A zatem, w związku z (2.18) i (2.12), odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej w dziedzinie Laplace'a wyraża się w następujący sposób:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}^L(s) + \mathbf{B}(s)\mathbf{p}^0(s), \quad (4.9a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(s) = \ddot{\mathbf{u}}^L(s) + \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s)\mathbf{p}^0(s), \quad (4.9b)$$

gdzie $\mathbf{u}(s)$ i $\ddot{\mathbf{u}}(s)$ oraz $\mathbf{u}^L(s)$ i $\ddot{\mathbf{u}}^L(s)$ są przemieszczeniową i przyspieszeniową odpowiedź konstrukcji odpowiednio zmodyfikowanej oraz oryginalnej w dziedzinie Laplace'a, $\mathbf{B}(s)$ i $\ddot{\mathbf{B}}_\delta(s)$ są impulsowymi funkcjami odpowiedzi w dziedzinie Laplace'a, a $\mathbf{p}^0(s)$ jest pseudo obciążeniem równoważnym rozważanym modyfikacjom. Podstawienie zależności (4.9) do (4.8) prowadzi do następującego odpowiednika całkowego równania (2.19b):

$$\left[\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta\mathbf{K}\mathbf{B}(s) \right] \mathbf{p}^0(s) = -\Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^L(s) - \Delta\mathbf{K}\mathbf{u}^L(s). \quad (4.10)$$

Należy zauważyć, że (4.10) jest zwykłym dyskretnym układem równań liniowych, który należy rozwiązać oddzielnie dla każdej rozważanej wartości zmiennej zespolonej s ; rozwiązania dla danego s są niezależne od postaci równania i jego rozwiązań dla innych wartości zmiennej s . Jest to istotna zaleta sformułowania w dziedzinie Laplace'a: równanie (2.19b) należy rozwiązać jedynie jednokrotnie, ale ma ono formę równania całkowego, którego bezpośrednie rozwiązanie w dziedzinie czasu jest bardzo czasochłonne.

4.2.3 Odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej

Pseudo obciążenie $\mathbf{p}^0(s)$ modelujące rozważane modyfikacje sztywności $\Delta\mathbf{K}$ i masy $\Delta\mathbf{M}$ konstrukcji znajduje się poprzez rozwiązanie (4.10) dla każdej istotnej wartości zmiennej s . Odpowiednią odpowiedź konstrukcji można znaleźć wykorzystując następujący odpowiednik zależności (2.20):

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}^L(s) + \mathbf{B}^x(s)\mathbf{p}^0(s), \quad (4.11)$$

którego człony są transformatami Laplace'a odpowiednich członów (2.20).

4.2.4 Obszar wiarygodności

W teorii, obszar absolutnej zbieżności transformacji Laplace'a ma postać $\text{Re } s > \eta_{\min}$ lub $\text{Re } s \geq \eta_{\min}$, patrz (4.2). W praktyce jednak funkcja podcałkowa $f(t)$ dana jest jedynie dyskretnie, w postaci szeregu jej wartości spróbkowanych w skończonej długości odcinku czasowym $[0, T]$, a wartość jej transformaty Laplace'a można wiarygodnie obliczyć jedynie w pewnym ograniczonym podzbiore teoretycznego obszaru absolutnej zbieżności. Wiarygodność numerycznie obliczonej wartości transformaty zależy od szeregu czynników, w tym od:

- Uwarunkowania numerycznego równania (4.10): wiarygodną wartość wektora pseudo obciążeń można uzyskać jedynie jeśli współczynnik numerycznego uwarunkowania układu (4.10) nie jest zbyt duży.
- Wiarygodności nieparametrycznego modelu konstrukcji dla rozważanej częstotliwości $\omega = \text{Im } s$: wiarygodne obliczenia są możliwe jedynie jeśli eksperymentalne wymuszenia quasi impulsowe (wykorzystane w celu pomiarów eksperymentalnych macierzy wpływu $\mathbf{B}(t)$ i $\ddot{\mathbf{B}}_\delta(t)$, patrz Część 2.5) zawierają istotną część energii w pobliżu linii spektralnej ω .
- Długości T czasu pomiarów: w praktyce czas pomiarów jest skończony, co jest przyczyną efektu rozmycia widmowego. Współczynnik $\eta = \text{Re } s$ zanikania okna wykładniczego powinien być więc dodatni i dostatecznie duży, by zminimalizować rozmycie widmowe, a jednocześnie nie na tyle duży, by uniemożliwić analizę sygnału w całej długości okna czasowego.
- Częstotliwości próbkowania: rzeczywisty sygnał pomiarowy jest dyskretny i częstotliwość jego próbkowania ogranicza zakres częstotliwości $\omega = \text{Im } s$, dla którego można przeprowadzić wiarygodne obliczenia.

4.3 Problem odwrotny

Problem odwrotny w dziedzinie Laplace’a jest metodologicznie sformułowany w sposób analogiczny do sformułowania problemu odwrotnego w dziedzinie czasu, patrz Rozdział 3: jako zadanie minimalizacji (względem parametrów modyfikacji) pewnej miary rozbieżności pomiędzy eksperymentalnie zmierzoną odpowiedzią konstrukcji zmodyfikowanej a jej modelowaną odpowiedzią na pewne wymuszenie testowe. Jednak, z powodów wymienionych we wstępie do niniejszego rozdziału i związanych z numerycznym złym uwarunkowaniem zadania i regularyzacją numeryczną rozwiązania w obu dziedzinach, rozwiązanie otrzymane w dziedzinie Laplace’a zwykle nie może posłużyć do obliczenia wiarygodnego czasowego przebiegu odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej. Oznacza to, że problem identyfikacji modyfikacji w dziedzinie Laplace’a musi wykorzystywać inną postać funkcji celu niż (3.1). Odpowiednio zmodyfikowana musi być również analiza wrażliwości.

4.3.1 Funkcja celu

Funkcja celu (3.1) w sformułowaniu w dziedzinie czasu jest średniokwadratową miarą (normą ℓ^2) rozbieżności pomiędzy zmierzonymi i modelowanymi przebiegami czasowymi odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej na wymuszenie testowe \mathbf{f} . Funkcja celu zaproponowana w niniejszym rozdziale mierzy rozbieżność pomiędzy transformatami Laplace’a tych odpowiedzi za pomocą ważonej normy ℓ^2 ,

$$F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f}) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \mathbf{d}^H(s) \mathbf{d}(s) d\eta d\omega, \quad (4.12a)$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}$ jest wektorem parametrów kwantyfikujących modyfikację, η i ω są odpowiednio rzeczywistymi i urojonymi częściami liczby s , patrz (4.2), indeks górny H oznacza sprzężenie hermitowskie macierzy lub wektorów (transpozycję sprzężenia), $\mathbf{d}(s)$ jest różnicą porównywanych odpowiedzi na wymuszenie testowe $\mathbf{f}(s)$,

$$\mathbf{d}(s) := \mathbf{x}^M(s) - \mathbf{x}(s), \quad (4.12b)$$

a $w^2(\omega)$ jest rzeczywistą, nieujemną funkcją wagową, różną od zera jedynie w obszarze wiarygodności odpowiedzi, który należy wyznaczyć w oparciu o kryteria wymienione powyżej w Części 4.2.4.

W celu ułatwienia analizy porównawczej wielu funkcji celu odpowiadających różnym modyfikacjom, pomocna może być normalizacja funkcji celu poprzez podzielenie jej przez kwadrat ważonej normy transformaty zmierzonej odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej. W takim wypadku, podobnie jak w (3.4),

$$F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f}) := \frac{1}{2} \frac{\iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \mathbf{d}^H(s) \mathbf{d}(s) d\eta d\omega}{\iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) [\mathbf{x}^M(s)]^H \mathbf{x}^M(s) d\eta d\omega}. \quad (4.13)$$

4.3.2 Gradient funkcji celu

Bezpośrednie różniczkowanie funkcji celu (4.12a) względem i -tego parametru modyfikacji μ_i prowadzi do

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})}{\partial \mu_i} = - \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \mathbf{d}^H(s) \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} d\eta d\omega, \quad (4.14)$$

gdzie $\partial \mathbf{x}(s) / \partial \mu_i$ jest odpowiednią pochodną odpowiedzi czujników, którą poprzez bezpośrednie różniczkowanie (4.11) można wyrazić w terminach analogicznej pochodnej pseudo obciążenia,

$$\frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} = \mathbf{B}^x(s) \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i}. \quad (4.15)$$

Metoda bezpośredniego różniczkowania. Metoda ta oblicza pochodną pseudo obciążenia występująca w (4.15) poprzez rozwiązanie analogicznie zróżniczkowanego równania (4.10),

$$\left[\mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(s) \right] \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i} = - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(s) - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(s), \quad (4.16)$$

gdzie wykorzystane zostały zależności (4.9). Należy zauważyć, że (4.16) stanowi inny układ równań liniowych dla każdej odrębnej zmiennej różniczkowania μ_i , a więc musi być rozwiązane tyle razy, ile jest nieznanymi parametrów modyfikacji. Po rozwiązaniu (4.16), wynikowe pochodne pseudo obciążenia podstawia się w (4.15) w celu obliczenia odpowiedniej pochodnej sygnału czujników, którą należy następnie wykorzystać w (4.14), aby ostatecznie obliczyć pochodną funkcji celu.

Metoda zmiennej sprzężonej. W odróżnieniu od metody bezpośredniego różniczkowania, metoda zmiennej sprzężonej nie wymaga wielokrotnego rozwiązywania równania (4.16), lecz przenosi wszystkie jego człony na jedną stronę i skalarnie mnoży wynik (z wagą $w^2(\omega)$) przez wektor zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\lambda}(s)$,

$$0 = \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\lambda}^H(s) \left[\mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(s) \right] \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(s) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(s) \right] d\eta d\omega, \quad (4.17)$$

oraz, w podobny sposób, wszystkie człony (4.15) przenosi się na jedną stronę i całość skalarnie mnoży (z tą samą wagą $w^2(\omega)$) przez wektor zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\gamma}(s)$,

$$0 = \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\gamma}^H(s) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} - \mathbf{B}^x(s) \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i} \right] d\eta d\omega. \quad (4.18)$$

Po lewych stronach obu powyższych równań stoi zero. Oba równania można dodać stronami do (4.14), co prowadzi do

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})}{\partial \mu_i} = & - \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \mathbf{d}^H(s) \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} d\eta d\omega \\ & + \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\gamma}^H(s) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} - \mathbf{B}^x(s) \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i} \right] d\eta d\omega \\ & + \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\lambda}^H(s) \left[\mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(s) \right] \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i} \\ & + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(s) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(s) \right] d\eta d\omega. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Człony zawierające pochodną sygnału czujników oraz pochodną pseudo obciążenia należy zgrupować razem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})}{\partial \mu_i} = & \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) [\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{d}(s)]^H \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} d\eta d\omega \\ & + \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \left[\boldsymbol{\lambda}^H(s) \left[\mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(s) \right] \right. \\ & \left. - \boldsymbol{\gamma}^H(s) \mathbf{B}^x(s) \right] \frac{\partial \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i} d\eta d\omega \\ & + \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\lambda}^H(s) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(s) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(s) \right] d\eta d\omega. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Z powyższej zależności zostaną całkowicie wyeliminowane pochodne sygnałów czuj-

ników i pseudo obciążeń, jeśli wektory zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\gamma}(s)$ i $\boldsymbol{\lambda}(s)$ przyjmą takie wartości, że człony podcałkowe dwóch pierwszych całek będą równe zero. Ma to miejsce wtedy, gdy

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \mathbf{d}(s) \quad (4.21a)$$

oraz gdy $\boldsymbol{\lambda}(s)$ jest rozwiązaniem równania

$$\boldsymbol{\lambda}^H(s) [\mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(s)] = \mathbf{d}^H(s) \mathbf{B}^x(s), \quad (4.21b)$$

które nazywane jest równaniem sprzężonym i jest odpowiednikiem równania sprzężonego (3.47) sformułowanego w dziedzinie czasu. Przy takich wartościach zmiennych sprzężonych, pochodna funkcji celu względem i -tego parametru modyfikacji jest dana prostą zależnością:

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})}{\partial \mu_i} = \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\lambda}^H(s) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \ddot{\mathbf{u}}(s) + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \mathbf{u}(s) \right] d\eta d\omega, \quad (4.22)$$

gdzie wektor zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\lambda}(s)$ jest rozwiązaniem równania (4.21b).

Podobnie jak w wypadku sformułowania w dziedzinie czasu, należy zauważyć, że równanie (4.21b) nie zależy od indeksu i , co oznacza, że należy je rozwiązać jedynie raz (dla każdej wartości zmiennej s). W porównaniu do obliczeń metodą bezpośredniego różniczkowania, która dla każdej wartości zmiennej s wymaga wielokrotnego rozwiązania równania (4.16), pozwala to na istotne skrócenie czasu obliczeń gradientu funkcji celu.

4.3.3 Hesjan funkcji celu

Podobnie jak w wypadku analizy wrażliwości drugiego rzędu w dziedzinie czasu, przedstawionej w Części 3.4.2, hesjan funkcji celu można obliczyć za pomocą jednej z czterech metod będących kombinacjami metody bezpośredniego różniczkowania i metody zmiennej sprzężonej. Obliczeniowo najefektywniejszą z nich jest metoda DDM-AVM (bezpośredniego różniczkowania – zmiennej sprzężonej) i jedynie ona zostanie przedstawiona w niniejszym rozdziale.

Podobnie jak w wypadku analizy wrażliwości pierwszego rzędu, podwójne różniczkowanie funkcji celu (4.12a) względem i -tego i j -tego parametru modyfikacji μ_i i μ_j prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = & \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} \right]^H \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_j} d\eta d\omega \\ & - \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \mathbf{d}^H(s) \frac{\partial^2 \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} d\eta d\omega, \quad (4.23) \end{aligned}$$

gdzie $\partial^2 \mathbf{x}(s) / \partial \mu_i \partial \mu_j$ jest odpowiednią drugą pochodną odpowiedzi czujników, którą poprzez bezpośrednie podwójne różniczkowanie (4.11) można wyrazić w kategoriach

analogicznej drugiej pochodnej pseudo obciążenia,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \mathbf{B}^x(s) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i \partial \mu_j}. \quad (4.24)$$

Druga pochodna pseudo obciążenia jest rozwiązaniem podwójnie zróżniczkowanego równania (4.10),

$$\begin{aligned} & [\mathbf{I} + \Delta \mathbf{M} \ddot{\mathbf{B}}_\delta(s) + \Delta \mathbf{K} \mathbf{B}(s)] \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0(s)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \\ &= -\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(s)}{\partial \mu_j} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(s)}{\partial \mu_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(s)}{\partial \mu_j} - \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(s)}{\partial \mu_i}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

gdzie założono, że rozważane modyfikacje $\Delta \mathbf{M}$ i $\Delta \mathbf{K}$ zależą liniowo od parametrów modyfikacji, to jest

$$\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \mathbf{0}. \quad (4.26)$$

Metoda DDM-AVM ruguje drugą pochodną pseudo obciążenia z zależności (4.24) za pomocą takiej samej techniki, jak w wypadku pierwszej pochodnej oraz metody zmiennej sprzężonej, analogicznej do techniki przedstawionej w Części 3.4.2: powyższe równanie jest przemnożone skalarnie (z wagą $w^2(\omega)$) przez wektor zmiennych sprzężonych i dodane stronami do (4.23) w celu uzyskania zależności analogicznej do (4.19). Następnie człony zawierające drugą pochodną pseudo obciążenia są grupowane razem, uwzględniając (4.24), i wynikowy człon jest ostatecznie rugowany poprzez odpowiedni dobór zmiennej sprzężonej, która powinna spełniać równanie sprzężone (4.21b). Zależność na drugą pochodną funkcji celu przyjmuje ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})}{\partial \mu_i \partial \mu_j} &= \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_i} \right]^H \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mu_j} d\eta d\omega \\ &+ \iint_{\mathbb{R}^2} w^2(\omega) \boldsymbol{\lambda}^H(s) \left[\frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(s)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(s)}{\partial \mu_i} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mathbf{u}(s)}{\partial \mu_j} + \frac{\partial \Delta \mathbf{K}}{\partial \mu_j} \frac{\partial \mathbf{u}(s)}{\partial \mu_i} \right] d\eta d\omega, \end{aligned} \quad (4.27)$$

gdzie wektor zmiennych sprzężonych $\boldsymbol{\lambda}(s)$ jest rozwiązaniem równania sprzężonego (4.21b).

Podobnie jak w wypadku analizy wrażliwości drugiego rzędu metodą DDM-AVM sformułowanej w dziedzinie czasu (patrz Część 3.4.2), przedstawiona tutaj wersja metody ma liniową czasową złożoność obliczeniową, ponieważ wymaga tylukrotnego rozwiązania zróżniczkowanego równania sprzężonego (4.21b), ile jest identyfikowanych parametrów modyfikacji.

Należy ponadto zauważyć, że w wyniku rozwiązania równania sprzężonego znane są pochodne pseudo obciążeń względem parametrów modyfikacji, co pozwala na obli-

czeniu gradientu funkcji celu również za pomocą zależności (4.14) i (4.15), niezależnie od obliczeń metodą zmiennej sprzężonej i zależności (4.22). Umożliwia to porównanie numerycznych wartości gradientu i weryfikację poprawności obliczeń.

4.3.4 Dyskretyzacja

W praktycznych zastosowaniach, całkową postać funkcji celu (4.12a) oraz pozostałych istotnych wyrażeń wykorzystywanych w celu analizy wrażliwości, takich jak (4.13), (4.14), (4.22) i (4.27), należy zastąpić postacią wykorzystującą sumowanie względem dyskretnych wartości zmiennej Laplace'a s . W niniejszej pracy wykorzystano regularną prostokątną siatkę punktów, co prowadzi do następującej zdyskretyzowanej postaci funkcji celu:

$$F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f}) = \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \mathbf{L}_\omega} \sum_{\eta \in \mathbf{L}_\eta} \|\mathbf{x}^M(s) - \mathbf{x}(s)\|^2 d\eta d\omega, \quad (4.28)$$

gdzie $s = \eta + i\omega$, zgodnie z (4.2), oraz zbiory

$$\mathbf{L}_\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N_\omega}\}, \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{L}_\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{N_\eta}\} \quad (4.29b)$$

pokrywają obszar wiarygodności wyznaczony w oparciu o kryteria wymienione powyżej w Części 4.2.4. Pozostałe wyrażenia całkowe należy zdyskretyzować w analogiczny sposób.

4.4 Optymalne wymuszenie testowe

Przy wykorzystaniu definicji (4.12b), funkcję celu (4.12a) można przedstawić w następującej równoważnej postaci:

$$F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f}) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} |w(\omega)\mathbf{x}^M(s) - w(\omega)\mathbf{x}(s)|^2 d\eta d\omega. \quad (4.30)$$

Ponieważ $\mathbf{x}^M(s)$ oraz $\mathbf{x}(s)$ są odpowiedziami konstrukcji na to samo wymuszenie testowe $\mathbf{f}(s)$, modyfikacja funkcji wagowej $w(\omega)$ jest równoważna modyfikacji amplitudy spektrum wymuszenia testowego, czyli

$$F(\boldsymbol{\mu}|w(\omega), \mathbf{f}(s)) = F(\boldsymbol{\mu}|1, w(\omega)\mathbf{f}(s)), \quad (4.31)$$

gdzie, zgodnie z (4.2), $s = \eta + i\omega$.

Przy przyjęciu odpowiedniego kryterium dokładności identyfikacji, optymalizacja funkcji wagowej jest więc równoważna optymalizacji wymuszenia testowego, a dokładniej optymalizacji jego widma amplitudowego. Tego typu podejście można wykorzystać w celu projektowania wymuszeń testowych o optymalnych widmach amplitudowych. Niech S oznacza zbiór przypadków identyfikacji, a $\boldsymbol{\mu}_i^*$, $i \in S$, odpowiadające im faktyczne wektory parametrów uszkodzenia. Jako typowe kryterium dokładności

identyfikacji można przyjąć kryterium kwantyfikujące średniokwadratową dokładność identyfikacji za pomocą następującej miary:

$$R(w|S) := \sum_{i \in S} (\boldsymbol{\mu}_i^* - \boldsymbol{\mu}_i(w))^2, \quad (4.32)$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\mu}_i(w)$ oznacza wynik identyfikacji uszkodzenia w i -tym wypadku otrzymany przy wykorzystaniu funkcji wagowej w , to jest drogą minimalizacji funkcji celu $F(\boldsymbol{\mu}|w, \mathbf{f})$.

Optymalne wymuszenie testowe można znaleźć przy wykorzystaniu procedury wzorowanej na procesie nadzorowanego uczenia sztucznych sieci neuronowych [137, 138]. W zależności od ilości danych, to jest liczby niezależnych przypadków identyfikacji, ich zbiór S można podzielić na dwa lub trzy rozłączne zbiory:

- zbiór trenujący S_R ,
- zbiór testowy S_T
- i ewentualnie zbiór walidujący S_V .

Optymalne widmo amplitudowe wymuszenia testowego można wtedy zidentyfikować w procesie minimalizacji miary dokładności identyfikacji $R(w|S_R)$ względem funkcji wagowej w , a następnie zweryfikować wynik za pomocą zbioru testowego, to jest poprzez porównanie z $R(w|S_T)$. Jeśli określony jest zbiór walidujący, należy go wykorzystać w kryterium stopu podczas procesu minimalizacji $R(w|S_R)$, która powinna być kontynuowana tak długo, jak długo $R(w|S_V)$ maleje.

Rozdział 5

Techniki numeryczne

Literatura naukowa bogata jest w publikacje oraz podręczniki szczegółowo opisujące zagadnienia poruszone w niniejszym rozdziale, dotyczące m.in. teorii liniowych równań całkowych, metod ich dyskretyzacji i rozwiązywania oraz metod regularyzacji numerycznej stosowanych podczas rozwiązywania zadań odwrotnych, które często są inherentnie źle uwarunkowane. Z tego powodu w niniejszym rozdziale omówiono jedynie wybrane zagadnienia, istotne z punktu widzenia autora, których znajomość jest niezbędna dla rozwiązania zależności przedstawionych w poprzednich rozdziałach oraz analizy danych eksperymentalnych.

5.1 Liniowe równania całkowe

Jednym z pierwszych równań całkowych, które trwale zapisało się w historii matematyki, było równanie sformułowane przez norweskiego matematyka Nielsa Henrika Abela w 1825 r., opisujące krzywą będącą rozwiązaniem tzw. problemu tautochrony. Natomiast sam termin “równanie całkowe” został wprowadzony w 1888 r. przez niemieckiego matematyka Paula du Bois-Reymonda. Obecnie liniowe równania całkowe są szeroko stosowane w różnych dziedzinach nauki, m.in. w przetwarzaniu sygnałów i obrazów, i są one tym bardziej istotne, że wiele ważnych zagadnień brzegowych lub początkowych może być przekształconych do równoważnej postaci równań całkowych (np. równanie przewodnictwa ciepła). Niewątpliwie jednymi z najbardziej znanych i najszerzej stosowanych równań całkowych są transformacje Fouriera.

5.1.1 Klasyfikacja liniowych równań całkowych

Ogólną postać liniowych równań całkowych, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju, można przedstawić w następujący sposób:

$$f(t) = \lambda \int_A^B K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau, \quad (5.1a)$$

$$f(t) = \phi(t) + \lambda \int_A^B K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau, \quad (5.1b)$$

gdzie znana funkcja dwóch zmiennych $K(t, \tau)$ jest nazywana jądrem równania całkowego, λ jest pewną stałą, która zazwyczaj posiada interpretację fizyczną, $f(t)$ jest znaną funkcją jednej zmiennej, a $\phi(t)$ jest niewiadomą funkcją jednej zmiennej.

Formalna klasyfikacja równań całkowych opiera się na kilku cechach równania:

- Rząd równania całkowego zależy od miejsca wystąpienia nieznannej funkcji $\phi(t)$. Jeżeli funkcja ta w równaniu występuje tylko i wyłącznie jako funkcja podcałkowa, to takie równanie klasyfikowane jest jako *równanie pierwszego rzędu*. W przypadku gdy funkcja $\phi(t)$ w równaniu całkowym pojawia się zarówno pod znakiem całki, jak i poza nią, to takie równanie jest nazywane *równaniem drugiego rzędu*. Alternatywnie zamiast o rzędzie równania można mówić o jego rodzaju.
- Klasa równania jest uzależniona od granic całkowania. Jeżeli granice A i B w równaniu są stałe, to takie równanie zaliczamy do równań całkowych *klasy Fredholma*. Natomiast gdy co najmniej jedna granica całki jest wyrażona poprzez zmienną t (najczęściej A jest stałą oraz $B = t$), to takie równanie zaliczamy do klasy *równań Volterry*.
- Kolejna charakterystyczna cecha równania wiąże się z wystąpieniem w równaniu całkowym dowolnej funkcji $f(t)$: jeżeli $f(t) = 0$, to takie równanie nazywamy *równaniem jednorodnym*, w przeciwnym przypadku równanie jest *niejednorodne*.

Jedną z ważniejszych cech równań całkowych pierwszego rzędu (5.1a) o ciągłych jądrach są ich właściwości wygładzające: im wyższa jest składowa harmoniczna funkcji $\phi(t)$, tym bardziej jest ona tłumiona i tym gładzsza jest funkcja $f(t)$. Cechę tę można zilustrować za pomocą znanego twierdzenia Riemanna–Lebesgue’a: załóżmy dla przykładu, że dane jest niejednorodne równanie całkowe pierwszego rzędu klasy Volterry, w którym funkcja $\phi(t)$ jest znana i równa:

$$\phi(t) = \sin 2\pi kt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Zgodnie z twierdzeniem Riemanna–Lebesgue’a [139], dla dowolnego ciągłego jądra $K(t, \tau)$ równania całkowego zachodzi następująca zależność:

$$f(t) = \lambda \int_A^B K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{dla } k \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Cecha ta jest odpowiedzialna za inherentne złe uwarunkowanie zadań odwrotnych, to jest takich zadań w których poszukiwana jest funkcja podcałkowa $\phi(t)$, a pozostałe funkcje są dane. W wypadku takich zadań występuje efekt wzmocnienia wyższych składowych harmonicznych funkcji $f(t)$. Wzmocnienie to jest z reguły na tyle duże, że — w wypadku występowania białego szumu pomiarowego w funkcji $f(t)$ — doprowadza ono do zdominowania rozwiązania $\phi(t)$ przez wzmocnione składowe szumu, co czyni rozwiązanie całkowicie niewiarygodnym.

5.1.2 Dyskretyzacja liniowych równań całkowych

Znalezienie analitycznego rozwiązania równania całkowego opisującego dane zjawisko fizyczne jest trudne lub, w wielu przypadkach, niemożliwe. Fakt ten doprowadził do intensywnego rozwoju technik dyskretyzacji równań całkowych i numerycznego obliczania ich rozwiązań przybliżonych [140]. Należy zauważyć, że w praktycznych zastosowaniach proces dyskretyzacji funkcji ciągłych jest naturalny, ponieważ w takich wypadkach zazwyczaj jedna lub kilka funkcji występujących w równaniu dana jest nie wprost, a jedynie w postaci zbioru swoich wartości w dyskretnych chwilach czasu otrzymanych w wyniku eksperymentalnego procesu pomiarowego [132, Rozdział 3].

W kontekście przetwarzania dyskretnych danych pomiarowych, najbardziej naturalną grupą metod numerycznych są metody wykorzystujące numeryczną aproksymację wartości całki oznaczonej danej funkcji. Określane one są mianem *metod kwadratury numerycznej* lub też *metod Nyströma*. W metodach tych wartość całki aproksymuje się za pomocą sumy ważonej wartości funkcji podcałkowej w dyskretnym zbiorze wybranych punktów:

$$\int_A^B \phi(t) dt \approx \sum_{j=1}^n w_j \phi(t_j), \quad (5.4)$$

gdzie $t_1, \dots, t_n \in [A, B]$ są węzłami kwadratury, a w_1, \dots, w_n są odpowiadającymi im wagami kwadratury, które nie zależą od funkcji podcałkowej, a jedynie od wybranej metody kwadratury. Korzystając z powyższej aproksymacji, człon całkowy występujący w równaniach (5.1) można aproksymować w następujący sposób:

$$\lambda \int_A^B K(t, \tau) \phi(\tau) d\tau \approx \lambda \sum_{j=1}^n w_j K(t, \tau_j) \phi(\tau_j) = \psi(t). \quad (5.5)$$

Należy zwrócić uwagę, że powyższa zależność została zdyskretyzowana względem tylko jednej zmiennej τ . Dyskretyzację liniowego równania całkowego pierwszego rzędu¹ (5.5) względem drugiej zmiennej t można przeprowadzić stosując *metodę kolokacji*, która wymaga, by aproksymacja członu całkowego funkcją $\psi(t)$ była równa funkcji $f(t)$ tylko w pewnym dyskretnym zbiorze punktów t_1, \dots, t_m nazywanych punktami kolokacji:

$$\psi(t_i) = f(t_i) \quad \text{dla } i = 1, \dots, m. \quad (5.6)$$

Dyskretyzację przeprowadza się niezależnie względem zmiennych τ i t stosując kolejno jedną z wybranych metod kwadratury numerycznej, np. metodę trapezów, oraz metodę kolokacji. W wypadku równania całkowego pierwszego rzędu, rozmieszczenie węzłów kwadratury τ_j i punktów kolokacji t_i może być niezależne oraz liczba węzłów kwadratury n nie musi być równa liczbie punktów kolokacji m , choć nie powinna być od niej mniejsza, tzn. $m \geq n$. Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjmijmy, że liczba punktów kolokacji i węzłów kwadratury jest sobie równa, $n = m$, oraz dodatkowo założymy, że są one równomiernie rozłożone na przedziale dyskretyzacji

¹Dyskretyzację równania całkowego drugiego rzędu (5.1b) można przeprowadzić w sposób całkowicie analogiczny.

$\tau_i = t_i = A + hi, i = 1, \dots, n$ gdzie $h = (B - A)/(n - 1)$. Stosując metodę kolokacji, równanie (5.1a) można zapisać w następującej postaci:

$$\lambda \sum_{j=1}^n w_j K(t_i, \tau_j) \phi(\tau_j) = f(t_i) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n. \quad (5.7)$$

Powyższa zależność jest układem n dyskretnych liniowych równań w n zmiennych, które można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} K(t_1, \tau_1) & K(t_1, \tau_2) & \cdots & K(t_1, \tau_n) \\ K(t_2, \tau_1) & K(t_2, \tau_2) & \cdots & K(t_2, \tau_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(t_n, \tau_1) & K(t_n, \tau_2) & \cdots & K(t_n, \tau_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \phi(\tau_1) \\ w_2 \phi(\tau_2) \\ \vdots \\ w_n \phi(\tau_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

lub, w postaci zagregowanej, jako

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (5.9)$$

gdzie elementy macierzy \mathbf{A} oraz wektorów \mathbf{x} i \mathbf{b} dane są przez:

$$\left. \begin{array}{l} a_{ij} = K(t_i, \tau_j) \\ x_j = w_j \phi(\tau_j) \\ b_i = f(t_i) \end{array} \right\} \quad \text{dla } i, j = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Różnicowa postać jądra całkowego

Przedstawiony powyżej sposób dyskretyzacji liniowych równań całkowych został przeprowadzony dla ogólnej postaci jądra całkowego $K(t, \tau)$. W dalszej części rozdziału rozpatrzemy właściwości i zalety dyskretyzacji równania całkowego posiadającego jądro całkowe w postaci różnicowej, to jest zależne jedynie od różnicy zmiennych t i τ :

$$K(t, \tau) = h(t - \tau). \quad (5.11)$$

Taka postać jądra całkowego pojawia się zwykle w równaniach modelujących zachowanie szerokiej klasy układów liniowych niezmiennych w czasie (ang. linear time invariant, LTI). W szczególności taką postać posiadają też równania (2.19a) i (2.19b), wyprowadzone w Rozdziale 2 i określające pseudo obciążenie $\mathbf{p}^0(t)$ modelujące równoważnie uszkodzenie i zmianę masy konstrukcji referencyjnej, oraz równania (2.12), które opisują odpowiedź rezydualną konstrukcji $\mathbf{u}^R(t)$.

Stosując procedurę opisaną w poprzednim paragrafie, równanie całkowe o jądrze całkowym w postaci różnicowej $h(t - \tau)$ można sprowadzić do układu równań liniowych zapisanych w formie macierzowej (5.9), w którym macierz współczynników \mathbf{A} posiada

charakterystyczną strukturę przekątniową:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \cdots & h_{2-n} & h_{1-n} \\ h_1 & h_0 & h_{-1} & \cdots & h_{3-n} & h_{2-n} \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & h_{4-n} & h_{3-n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_0 & h_{n-1} \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Macierze o strukturze macierzy (5.12) są nazywane macierzami Toeplitza. Tego typu macierze posiadają stałe wartości na przekątnych, a wartości ich elementów zależą jedynie od różnicy indeksów, to jest $h_{ij} = h_{i-j}$ dla $i, j = 1, \dots, n$. Należy zaznaczyć, że uzyskanie dyskretnej formy jądra całkowego o strukturze macierzy Toeplitza jest uzależnione od dwóch czynników: (1) jądro całkowe musi posiadać postać różnicową $h(t - \tau)$, (2) węzły kwadratury i punkty kolokacji muszą być równomiernie rozłożone w przedziale dyskretyzacji (co umożliwia zastosowanie na etapie kwadratury metod Newtona–Cotesa).

Układy mechaniczne rozważane w niniejszej pracy są przyczynowe. Dla takich układów jądro całkowe $h(t - \tau)$ dla $t < \tau$ przyjmuje wartości zerowe, a macierz Toeplitza będąca jego zdyskretyzowaną wersją redukuje się do postaci dolnotrójkątnej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Ważną numeryczną zaletą dyskretnego jądra równania całkowego o strukturze macierzy Toeplitza jest możliwość obliczenia iloczynu jądra i dowolnego wektora w czasie krótszym niż kwadratowy, co zostanie omówione w dalszej części rozdziału, w akapicie poświęconym iteracyjnym metodom regularyzującym.

5.2 Rozkład macierzy według wartości szczególnych

Początki metody znanej dziś jako rozkład macierzy według wartości szczególnych lub osobliwych (ang. singular value decomposition, SVD) sięgają lat siedemdziesiątych XIX wieku, kiedy to w 1873 r. włoski matematyk Eugenio Beltrami opublikował pierwszą pracę dotyczącą tego zagadnienia [141]. W późniejszych latach rozkład ten był wielokrotnie i niezależnie wyprowadzany przez matematyków takich jak Camille Jordan [142, 143], James Joseph Sylvester [144–146], Erhard Schmidt [147] i Hermann Weyl [148]. Dodatkowe informacje na temat historii rozkładu wraz z krótkim omówieniem cytowanych publikacji można znaleźć w pracy [149]. Obecnie metoda SVD

jest szeroko stosowana w zagadnieniach odwrotnych w celu numerycznego obliczania odwrotności źle uwarunkowanych macierzy.

Istotą rozkładu według wartości szczególnych jest fakt, że każdą rzeczywistą² macierz \mathbf{A} o wymiarze $m \times n$ można w następujący sposób przedstawić w postaci iloczynu trzech macierzy:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T, \quad (5.14)$$

gdzie $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m]$ jest macierzą kwadratową o wymiarze $m \times m$, macierz $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ ma wymiar $n \times n$ oraz obie te macierze są macierzami ortogonalnymi, to znaczy spełniają zależność

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (5.15)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o odpowiednim wymiarze. Kolumny macierzy \mathbf{U} i \mathbf{V} zawierają odpowiednio lewostronne i prawostronne wektory szczególne (osobliwe) macierzy \mathbf{A} , natomiast $\mathbf{\Sigma}$ jest macierzą diagonalną, to jest

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m,n)}), \quad (5.16)$$

gdzie σ_i są nazywane wartościami szczególnymi (osobliwymi) macierzy \mathbf{A} i zwyczajowo są uporządkowane w sposób nierosnący, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$.

W wypadku macierzy otrzymanych w procesie dyskretyzacji numerycznej liniowych równań całkowych pierwszego rzędu, takich jak macierz występująca w zależności (5.8) lub, dla różnicowych jąder całkowych, (5.12), ich wektory szczególne \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i oraz wartości szczególne σ_i posiadają pewne charakterystyczne cechy [130, 150]: wraz ze wzrostem indeksu i

- wartości szczególne σ_i dążą do zera³ bez wyraźnej przerwy w swoim spektrum,
- wzrasta liczba zmian znaków elementów wektorów szczególnych \mathbf{u}_i i \mathbf{v}_i .

Pierwsza z powyższych cech jest związana z inherentnym złym uwarunkowaniem numerycznym liniowych równań całkowych pierwszego rzędu z ciągłym jądrem, a druga — z twierdzeniem Riemanna–Lebesgue’a i zależnością (5.3).

5.2.1 Dyskretny warunek Picarda

Za pomocą rozkładu według wartości szczególnych (5.14), zdyskretyzowaną wersję (5.9) równania całkowego można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \mathbf{u}_i \sigma_i (\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}) = \mathbf{b}. \quad (5.17)$$

²Analogiczny rozkład istnieje również dla każdej macierzy zespolonej. W wypadku zespolonym, w zależnościach (5.14) i (5.15) należy jednak uwzględnić macierze hermitowskie zamiast transponowanych.

³W wypadku obliczeń numerycznych: do wartości odpowiadającej precyzji arytmetyki zmiennej-przecinkowej.

W zadaniach wprost, wraz ze wzrostem wartości indeksu i , iloczyn wektora szczególnego \mathbf{u}_i i współczynnika $\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}$ ma coraz mniejszy udział w wektorze \mathbf{b} za sprawą coraz mniejszych wartości szczególnych σ_i . Odmienną sytuację można natomiast zaobserwować w zadaniach odwrotnych. Wykorzystując fakt, że lewostronne i prawostronne wektory szczególne \mathbf{u}_i i \mathbf{v}_i tworzą bazy ortonormalne, patrz (5.15), nieznany wektor \mathbf{x} można wyrazić przekształcając równanie (5.17) do następującej postaci:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i. \quad (5.18)$$

Z powyższego równania wynika, że znaczący wpływ na rozwiązanie \mathbf{x} mogą mieć te wartości szczególne, dla których zachodzi $\sigma_i \ll |\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$. Obserwacja ta doprowadziła do sformułowania tzw. *dyskretnego warunku Picarda* [151], według którego uzyskanie wiarygodnego (numerycznie zregulowanego) rozwiązania jest możliwe, jeśli dla numerycznie niezerowych⁴ wartości szczególnych $\sigma_i > \epsilon$, współczynniki $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$ zbiegają do zera szybciej niż wartości szczególne σ_i . Należy zwrócić uwagę, że dyskretny warunek Picarda jest jedynie warunkiem koniecznym. Jego pierwowzorem jest (konieczny i wystarczający) *warunek Picarda* [151], sformułowany pierwotnie dla równań całkowych pierwszego rzędu (5.1a) z ciągłym jądrem $K(t, \tau)$: całkowalne z kwadratem rozwiązanie takiego równania istnieje wtedy i tylko wtedy, jeśli

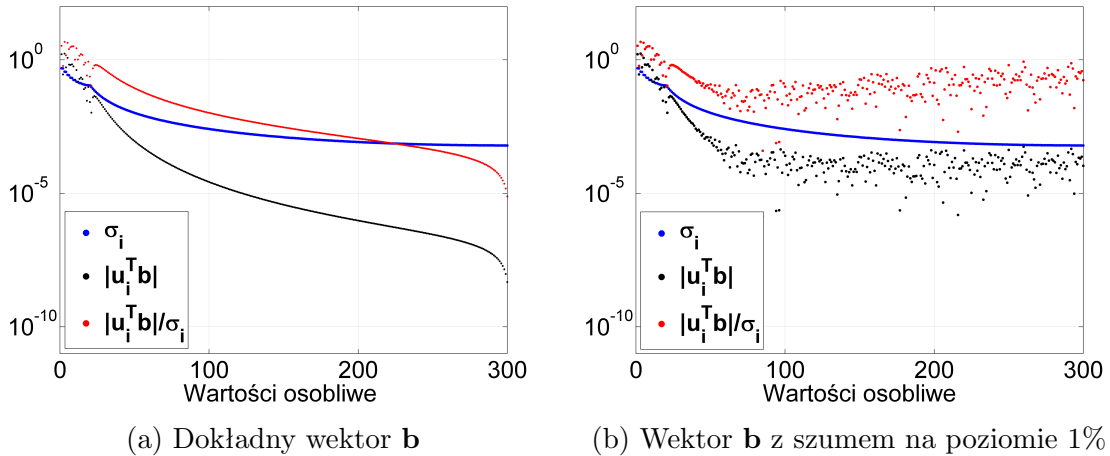
$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{b})}{\sigma_i} \right|^2 < \infty, \quad (5.19)$$

gdzie σ_i jest niezerową wartością szczególną jądra całkowego $K(t, \tau)$, \mathbf{u}_i odpowiadającą jej lewostronną funkcją szczególną, a (\cdot, \cdot) oznacza iloczyn skalarny. Warunek Picarda wykorzystuje rozwinięcie jądra całkowego według wartości szczególnych (ang. singular value expansion, SVE), które jest operacją całkowicie analogiczną do rozkładu macierzy według wartości szczególnych [129, 132].

Dyskretny warunek Picarda wymaga, by wartości $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$ malały szybciej niż wartości σ_i . Należy zaznaczyć, że dyskretny warunek Picarda dotyczy dokładnego wektora prawej strony \mathbf{b} , zawierającego jedynie dane faktyczne i nieobarczonego żadnymi zaburzeniami. W praktyce taka postać wektora \mathbf{b} zwykle jest jednak nieznaną, a wektor dostępny jest w postaci obciążonej pewnymi zaburzeniami wynikającymi np. z niedoskonałości przyrządów pomiarowych (szum pomiarowy) lub związanymi ze skończoną precyzją arytmetyki zmiennoprzecinkowej (błędy numeryczne). W takim wypadku wartości iloczynu $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$ dążą do poziomu zakłóceń w wektorze \mathbf{b} , rozwiązanie otrzymane bezpośrednio na podstawie zależności (5.18) jest niewiarygodne, a rozwiązania wiarygodnego można szukać stosując techniki numerycznej regularyzacji przedstawione w dalszej części rozdziału.

Na rys. 5-1 zilustrowano dyskretny warunek Picarda oraz wpływ zaburzeń wektora prawej strony przy wykorzystaniu numerycznego przykładu zadania odwrotnego, w którym poszukiwana jest siła wymuszająca układ o jednym stopniu swobody.

⁴Numerycznie niezerowych, to znaczy większych od pewnej progowej wartości ϵ zależnej od precyzji wykorzystywanej w obliczeniach arytmetyki zmiennoprzecinkowej.



Rysunek 5-1: Wykresy Picarda w przykładowym zadaniu odwrotnym identyfikacji siły wymuszającej układ o jednym stopniu swobody

W przeprowadzonych obliczeniach przyjęto następujące wartości liczbowe parametrów układu mechanicznego: sztywność sprężyny 9 N/m, masa 1 kg i współczynnik tłumienia lepkiego 0.6 Ns/m. Ponadto założono zerowe warunki początkowe w chwili $t = 0$ oraz zidentyfikowane wymuszenie w postaci $e^{-t} \sin \pi t$. Analityczną postać odpowiedzi przemieszczeniowej odpowiadającej takiemu wymuszeniu obliczono przy wykorzystaniu szeroko znanej ogólnej postaci odpowiedzi układu o jednym stopniu swobody na dowolne wymuszenie [152]. Odpowiedź układu jest splotem wymuszenia i odpowiedzi impulsowej układu (odpowiedzi na wymuszenie impulsowe opisane funkcją delty Diraca), co w postaci zdyskretyzowanej przyjmuje postać zależności (5.9), gdzie wektor \mathbf{b} jest zdyskretyzowaną odpowiedzią konstrukcji, wektor \mathbf{x} jest zdyskretyzowanym wymuszeniem, a macierz \mathbf{A} ma postać dolnotrójkątnej macierzy Toeplitza (5.13) i jest skonstruowana z dyskretnej postaci impulsowej odpowiedzi konstrukcji. Zastosowano dyskretyzację przedziału czasowego o długości 15 s z okresem próbkowania równym $\Delta t = 0.05$ s. Na rys. 5-1 zestawiono dwa wykresy Picarda, przy czym wartości na wykresie rys. 5-1a zostały wyznaczone dla dokładnego wektora \mathbf{b} , natomiast na rys. 5-1b wektor \mathbf{b} zawiera 1% szumu. Dokładny wektor prawej strony (rys. 5-1) spełnia dyskretny warunek Picarda (czerwona krzywa ma charakter malejący). Widoczny rozrzut wartości $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$ na rys. 5-1b (krzywa czarna) jest spowodowany zaburzeniami obecnymi w wektorze \mathbf{b} . Dodatkowo można zaobserwować, że począwszy od pewnej wartości indeksu i , trend dla wartości $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|/\sigma_i$ (krzywa czerwona) jest na rys. 5-1b rosnący, co ma związek z wciąż malejącymi wartościami osobliwymi σ_i (krzywa niebieska) oraz stabilizacją współczynnika $|\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}|$ (krzywa czarna) na poziomie wyznaczonym przez zaburzenia. Rozwiązanie \mathbf{x} wyznaczone wprost na podstawie zależności (5.18) i danych przedstawionych na rys. 5-1b jest niewiarygodne, gdyż jest zdominowane przez efekt zaburzeń w wektorze \mathbf{b} .

5.3 Metody regularyzacji

Metody numerycznej regularyzacji rozwiązania pozwalają na uzyskanie przybliżonych rozwiązań, które charakteryzują się odpowiednią gładkością i stabilnością na zaburzenia danych wejściowych. Ogólną ideą takich metod jest dążenie do uwzględnienia w rozwiązaniu \mathbf{x} jedynie informacji istotnych (o wysokim stosunku sygnału do szumu) i pominięcia informacji pozostałych lub zmniejszenia ich wpływu na końcowe rozwiązanie. Ogólną postać rozwiązania stosowaną w metodach regularyzujących można zapisać w formie analogicznej do (5.18) w następujący sposób:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \gamma_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad (5.20)$$

gdzie γ_i są pewnymi współczynnikami wagowymi, których wartość jest uzależniona od przyjętej metody regularyzującej. W ogólności metody regularyzujące można podzielić na metody bezpośrednie oraz iteracyjne.

5.3.1 Metody bezpośrednie

Metoda TSVD. Jedną z najprostszych metod regularyzujących, a zarazem najbardziej intuicyjną, jest metoda nazywana w języku angielskim truncated singular value decomposition (TSVD), co na język polski można przełożyć jako metoda obcięcia rozkładu według wartości szczególnych. W metodzie tej współczynniki wagowe γ_i^{TSVD} przyjmują jedną z dwóch wartości, 0 lub 1, zgodnie z poniższą zależnością:

$$\gamma_i^{\text{TSVD}} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \leq k, \\ 0 & \text{dla } i > k, \end{cases} \quad (5.21)$$

gdzie k jest pewną liczbą całkowitą z zakresu $1 \leq k \leq \min(m, n)$. W rezultacie ostateczne rozwiązanie jest obliczane zgodnie z pierwotną zależnością (5.18), w której jednak uwzględnia się jedynie pierwszych k dostatecznie dużych wartości szczególnych. Zaletą metody TSVD jest jej intuicyjny charakter oraz możliwość szybkiej analizy rozwiązania w zależności od wartości liczby k , bez konieczności każdorazowego przeprowadzania rozkładu macierzy \mathbf{A} . Niemniej koszt numeryczny związany z początkowym wyznaczeniem rozkładu SVD jest na tyle duży, zwłaszcza dla macierzy o znacznych wymiarach, że w praktyce preferowane są inne metody regularyzacji, takie jak np. regularyzacja Tichonowa.

Regularyzacja Tichonowa jest jedną z najczęściej stosowanych metod regularyzacji bezpośredniej. Wyprowadzona została niezależnie przez Andrieja Tichonowa [153] i Davida Phillipsa [154]. Metoda ta rozszerza metodę najmniejszych kwadratów o dodatkowy człon regularyzujący: za (zregularyzowane numerycznie) rozwiązanie równania (5.9) przyjmuje się wektor \mathbf{x} minimalizujący ważoną sumę kwadratów

normy swojej i normy rezyduum równania:

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2 \right\}, \quad (5.22)$$

gdzie λ jest pewną liczbą dodatnią zwaną parametrem regularyzującym. Człon regularyzujący $\lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2$ wymusza ograniczenie normy zregularyzowanego rozwiązania \mathbf{x} i — w praktyce — zapewnia odpowiednią jego gładkość. Można wykazać, że metoda Tichonowa odpowiada następującej postaci współczynników wagowych występujących w ogólnej zależności (5.20):

$$\gamma_i^\lambda = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \approx \begin{cases} 1 & \text{dla } \sigma_i \gg \lambda, \\ 0 & \text{dla } \sigma_i \ll \lambda. \end{cases} \quad (5.23)$$

W odróżnieniu od metody TSVD, funkcja wagowa w metodzie Tichonowa przyjmuje wartości pośrednie między skrajnymi wartościami 1 i 0. Wpływ wartości parametru regularyzującego λ na rozwiązanie \mathbf{x} można prześledzić analizując dwa skrajne przypadki: gdy $\lambda \rightarrow \infty$, obliczone rozwiązanie jest zdominowane przez człon regularyzujący i $\mathbf{x} \rightarrow 0$, natomiast gdy $\lambda \rightarrow 0$, to obliczone rozwiązanie staje się zdominowane przez wpływ zaburzeń danych wejściowych i w rezultacie bezużyteczne.

5.3.2 Metody iteracyjne

Metoda Landwebera. Historycznie pierwszą metodą iteracyjnej regularyzacji numerycznej jest prawdopodobnie stacjonarna metoda iteracyjna Landwebera [155]. Przyjmując wektor początkowy $\mathbf{x}^{(0)} = 0$, zależność na kolejne przybliżenia rozwiązania $\mathbf{x}^{(k)}$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \omega \mathbf{A}^T (\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^{(k-1)}), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.24)$$

gdzie ω jest dodatnią liczbą z przedziału $0 < \omega < 2/\|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\| = 2/\sigma_1^2$. Metoda Landwebera odpowiada następującej postaci współczynników wagowych występujących w ogólnej zależności (5.20):

$$\gamma_i^{(k)} = 1 - (1 - \omega \sigma_i^2)^k \approx \begin{cases} 1_i & \text{dla } \sigma_i^2 \gg 1/\omega, \\ k\omega \sigma_i^2 & \text{dla } \sigma_i^2 \ll 1/\omega. \end{cases} \quad (5.25)$$

W przypadku metod iteracyjnych intensywność regularyzacji maleje wraz ze wzrostem liczby iteracji k : czym więcej iteracji, tym więcej małych wartości szczególnych jest uwzględnionych w obliczonym rozwiązaniu.

Stacjonarne metody iteracyjne, do których należy metoda Landwebera, są rzadko używane w praktyce ze względu na relatywnie wolną zbieżność $\mathbf{x}^{(k)}$ do rozwiązania dokładnego.

Metoda CGLS. Metodą iteracyjną odznaczającą się szybszą zbieżnością rozwiązania jest metoda gradientów sprzężonych najmniejszych kwadratów (ang. conjugate

gradient least squares, CGLS) [132, 156]. Metoda ta jest wariantem metody gradientów sprzężonych (ang. conjugate gradient, CG), w którym zamiast do równania (5.9) jest ona zastosowana do rozwiązania równania normalnego $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$. Znalezienie postaci jawnej współczynników wagowych $\gamma_i^{(k)}$ dla metody CGLS sprawia spore trudności, gdyż metoda ta jest metodą niestacjonarną i wartość $\gamma_i^{(k)}$ zależy nieliniowo zarówno od wektora prawej strony \mathbf{b} , jak i od wartości szczególnych σ_i ; niemniej znana jest następująca ogólna zależność [130, 131]:

$$\gamma_i^{(k)} \approx \begin{cases} 1 & \text{dla dużych wartości } \sigma_i, \\ O(\sigma_i^2) & \text{dla małych wartości } \sigma_i. \end{cases} \quad (5.26)$$

Ogólną postać algorytmiczną metody CGLS można przedstawić w następujący sposób:

```

x(0) = 0
r(0) = b - Ax
d(0) = ATr(0)
for  $k = 1, 2, \dots$ 
   $\alpha^{(k)} = \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{r}^{(k-1)}\|^2}{\|\mathbf{A} \mathbf{d}^{(k-1)}\|^2}$ 
  x(k) = x(k-1) +  $\alpha^{(k)}$  d(k-1)
  r(k) = x(k-1) -  $\alpha^{(k)}$  A d(k-1)
   $\beta^{(k)} = \frac{\|\mathbf{A}^T \mathbf{r}^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{A}^T \mathbf{r}^{(k-1)}\|^2}$ 
  d(k) = ATr(k) +  $\beta^{(k)}$  d(k-1)
end for

```

Szybkie mnożenie macierzy Toeplitza przez wektor

W każdym kroku iteracyjnym metody CGLS najkosztowniejszą numerycznie operacją jest dwukrotne mnożenie macierzy przez wektor, $\mathbf{A} \mathbf{d}$ i $\mathbf{A}^T \mathbf{r}$. W rozważanych tutaj zadaniach, powstałych w wyniku dyskretyzacji metodą kwadratury numerycznej liniowych równań całkowych z jądrem różnicowym, obie macierze \mathbf{A} i \mathbf{A}^T są macierzami o strukturze blokowej, gdzie każda z podmacierzy ma strukturę macierzy Toeplitza (5.12); struktura przykładowej takiej macierzy została zilustrowana na rys. 6-7.

Koszt numeryczny bezpośredniego mnożenia macierzy \mathbf{A} o wymiarze $n \times n$ przez odpowiadający jej wymiarem wektor \mathbf{x} wynosi $O(n^2)$. Tymczasem dla macierzy o odpowiedniej strukturze, przy wykorzystaniu szybkiej transformacji Fouriera (FFT), działanie to można wykonać w czasie znacznie krótszym, to jest $O(n \log^k n)$, gdzie k jest pewną liczbą należącą do przedziału $[0, 2]$. Zastosowanie algorytmu szybkiego mnożenia w algorytmach iteracyjnych, takich jak na przykład algorytm CGLS, wymagających wielokrotnego mnożenia ustrukturyzowanych macierzy przez wektor, pozwala na znaczące skrócenie czasu obliczeń oraz zmniejszenie wymagań co do zasobów sprzętowych.

Prześledźmy algorytm szybkiego mnożenia na przykładzie macierzy cyklicznej \mathbf{C} o wymiarze $n \times n$ mnożonej przez dowolny wektor \mathbf{x} o długości n . Macierz cykliczna (ang. circulant matrix) jest szczególną odmianą macierzy Toeplitza, która posiada

następującą strukturę [157]:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Elementy macierzy cyklicznej spełniają zależność

$$c_{ij} = c_{j-i \pmod n} \quad \text{dla } 0 \leq i, j < n. \quad (5.28)$$

Należy zwrócić uwagę, że macierz cykliczną można utworzyć z pierwszego jej wiersza poprzez cykliczne przesunięcie go w kolejnych wierszach o jedną pozycję w prawo.

Fundamentalną cechą macierzy cyklicznych jest fakt, że każdą macierz cykliczną można zdiagnozować za pomocą macierzy Fouriera, to jest stosując zależność:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{\Sigma} \mathbf{F}, \quad (5.29)$$

gdzie \mathbf{F} jest macierzą Fouriera o wymiarze $n \times n$, to jest macierzą, której elementy są kolejnymi pierwiastkami z jedności kolejnych rzędów,

$$F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i j k / n}, \quad 0 \leq j, k < n. \quad (5.30)$$

Macierz $\mathbf{\Sigma}$ w zależności (5.29) jest macierzą diagonalną, a elementy na jej przekątnej są wartościami szczególnymi macierzy \mathbf{C} . Macierz $\mathbf{\Sigma}$ spełnia następującą prostą zależność [157]:

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\mathbf{F}\mathbf{c}), \quad (5.31)$$

gdzie \mathbf{c} jest pierwszym wierszem macierzy \mathbf{C} .

Szeroko znane algorytmy szybkiej transformacji Fouriera, poprzez wykorzystanie struktury macierzy Fouriera, pozwalają na przemnożenie macierzy \mathbf{F} (oraz \mathbf{F}^{-1}) przez dowolny wektor \mathbf{x} w czasie $O(n \log n)$, co jest równoważne obliczeniu jego dyskretnej (odwrotnej) transformaty Fouriera [158]. Na podstawie zależności (5.29) i (5.31) można wykazać, że w tym samym czasie jest możliwe przemnożenie przez dowolny wektor każdej macierzy cyklicznej \mathbf{C} . W tym celu zauważmy, że

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{\Sigma} \mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{c} \odot \mathbf{F}\mathbf{x}), \quad (5.32)$$

gdzie symbol \odot oznacza iloczyn Hadamarda (iloczyn po współrzędnych). Z zależności (5.32) wynikają trzy ważne wnioski:

1. Operację mnożenia macierzy Fouriera przez wektor można przeprowadzić w czasie $O(n \log n)$ zamiast $O(n^2)$, a zatem czas mnożenia każdej macierzy cyklicznej przez dowolny wektor wynosi też $O(n \log n)$.
2. Do przeprowadzenia mnożenia wymagana jest znajomość tylko pierwszej ko-

lumni macierzy cyklicznej. Dzięki temu w pamięci komputera nie trzeba przechowywać pełnej macierzy \mathbf{C} .

3. Mnożenie macierzy cyklicznej przez wektor, poza operacjami FFT i odwrotnej FFT, sprowadza się do odpowiedniego mnożenia elementów wektora $\mathbf{F}\mathbf{c}$ przez elementy wektora $\mathbf{F}\mathbf{x}$ (iloczyn Hadamarda).

Struktura macierzy Toeplitza różni się od struktury macierzy cyklicznej i bezpośrednio skorzystanie z przytoczonej wyżej procedury mnożenia macierzy przez wektor doprowadziłoby w wypadku macierzy Toeplitza do uzyskania błędnych wyników. Niemniej każdą macierz \mathbf{A} o strukturze Toeplitza (5.12) i wymiarze $n \times n$ można zanurzyć w większej macierzy cyklicznej o wymiarze $2n \times 2n$, która — zapisana w formie blokowej — ma następującą strukturę [159]:

$$\mathbf{C}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & h_{n-1} & \dots & h_2 & h_1 \\ h_{1-n} & 0 & h_{n-1} & \dots & h_2 \\ \vdots & h_{1-n} & 0 & \ddots & \vdots \\ h_{-2} & \dots & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ h_{-1} & h_{-2} & \ddots & h_{1-n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Iloczyn macierzy Toeplitza \mathbf{A} przez dowolny wektor \mathbf{x} można obliczyć w czasie $O(n \log n)$ przy wykorzystaniu cyklicznej struktury tak utworzonej macierzy \mathbf{C}_{2n} . W tym celu należy skorzystać z zależności (5.32), by obliczyć iloczyn

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{B}_n\mathbf{x} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Pierwsza połowa wektora wynikowego zawiera poszukiwany iloczyn $\mathbf{A}\mathbf{x}$, podczas gdy jego druga połowa jest pomijana jako uboczny produkt procedury szybkiego mnożenia macierzy \mathbf{A} przez wektor \mathbf{x} . Należy zwrócić uwagę, że dla macierzy Toeplitza o strukturze dolnotrójkątnej (5.13) pierwsza kolumna macierzy \mathbf{B}_n zawiera same zera.

5.4 Optymalna wartość parametru regularyzacji

Jak wspomniano w niniejszym rozdziale, metody regularyzujące pozwalają wyznaczyć rozwiązanie zadań źle uwarunkowanych charakteryzujące się większą stabilnością oraz odpowiednią gładkością. Jednocześnie trzeba zaznaczyć, że w procesie regularyzacji numerycznej tracona jest pewna część informacji. Dlatego istotny jest optymalny dobór parametru regularyzującego, który z jednej strony pozwoli na uwzględnienie w obliczonym rozwiązaniu jak największej ilości istotnej informacji, a z drugiej strony ograniczy niepożądany wpływ zaburzeń na to rozwiązanie. Innymi słowy, rozwiązanie uzyskane w wyniku zastosowania metody regularyzującej obarczone jest błędem

regularyzacji, który jest tym większy, im rozwiązanie jest silniej regularyzowane, oraz błędem zaburzenia, który rośnie wraz z uwzględnieniem w rozwiązaniu coraz większej ilości zaburzeń, a więc który jest tym większy, im rozwiązanie jest słabiej regularyzowane.

Błąd regularyzacji i błąd zaburzenia. Przy znanym dokładnym rozwiązaniu rozważanego problemu (bez zaburzeń), możliwe jest oszacowanie wartości błędu regularyzacji oraz błędu zaburzenia i na tej podstawie wybór optymalnej wartości parametru regularyzującego. Oba błędy w wypadku analizowanego wcześniej, przykładowego problemu identyfikacji siły wymuszającej układ o jednym stopniu swobody wyznaczymy stosując metodę TSVD. Założmy, że jedynie prawa strona równania (5.9) obarczona jest zaburzeniami wynikającymi z niedokładności urządzeń pomiarowych,

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{\text{exact}} + \mathbf{e}. \quad (5.36)$$

Całkowity błąd obliczonego rozwiązania \mathbf{x}_λ można obliczyć jako różnicę między rozwiązaniem dokładnym $\mathbf{x}^{\text{exact}}$ a obliczonym rozwiązaniem przybliżonym \mathbf{x}_λ . Stosując (5.20), (5.21) i (5.14),

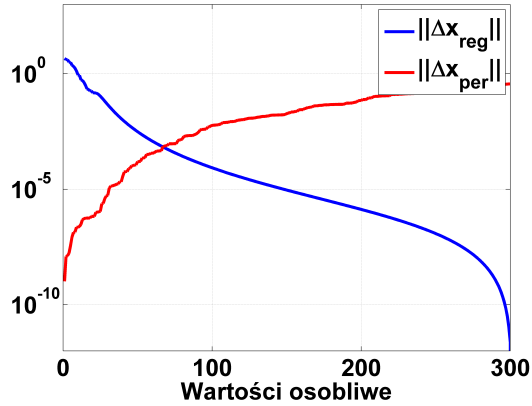
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{\text{exact}} - \mathbf{x}_\lambda &= \mathbf{x}^{\text{exact}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{b} \\ &= \mathbf{x}^{\text{exact}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{A}\mathbf{x}^{\text{exact}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{e} \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T\right)\mathbf{x}^{\text{exact}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{e} \\ &= \mathbf{V}\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\right)\mathbf{V}^T\mathbf{x}^{\text{exact}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}^{\text{TSVD}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Pierwszy człon w powyższym równaniu utożsamiany jest z błędem metody regularyzującej $\Delta\mathbf{x}_{\text{reg}}$, natomiast drugi — z błędem zaburzenia $\Delta\mathbf{x}_{\text{per}}$. Uwzględniając postać (5.21) współczynników wagowych metody TSVD, wyrażenia na oba błędy można zapisać następująco:

$$\Delta\mathbf{x}_{\text{reg}} = \sum_{i=k+1}^n \left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{x}^{\text{exact}}\right)\mathbf{v}_i, \quad \Delta\mathbf{x}_{\text{per}} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T\mathbf{e}}{\sigma_i}\mathbf{v}_i. \quad (5.38)$$

Na rys. 5-2 przedstawiono wartości norm obu błędów wyznaczonych dla rozważanego wcześniej przykładowego problemu numerycznego w zależności od wartości parametru k . Punkt przecięcia krzywych jest utożsamiany z jego optymalną wartością, gdyż pozwala na uwzględnienie w rozwiązaniu jak największej ilości informacji, jednocześnie nie dopuszczając do zdominowania rozwiązania przez zaburzenie.

Praktyczne zastosowanie powyższej metody jest mocno ograniczone ze względu na nieznaną wartość zarówno dokładnego rozwiązania $\mathbf{x}^{\text{exact}}$ rozważanego problemu, jak i zaburzeń \mathbf{e} wektora prawej strony. Do tej pory nie opracowano uniwersalnej metody wyznaczania optymalnej wartości parametru regularyzacji, którą można by stosować do wszystkich metod i typów zadań źle uwarunkowanych. Przegląd metod stosowanych w praktyce można znaleźć w pracach [160–162]. Poniżej opisano metodę krzywej L, która jest jedną z najczęściej stosowanych metod optymalnego doboru para-



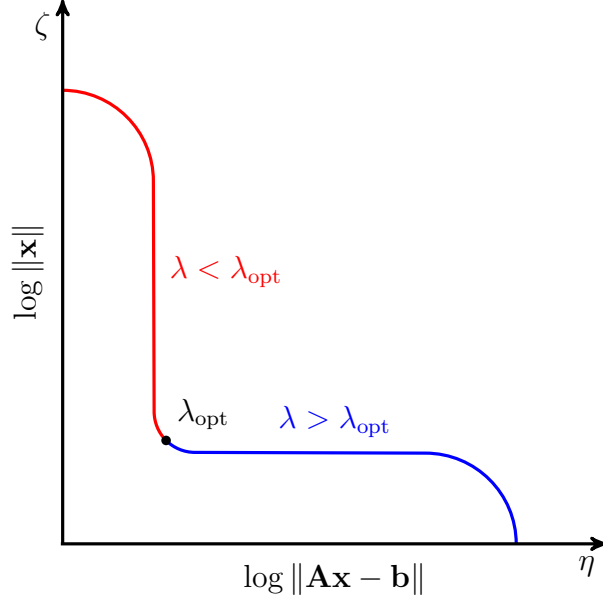
Rysunek 5-2: Błąd regularyzacji i błąd zaburzenia w przykładowym zadaniu odwrotnym identyfikacji siły wymuszającej układ o jednym stopniu swobody

metru regularyzującego [163]. Analiza zastosowania tej metody zostanie ograniczona do wyznaczenia optymalnego parametru λ w metodzie regularyzacji numerycznej Tichonowa, jednak analogiczne podejście można stosować również w innych metodach: do wyznaczenia liczby k uwzględnionych wartości szczególnych w metodzie TSVD, liczby iteracji w metodzie CGLS itd.

Metoda krzywej L. Nazwa metody związana jest z graficzną reprezentacją normy rozwiązania $\|\mathbf{x}\|$ i normy rezyduum $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ w funkcji parametru regularyzującego Tichonowa λ , patrz (5.22). Tak utworzona krzywa, w skali logarytmicznej, swoim kształtem zwykle przypomina literę “L”. Typową krzywą pokazano na rys. 5-3. Krzywą L pokazaną na rys. 5-3 można podzielić na dwie części. Części te zostały zaznaczone kolorem czerwonym i niebieskim, a punkt dzielący krzywą zwany jest narożnikiem krzywej i jest utożsamiany z optymalną wartością parametru regularyzującego λ_{opt} . Kolorem czerwonym zaznaczono pionowy fragment krzywej, dla którego $\lambda < \lambda_{\text{opt}}$. W tym obszarze większy nacisk położony jest na minimalizację wartości normy rezyduum $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ niż normy rozwiązania $\|\mathbf{x}\|$. Natomiast kolorem niebieskim zaznaczono obszar, dla którego $\lambda > \lambda_{\text{opt}}$. W tym obszarze norma rozwiązania $\|\mathbf{x}\|$ jest silniej minimalizowana niż norma rezyduum $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$.

W przypadku dużych zadań poszukiwanie narożnika krzywej w sposób bezpośredni, czyli przez wielokrotne rozwiązanie problemu dla różnych wartości λ w celu wyznaczenia jej ogólnej graficznej postaci, jest niepraktyczny. Autorzy pracy [160] proponują uznanie za narożnik krzywej L punktu, który posiada największą krzywiznę κ ; przegląd innych metod wyznaczania narożnika krzywej L można znaleźć w pracy [164]. Krzywiznę $\kappa(\lambda)$ krzywej L w skali logarytmicznej, w punkcie $(\eta(\lambda), \zeta(\lambda))$ można obliczyć następująco [165]:

$$\kappa(\lambda) = 2 \frac{\zeta \eta \lambda^2 \zeta' \eta + 2 \lambda \zeta \eta + \lambda^4 \zeta \zeta'}{\zeta' [\lambda^2 \zeta^2 + \eta^2]^{3/2}}. \quad (5.39)$$



Rysunek 5-3: Graficzna reprezentacja krzywej L

Zmienne ζ i η występujące w powyższym wzorze są współrzędnymi krzywej L,

$$\zeta(\lambda) = \|\mathbf{x}\|^2, \quad \eta(\lambda) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2, \quad (5.40)$$

i są zazwyczaj dostępne bezpośrednio w przeciwieństwie do wartości pochodnej ζ' względem parametru λ . Pochodna ta dana jest zależnością [165]:

$$\zeta' = \frac{4}{\lambda} \mathbf{x}^T \mathbf{z}, \quad (5.41)$$

gdzie wektor \mathbf{z} równy jest:

$$\mathbf{z} = [\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^T [\mathbf{Ax} - \mathbf{b}]. \quad (5.42)$$

Powyzsze równanie można przeformułować i wyrazić wektor \mathbf{z} w wygodniejszej numerycznie postaci rozwiązania następującego problemu najmniejszych kwadratów:

$$\mathbf{z} = \arg \min_{\mathbf{z}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{z} - \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2. \quad (5.43)$$

Metoda krzywej L posiada pewne ograniczenia, które mogą prowadzić do błędnego wyznaczenia optymalnej wartości parametru λ_{opt} . Taki przypadek może mieć miejsce na przykład wtedy, gdy prawa strona równania (5.9), czyli wektor \mathbf{b} , nie jest obarczona szumem pomiarowym [132]. Więcej informacji o ograniczeniach metody można znaleźć w pracy [166].

Rozdział 6

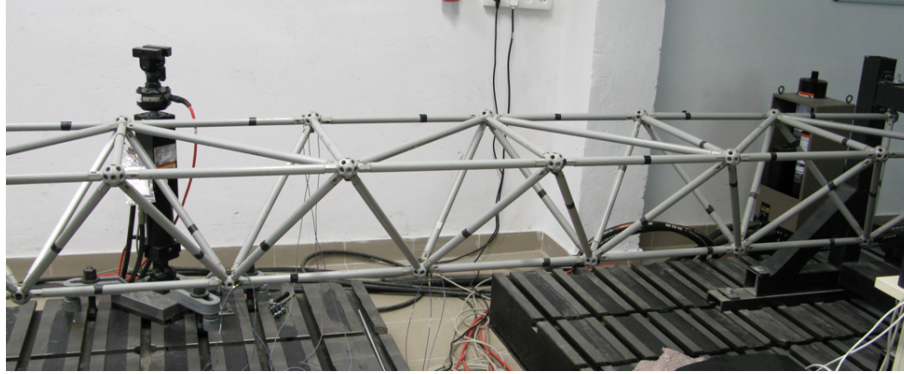
Weryfikacja doświadczalna

W niniejszym rozdziale został przedstawiony proces i wyniki doświadczalnej weryfikacji opracowanej nieparametrycznej metody identyfikacji w dziedzinie czasu i w dziedzinie Laplace’a, przeprowadzonej przy wykorzystaniu laboratoryjnego stanowiska przestrzennego wspornika kratowego. Część 6.1 zawiera opis stanowiska doświadczalnego, sposobów wprowadzania modyfikacji masy i sztywności, przeprowadzania imitacji uderzeń niesprężystych, oraz opis układu pomiarowego. Kolejne Części 6.2–6.4 prezentują odpowiednio wyniki identyfikacji zmian masy, sztywności i parametrów uderzenia niesprężystego wraz z ich dyskusją.

6.1 Stanowisko doświadczalne

6.1.1 Konstrukcja

Widok ogólny stanowiska badawczego (dźwigar kratowy) wykorzystanego w celu eksperymentalnej weryfikacji przedstawionej we wcześniejszych rozdziałach nieparametrycznej metodologii modelowania i identyfikacji zmian masy i sztywności konstrukcji pokazano na rys. 6-1. Konstrukcja dźwigara została zbudowana na bazie komercyjnie dostępnego systemu węzłów i elementów łączących “M12 System” firmy MERO-TSK [167]. Badana konstrukcja ma długość 4 m i składa się z 26 stalowych węzłów, każdy o masie 0.23 kg, oraz z 70 elementów, z których 62 ma długość 0.5 m, a pozostałe 8 elementów (krzyżulce umieszczone w płaszczyźnie górnego pasa konstrukcji) ma długość 0.707 m. Wszystkie elementy wykonane są ze stali i posiadają rurowy przekrój poprzeczny o średnicy zewnętrznej 22 mm i grubości ścianki równej 1 mm; pole przekroju poprzecznego elementów wynosi 65.94 mm². Dźwigar jest zamocowany do masywnych, sztywnych konstrukcji wsporczych w czterech skrajnych węzłach zlokalizowanych w płaszczyźnie górnego pasa. W mocowaniach zlokalizowanych na lewym końcu węzły zostały tak utwierdzone, by odebrać możliwość przemieszczania się w trzech ortogonalnych kierunkach. Natomiast węzły po przeciwnej stronie zostały osadzone na łożyskach liniowych, a zatem mają możliwość przemieszczania się wzdłuż dłuższego wymiaru konstrukcji. Masa całkowita konstrukcji wynosi około 32 kg.



Rysunek 6-1: Konstrukcja dźwigara kratowego wykorzystana w celu eksperymentalnej weryfikacji opracowanej metodologii (fragment)

6.1.2 Modyfikacja masy

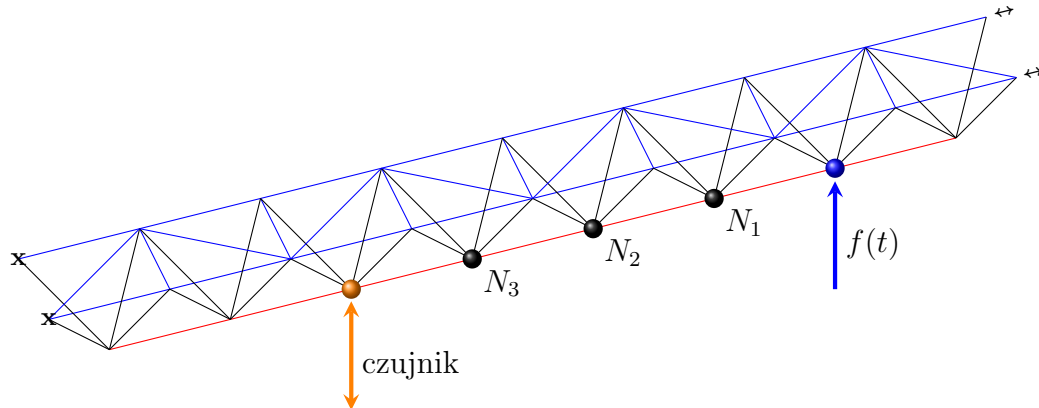
Pierwszym z trzech przetestowanych typów modyfikacji badanej konstrukcji jest modyfikacja mas węzłowych. Pomimo że zmiana masy w najbardziej typowych rzeczywistych uszkodzeniach konstrukcji inżynierskich jest pomijalnie mała, modyfikacje takiego typu są często wykorzystywane z omówionych w Rozdziale 1 powodów zarówno teoretycznych, jak i praktycznych.

Ogólny schemat wersji stanowiska, na której przeprowadzono doświadczalną weryfikację identyfikacji mas dodanych, pokazano na rys. 6-2. Założono, że

- nieznaną (identyfikowaną) macierz zmiany mas $\Delta \mathbf{M}$, występująca między innymi w równaniu (2.32), jest wywołana dodatkowymi odważnikami przytwierdzonymi do węzłów konstrukcji, a zatem ma strukturę przekątniową, oraz że
- odważniki są mocowane w taki sposób, że nie mają wpływu na sztywność konstrukcji, tzn. $\Delta \mathbf{K} = 0$.

Na rys. 6-2 zaznaczono węzły N_1 , N_2 i N_3 , w których montowano dodatkowe odważniki, położenie przyspieszoniomierza mierzącego odpowiedź $\ddot{\mathbf{u}}^M(t)$ konstrukcji zmodyfikowanej oraz miejsce przyłożenia wymuszenia testowego $f(t)$. W przeprowadzonych doświadczeniach miejsce zamocowania czujnika i miejsce przyłożenia wymuszenia testowego nie ulegały zmianie, natomiast lokalizacje, masy i liczba zamontowanych odważników były różne w zależności od przyjętego scenariusza. Pomiarów wykonano dla 30 następujących scenariuszy modyfikacji:

- 12 modyfikacji pojedynczej masy węzłowej:
W każdym z trzech węzłów N_1 , N_2 i N_3 kolejno przytwierdzano jedną z czterech mas 1.355 kg, 2.855 kg, 3.855 kg i 5.355 kg.
- 18 modyfikacji dwóch mas węzłowych:
W każdej z trzech par węzłów $\{N_1, N_2\}$, $\{N_1, N_3\}$ i $\{N_2, N_3\}$ kolejno przytwierdzano jedną z sześciu par odważników o masach $\{1.355 \text{ kg}, 1.388 \text{ kg}\}$, $\{2.855 \text{ kg}, 1.388 \text{ kg}\}$, $\{1.355 \text{ kg}, 2.888 \text{ kg}\}$, $\{2.855 \text{ kg}, 2.888 \text{ kg}\}$, $\{1.355 \text{ kg}, 3.888 \text{ kg}\}$ i $\{2.855 \text{ kg}, 3.888 \text{ kg}\}$.



Rysunek 6-2: Schemat stanowiska badawczego w zadaniu identyfikacji modyfikacji wybranych mas węzłowych

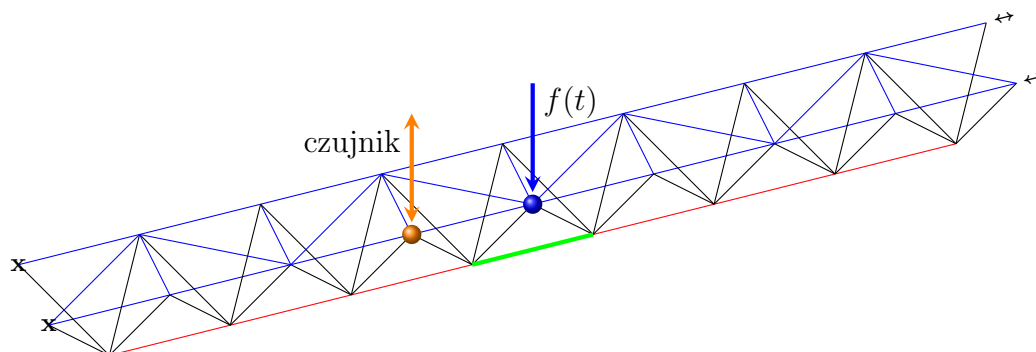
Podane powyżej wartości są całkowitymi masami dodanymi, a zatem poza masami odważników zawierają również masy elementów mocujących. Zastosowane modyfikacje mogą istotnie zmienić lokalną dynamikę konstrukcji w swoim otoczeniu, ponieważ zawierają się w zakresie pomiędzy 100% a 400% masy konstrukcji bezpośrednio powiązanej z modyfikowanymi węzłami (tj. masa własna modyfikowanego węzła wraz z połową masy sześciu elementów łączących, wynosi 1.355 kg). Z drugiej strony, w porównaniu do całkowitej masy konstrukcji niezmodyfikowanej (32 kg), względne całkowite modyfikacje masy są znacznie mniejsze i zawierają się w zakresie pomiędzy 4.2% a 21.1%.

6.1.3 Modyfikacja sztywności elementu

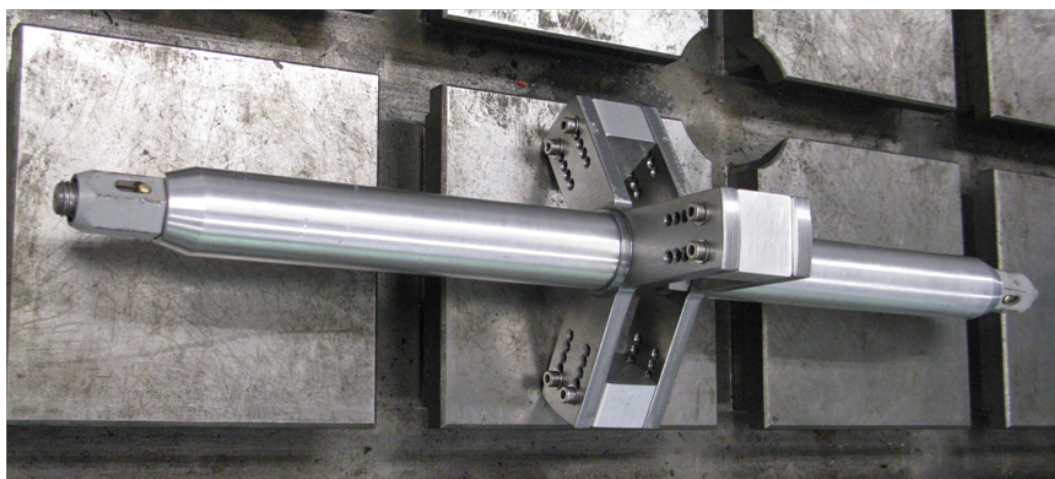
Drugim przetestowanym typem modyfikacji badanej konstrukcji jest modyfikacja sztywności osiowej wybranego elementu łączącego. Zmiana sztywności wybranych elementów konstrukcyjnych jest typem modyfikacji bardzo często wykorzystywanym w literaturze w celu modelowania uszkodzeń konstrukcji inżynierskich oraz testowania metod ich identyfikacji.

Ogólny schemat wersji stanowiska, na której przeprowadzono doświadczalne testy identyfikacji zmiany sztywności osiowej wybranego elementu, pokazano na rys. 6-3. Na schemacie zaznaczono położenie elementu o dyskretnie zmiennej sztywności osiowej, czujnik mierzący odpowiedź $\ddot{\mathbf{u}}^M(t)$ konstrukcji i miejsce przyłożenia testowego wymuszenia $f(t)$.

Na potrzeby badań zaprojektowano i wykonano element o dyskretnie zmiennej sztywności osiowej przedstawiony na rys. 6-4. Element ten składa się z dwóch części połączonych ze sobą za pośrednictwem trzech aluminiowych prostopadłościennych bloczków. Każda z dwóch części jest mocowana do bloczków za pośrednictwem dwóch śrub M4. Sztywność osiowa elementu jest regulowana poprzez zmianę położenia bloczków: zwiększenie odległości bloczków od osi elementu skutkuje zmniejszeniem sztywności osiowej elementu. W celu wyznaczenia rzeczywistych wartości modyfika-



Rysunek 6-3: Schemat stanowiska badawczego w zadaniu identyfikacji modyfikacji sztywności osiowej wybranego elementu



Rysunek 6-4: Ogólny widok zaprojektowanego w ramach niniejszej pracy elementu o zmiennej sztywności osiowej

Tabela 6.1: Eksperymentalnie wyznaczona sztywność osiowa elementu w zależności od położenia bloczków

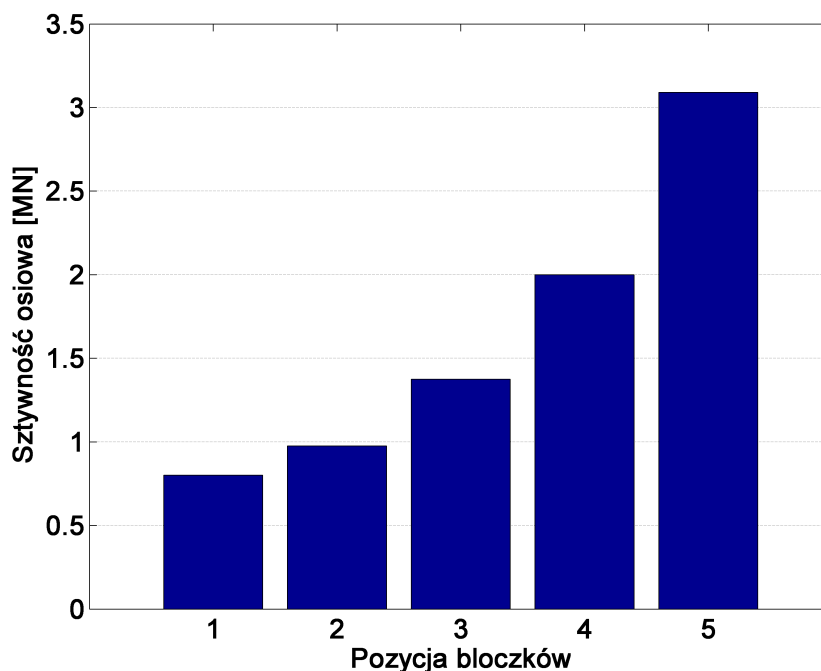
pozycja bloczków	sztywność osiowa [MN]
1	0.787
2	1.048
3	1.345
4	2.009
5	3.084

cji sztywności osiowej, element został poddany osiowemu ściskaniu i rozciąganiu na stanowisku badawczym. W czasie badań przeprowadzono pomiar odkształcenia środkowej części elementu pod wpływem siły osiowej działającej na element, przy wykorzystaniu ekstensometru osiowego MTS 634.25F-24 [168]. Na podstawie zarejestrowanych danych wyznaczono sztywność osiową elementu, rozumianą jako ekwiwalent sztywności osiowej pręta wyrażony jako iloczyn modułu Younga E i pola przekroju poprzecznego A . Obliczenia wykonano przy założeniu, że odkształcenia części składowych wykonanych z rury aluminiowej o średnicy zewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 6 mm są pomijalnie małe. Wyznaczoną sztywność osiową elementu w zależności od położenia bloczków przedstawiono w tabeli 6.1 i zilustrowano na rys. 6-5.

6.1.4 Uderzenie niesprężyste

Opracowaną metodę zweryfikowano również w zadaniu identyfikacji parametrów uderzenia idealnie niesprężystego. Ponieważ sposób doświadczalnej realizacji, w sposób powtarzalny, idealnego uderzenia niesprężystego nie jest oczywisty, zdecydowano się na imitację takiego uderzenia przeprowadzoną poprzez przytwierdzenie pojedynczego odważnika o masie m w wybranym węźle konstrukcji i następnie zadanie wymuszenia (quasi) impulsowego przytwierdzonej masie w kierunku pionowym z . Pomiar przebiegu siły wymuszającej pozwala na obliczenie zadanego impulsu siły oraz, po podzieleniu go przez wartość przytwierdzonej masy, równoważnej prędkości imitowanego uderzenia niesprężystego.

W celu imitacji uderzeń niesprężystych wykorzystano wersję stanowiska przedstawioną na rys. 6-2. Uderzenia imitowano w węzłach N_2 i N_3 , w każdym z nich kolejno przymocowywano i za pomocą młotka modalnego uderzano w kierunku pionowym (kierunek z) odważniki o masie 1.388 kg, 2.888 kg, 3.888 kg i 5.355 kg. W celu identyfikacji parametrów m i v_z imitowanego uderzenia niesprężystego wykorzystano odpowiedź przemieszczeniową w kierunku z obliczoną wewnątrz przez system akwizycji danych na podstawie odpowiedzi czujnika przyspieszeń przytwierdzonego w uderzanym węźle.

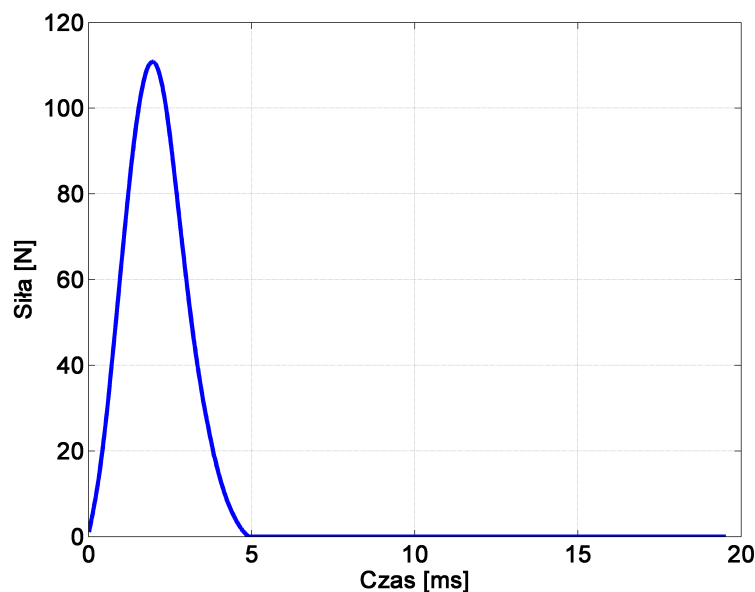


Rysunek 6-5: Eksperymentalnie wyznaczona sztywność osiowa elementu w zależności od położenia bloczków

6.1.5 Układ pomiarowy

Wymuszenia eksperymentalne miały charakter quasi impulsowy i były generowane za pomocą młotka modalnego Brüel & Kjær (typ 8202) z wbudowanym czujnikiem siły (typ 8200) i standardową końcówką z tworzywa sztucznego. Typowy przebieg czasowy wymuszenia został zilustrowany na rys. 6-6.

W procesie budowy nieparametrycznego modelu konstrukcji oraz identyfikacji jego zmian, poza młotkiem modalnym umożliwiającym pomiar wartości siły wymuszenia, wykorzystano jedynie przyspieszoniomierze. Sygnały z czujników były rejestrowane za pomocą systemu PULSE firmy Brüel & Kjær, próbkowane z częstotliwością 65.5 kHz (zadania identyfikacji zmiany masy i uderzenia niesprężystego) lub 51.2 kHz (zadanie identyfikacji zmiany sztywności) i zapisywane na stacjonarny komputer PC w celu dalszej analizy. System pomiarowy wewnętrznie podwójnie całkował sygnał z przyspieszoniomierzy w celu uzyskania wartości odpowiednich przemieszczeń. Każdy pomiar powtarzano czterokrotnie, rejestrowano cztery przebiegi odpowiedzi i je uśredniano w celu zmniejszenia negatywnych efektów szumu pomiarowego. W każdym wypadku rejestrowano przebiegi w ponad 15 000 krokach czasowych, co odpowiada odpowiedzi o długości około 230 ms lub 7.2 okresów podstawowych drgań własnych (31.5 Hz) w zadaniach identyfikacji masy i uderzenia niesprężystego oraz około 290 ms lub 9.2 okresów w zadaniu identyfikacji zmiany sztywności.



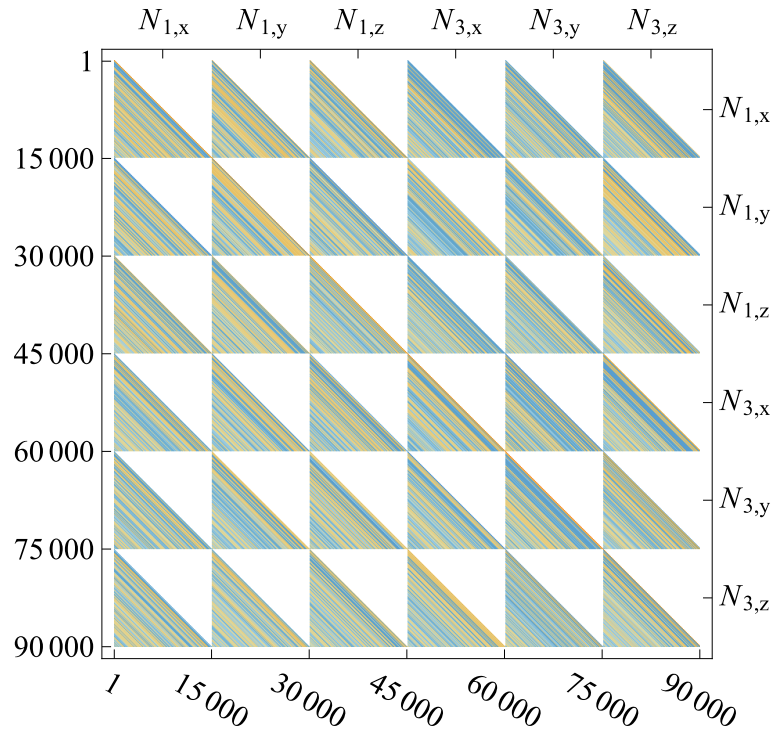
Rysunek 6-6: Typowy przebieg czasowy wymuszenia młotkiem modalnym

6.2 Identyfikacja modyfikacji masy

W tej części rozdziału zamieszczono i omówiono wyniki identyfikacji mas odważników zamocowanych do konstrukcji. Identyfikację przeprowadzono niezależnie przy wykorzystaniu zarówno sformułowania w dziedzinie czasu, jak i w dziedzinie Laplace'a; w obu wypadkach zastosowano te same dane wejściowe składające się na nieparametryczny eksperymentalny model konstrukcji oraz scenariusze modyfikacji masy, co umożliwiło porównanie wyników.

Dane pomiarowe

W celu przeprowadzenia procesu identyfikacji zebrano dane pomiarowe tworzące nieparametryczny model konstrukcji niezmodyfikowanej, zredukowany względem węzłów N_1 , N_2 i N_3 (lokalizacje modyfikacji), czujnika i punktu przyłożenia wymuszenia testowego $\mathbf{f}(t)$. Nieparametryczny model, zgodnie z metodologią przedstawioną w Rozdziale 2, składał się z odpowiedzi konstrukcji $\mathbf{x}^L(t)$ i $\mathbf{u}^L(t)$ na wymuszenie testowe oraz z macierzy wpływu (quasi impulsowych funkcji odpowiedzi konstrukcji) $\mathbf{D}^x(t)$ i $\mathbf{D}(t)$; częstotliwość oraz czas próbkowania podano w Części 6.1.5. W procesie identyfikacji w dziedzinie czasu wykorzystano odpowiedzi przemieszczeniowe; analiza w dziedzinie Laplace'a została wykonana przy użyciu bezpośrednio mierzonych odpowiedzi przyspieszeniowych. Rysunek 6-7 ilustruje blokową strukturę macierzy \mathbf{A} występującej w (2.24) i odpowiadającej przypadkowi jednoczesnej identyfikacji dwóch mas dodanych w węzłach N_1 i N_3 ; każda podmacierz składowa jest wymiaru $15\,000 \times 15\,000$ (liczba próbek czasowych w rejestrowanej odpowiedzi), ma postać dolnotrójkątnej macierzy typu Toeplitza i reprezentuje zdyskretyzowaną postać operatora splotu.



Rysunek 6-7: Blokowa struktura macierzy \mathbf{A} , patrz (2.24). Macierz przykładowa, odpowiada przypadkowi identyfikacji dwóch mas dodanych w węzłach N_1 i N_3 , patrz Część 6.2.1

Wymuszenie testowe

Wymuszenie testowe $\mathbf{f}(t)$ w założeniu powinno mieć możliwie szerokopasmowy charakter, by wzbudzić wiele form drgań własnych badanej konstrukcji. Teoretycznie, taki charakter ma idealne wymuszenie impulsowe, którego z oczywistych względów nie można jednak zastosować w praktyce eksperymentalnej. Z tego powodu w procesie identyfikacji w dziedzinie czasu wykorzystano w roli wymuszenia testowego eksperymentalne quasi impulsowe wymuszenie młotkiem modalnym. Analiza w dziedzinie Laplace'a umożliwiła natomiast wiarygodne odtworzenie (w obszarze wiarygodności transformaty, patrz Część 4.2.4) wymuszenia czysto impulsowego i wykorzystanie go w procesie identyfikacji.

6.2.1 Scenariusze modyfikacji masy

Rozważono trzy scenariusze, zakładające różną liczbę odważników o nieznanymi masach jednocześnie podlegających identyfikacji: od jednego odważnika do trzech odważników. Identyfikację w dziedzinie Laplace'a przeprowadzono pomyślnie we wszystkich scenariuszach, podczas gdy wiarygodna identyfikacja w dziedzinie czasu możliwa była jedynie w wypadku pojedynczego odważnika oraz, częściowo, w wypadku dwóch odważników (umieszczonych w skrajnych węzłach N_1 i N_3 lub w węzłach N_2 i N_3).

Tabela 6.2: Modyfikacja pojedynczej masy węzłowej: masy odważników

Lp.	Oznaczenie	Masa [kg]	Procent masy konstrukcji [%]
1	M_1	1.355	4.2
2	M_2	2.855	8.9
3	M_3	3.855	12.0
4	M_4	5.355	16.7

Pojedyncza masa węzłowa

Pierwszym i najprostszym scenariuszem jest identyfikacja masy pojedynczego odważnika przymocowanego w wybranym węźle konstrukcji, przy założeniu, że miejsce jego mocowania jest znane. W rozpatrywanym scenariuszu użyto czterech odważników o różnych masach, których wartości podano w tabeli 6.2. Każdy z odważników był kolejno montowany w węzłach N_1 , N_2 i N_3 , patrz rys. 6-2; w rezultacie otrzymano 12 różnych przypadków identyfikacji. W każdym z przypadków niezależnie zarejestrowana została odpowiedź konstrukcji zmodyfikowanej $\mathbf{u}^M(t)$ na wymuszenie testowe $\mathbf{f}(t)$.

Dwie masy węzłowe

Scenariusz zakłada identyfikację dwóch mas dodanych (odważników) jednocześnie zamocowanych w dwóch różnych węzłach konstrukcji; tak jak poprzednio założono, że lokalizacja odważników na konstrukcji jest znana. Przetestowano wszystkie trzy możliwe przypadki mocowania par odważników w trzech rozważanych węzłach: mocowano je zarówno w węzłach sąsiadujących (N_1 i N_2 oraz N_2 i N_3), jak i w węzłach skrajnych (N_1 i N_3). Wyniki identyfikacji znacznie się różnią w zależności od dziedziny, w której ją przeprowadzono: ze względu na szum pomiarowy oraz inherentnie złe uwarunkowanie numeryczne, błędy wyników otrzymanych w dziedzinie czasu były znacząco wyższe niż błędy wyników otrzymanych w dziedzinie Laplace'a, gdzie w procesie identyfikacji wykorzystano jedynie pewną liczbę początkowych linii spektralnych (odpowiadających listkom głównym wymuszeń młotkiem modalnym), co efektywnie zwiększyło stosunek użytecznego sygnału do szumu.

W każdym rozważanym wypadku (tj. dla każdej pary modyfikowanych węzłów) przetestowano identyfikację czternastu kombinacji mas dodanych:

- sześciu par mas niezerowych (mocowanie dwóch odważników),
- czterech par mas, w których pierwsza masa jest zerowa (mocowanie pojedynczego odważnika),
- czterech par mas, w których druga masa jest zerowa (mocowanie pojedynczego odważnika).

Wartości mas mocowanych odważników są zgodne z danymi zamieszczonymi w tabeli 6.3. Dokładność identyfikacji oceniono osobno dla każdej z dodanych mas. By

Tabela 6.3: Kombinacje mas odważników mocowanych w trzech parach węzłów, oznaczonych odpowiednio “Węzeł A” i “Węzeł B” (N_1 i N_3 , N_1 i N_2 oraz N_2 i N_3), wraz z relatywną wartością sumarycznej modyfikacji odniesioną do masy całej konstrukcji

Lp.	Węzeł A [kg]	Węzeł B [kg]	Procent masy konstrukcji [%]
1	1.355	1.388	8.6
2	2.855	1.388	13.3
3	1.355	2.888	13.3
4	2.855	2.888	17.9
5	1.355	3.888	16.4
6	2.855	3.888	21.1
7	1.355	0.000	4.2
8	2.855	0.000	8.9
9	3.855	0.000	12.0
10	5.355	0.000	16.7
11	0.000	1.355	4.2
12	0.000	2.855	8.9
13	0.000	3.855	12.0
14	0.000	5.355	16.7

umożliwić ocenę przy użyciu błędu względnego również w wypadku zerowych mas dodanych (modyfikacja w jedynie jednym węźle z rozważanej pary węzłów), błąd identyfikacji odnoszono do całkowitej modyfikacji masy konstrukcji, to jest wykorzystano następującą zależność:

$$\epsilon_i := \frac{m_i^{\text{zidentyfikowana}} - m_i^{\text{dodana}}}{\sum_i |m_i^{\text{dodana}}|}, \quad (6.1)$$

gdzie ϵ_i oznacza błąd względny identyfikacji masy dodanej w węźle i -tym, $m_i^{\text{zidentyfikowana}}$ jest zidentyfikowaną masą dodatkowego odważnika, a m_i^{dodana} jest rzeczywistą modyfikacją masy.

Trzy masy węzłowe

Scenariusz zakłada jednoczesną identyfikację trzech nieznanymi wielkościami określających masy dodane (odważniki) jednocześnie zamocowane w węzłach N_1 , N_2 i N_3 . Podczas badań przetestowano eksperymentalnie identyfikację trzydziestu kombinacji mas dodanych:

- w dwunastu wypadkach jedynie pojedyncza masa była niezerowa (cztery różne masy w każdym z trzech węzłów),
- w osiemnastu wypadkach dwie masy były niezerowe (sześć przypadków dla każdej z trzech par węzłów).

Tabela 6.4: Identyfikacja trzech mas dodanych: kombinacje mas odważników mocowanych w węzłach N_1 , N_2 i N_3

Lp.	Węzeł N_1 [kg]	Węzeł N_2 [kg]	Węzeł N_3 [kg]	Lp.	Węzeł N_1 [kg]	Węzeł N_2 [kg]	Węzeł N_3 [kg]
1	1.355	0.000	0.000	16	2.855	2.888	0.000
2	2.855	0.000	0.000	17	1.355	3.888	0.000
3	3.855	0.000	0.000	18	2.855	3.888	0.000
4	5.355	0.000	0.000	19	1.355	0.000	1.388
5	0.000	1.355	0.000	20	2.855	0.000	1.388
6	0.000	2.855	0.000	21	1.355	0.000	2.888
7	0.000	3.855	0.000	22	2.855	0.000	2.888
8	0.000	5.355	0.000	23	1.355	0.000	3.888
9	0.000	0.000	1.355	24	2.855	0.000	3.888
10	0.000	0.000	2.855	25	0.000	1.355	1.388
11	0.000	0.000	3.855	26	0.000	2.855	1.388
12	0.000	0.000	5.355	27	0.000	1.355	2.888
13	1.355	1.388	0.000	28	0.000	2.855	2.888
14	2.855	1.388	0.000	29	0.000	1.355	3.888
15	1.355	2.888	0.000	30	0.000	2.855	3.888

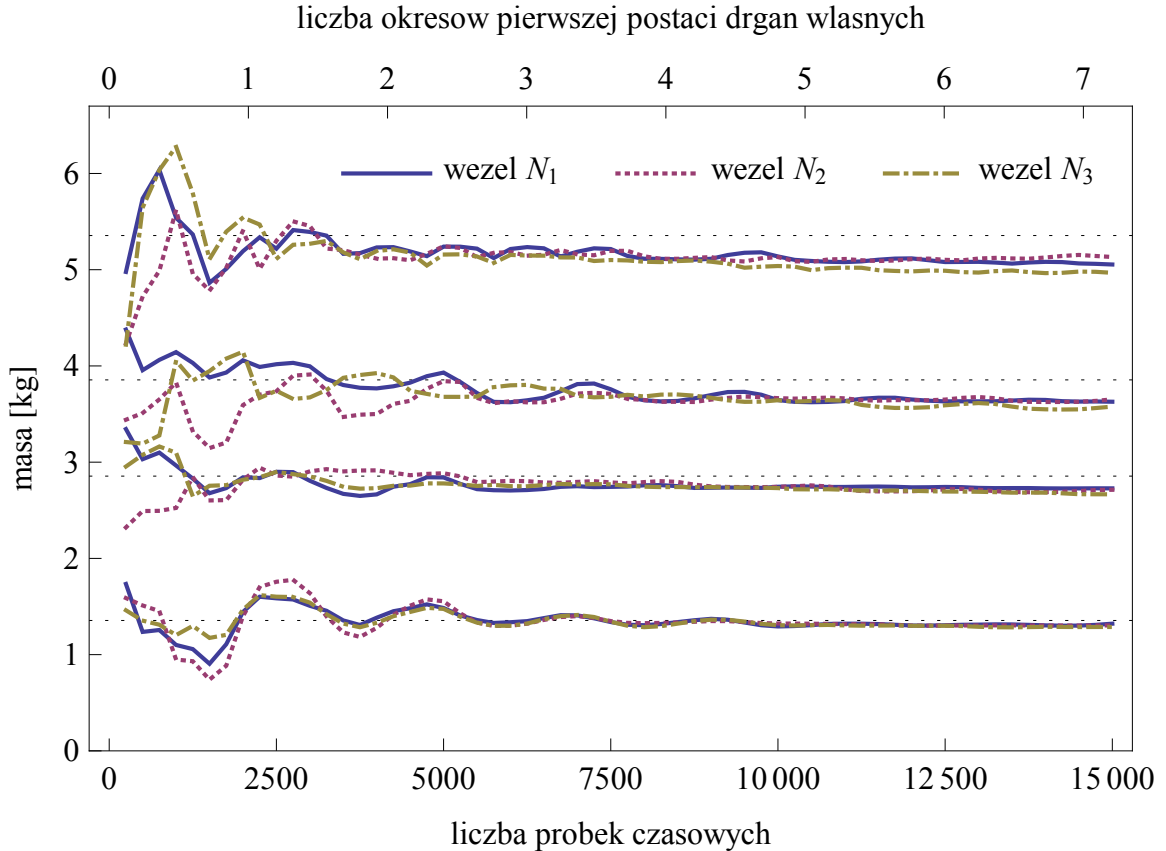
Wartości mas mocowanych odważników są zgodne z danymi zamieszczonymi w tabeli 6.4. Dokładność identyfikacji masy każdego odważnika oceniono przy użyciu zależności (6.1), to jest w odniesieniu do całkowitej masy modyfikacji, co umożliwiło ocenę dokładności względnej wyniku również w wypadku mas zerowych.

6.2.2 Identyfikacja w dziedzinie czasu

Relatywnie wiarygodna identyfikacja w dziedzinie czasu możliwa była jedynie w wypadku pojedynczego odważnika oraz dwóch odważników umieszczonych albo w skrajnych węzłach N_1 i N_3 , albo w węzłach N_2 i N_3 .

Pojedyncza masa węzłowa

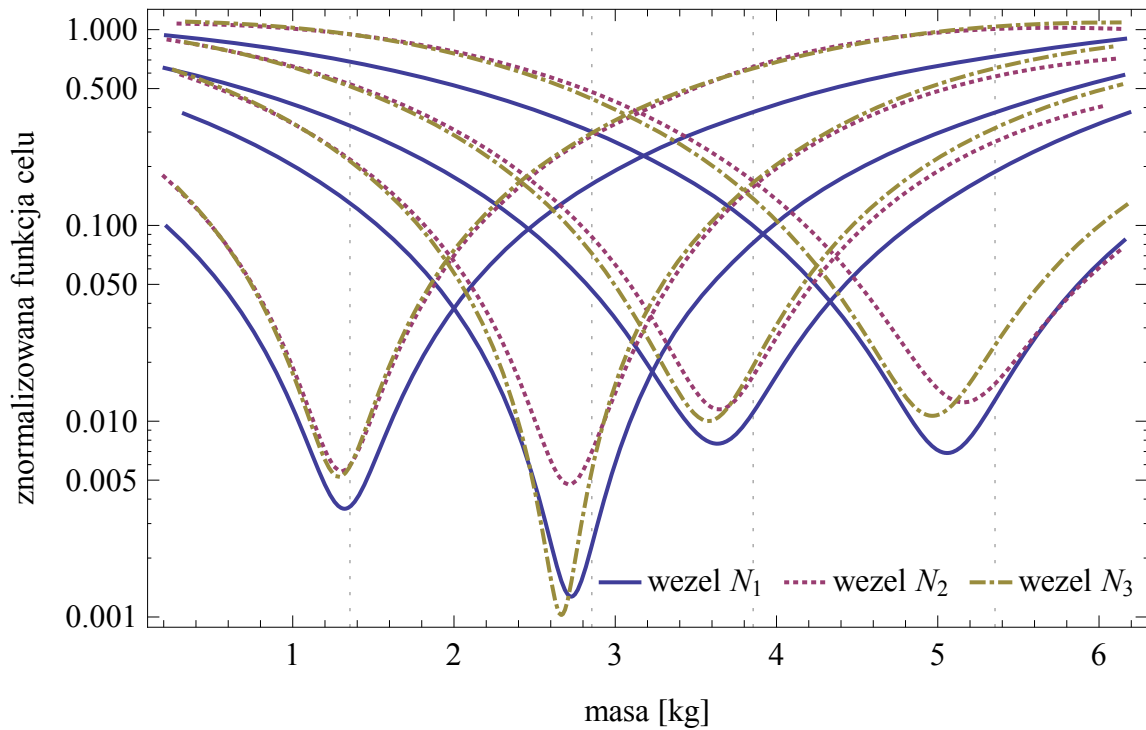
Wyniki identyfikacji zależą od liczby próbek czasowych (długości odpowiedzi) wykorzystanych w obliczeniach. Na rys. 6-8 przedstawiono wyniki identyfikacji mas poszczególnych odważników dla wszystkich 12 analizowanych przypadków w zależności od liczby wykorzystanych w obliczeniach próbek czasowych (od 250 próbek do pełnej liczby 15 000 próbek, z krokiem co 250 próbek). Dla odniesienia na wykresie zaznaczono również liczbę okresów drgań pierwszej częstości drgań własnych konstrukcji (31.5 Hz, co odpowiada 31.7 ms lub ok. 2080 próbkom czasowym) oraz dokładne wartości mas dodanych (poziome linie przerywane). Należy zauważyć, że użycie w procesie identyfikacji odpowiedzi zbyt krótkiej skutkuje uzyskaniem niewiarygodnych wyników, charakteryzujących się dużą zmiennością przy niewielkiej zmianie wykorzysty-



Rysunek 6-8: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie czasu: wynik identyfikacji w zależności od długości uwzględnianej w obliczeniach odpowiedzi konstrukcji. Rzeczywiste wartości mas dodanych są oznaczone za pomocą poziomych linii przerywanych

wanej w obliczeniach długości odpowiedzi. Stabilizację wyników dla wszystkich 12 przypadków można zaobserwować przy odpowiedzi zawierającej około 7500 próbek (115 ms). Wyniki identyfikacji stabilizują się w miarę wzrostu długości odpowiedzi (liczby próbek); charakterystyczną cechą wyników jest konsekwentne niedoszacowanie masy odważników (średnio o 5.2% dla odpowiedzi pełnej długości).

Wykresy wartości znormalizowanych funkcji celu (w skali logarytmicznej) w zależności od wartości masy dodanej w zmodyfikowanym węźle pokazano na rys. 6-9. Testowany zakres zmienności masy dodanej był równy 0.2 kg – 6.2 kg, co odpowiada relatywnie szerokiemu zakresowi od 0.6% do 19.4% całkowitej masy konstrukcji. Wartości funkcji celu we wszystkich przypadkach obliczono wykorzystując odpowiedzi konstrukcji pełnej długości, to jest zawierające 15 000 próbek (230 ms). Wszystkie funkcje celu są gładkie i mają unimodalny charakter, co ułatwia ich minimalizację oraz pozwala na względnie prostą i jednoznaczną identyfikację masy dodanej poprzez lokalizację minimum. Rzeczywiste masy odważników zaznaczono przerywanymi liniami pionowymi. Liczbowe wartości zidentyfikowanych mas odważników odpowiadające minimum funkcji celu zamieszczono w tabeli 6.5 wraz z błędem względnym identyfi-



Rysunek 6-9: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie czasu: znormalizowane funkcje celu obliczone przy wykorzystaniu odpowiedzi pełnej długości (15 000 kroków czasowych). Rzeczywiste wartości mas dodanych są oznaczone za pomocą pionowych linii przerywanych

kacji, który mieścił się w zakresie od -7.2% do -2.5% z błędem średniokwadratowym równym 5.4% .

Na podstawie minimalnych wartości funkcji celu można stwierdzić, że najlepsze i najgorsze dopasowanie pomiędzy odpowiedzią nieparametrycznie modelowaną oraz zmierzoną otrzymano odpowiednio w przypadkach masy M_2 zamocowanym w węzle N_3 oraz masy M_4 zamocowanej w węzle N_2 . Odpowiadające tym przypadkom odpowiedzi konstrukcji pokazano na rys. 6-10 i rys. 6-11. Na każdym z tych rysunków zaznaczono trzy przebiegi czasowe:

- zmierzonej referencyjnej odpowiedzi konstrukcji niezmodyfikowanej $\mathbf{u}^L(t)$,
- zmierzonej odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej $\mathbf{u}^M(t)$ oraz
- modelowanej nieparametrycznie za pomocą (2.24) i (2.25b) odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej $\mathbf{u}(t)$ odpowiadającej minimum funkcji celu.

W wypadku zarówno najlepszego, jak i najgorszego dopasowania należy zauważyć istotną różnicę pomiędzy zmierzonymi odpowiedziami konstrukcji niezmodyfikowanej i zmodyfikowanej, $\mathbf{u}^L(t)$ i $\mathbf{u}^M(t)$, która wynika z obecności dodatkowego odważnika i umożliwia jego identyfikację. Istotą procesu identyfikacji masy odważnika jest jak najlepsze dopasowanie odpowiedzi modelowanej $\mathbf{u}(t)$ do odpowiedzi zmierzonej $\mathbf{u}^M(t)$

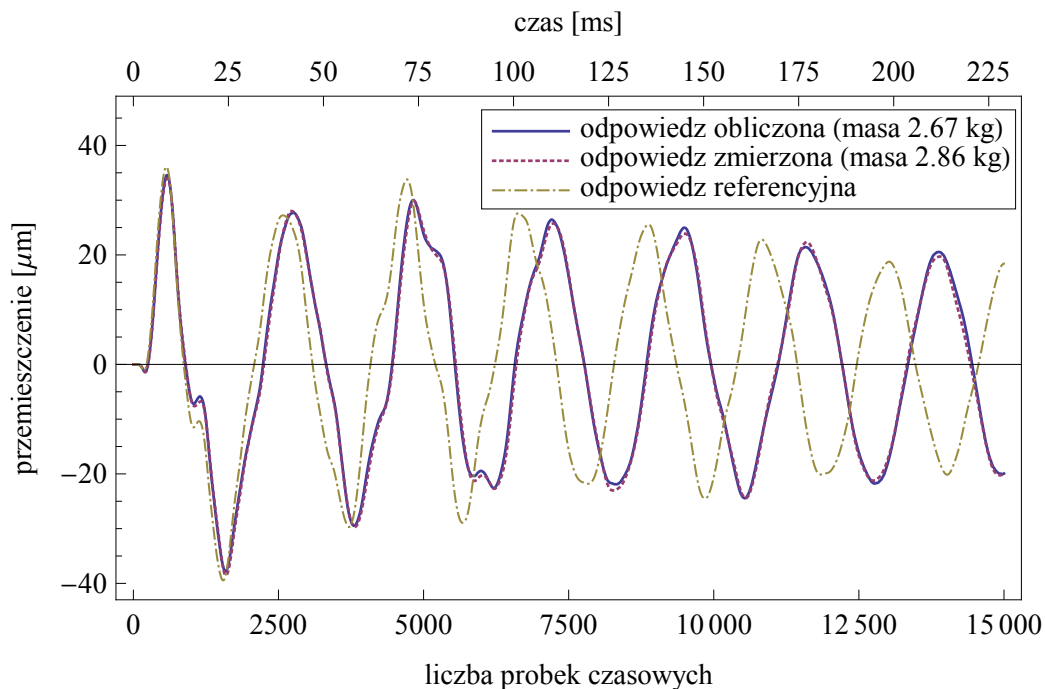
Tabela 6.5: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie czasu: masa dodana, masa zidentyfikowana i względny błąd identyfikacji. Średniokwadratowy względny błąd identyfikacji wyniósł 5.4%

Węzeł	Masa dodana [kg]	Masa zidentyfikowana [kg]	Błąd względny [%]
N_1	1.355	1.322	-2.5
N_1	2.855	2.728	-4.5
N_1	3.855	3.628	-5.9
N_1	5.355	5.054	-5.6
N_2	1.355	1.304	-3.8
N_2	2.855	2.713	-5.0
N_2	3.855	3.653	-5.3
N_2	5.355	5.132	-4.2
N_3	1.355	1.287	-5.0
N_3	2.855	2.666	-6.6
N_3	3.855	3.577	-7.2
N_3	5.355	4.967	-7.2

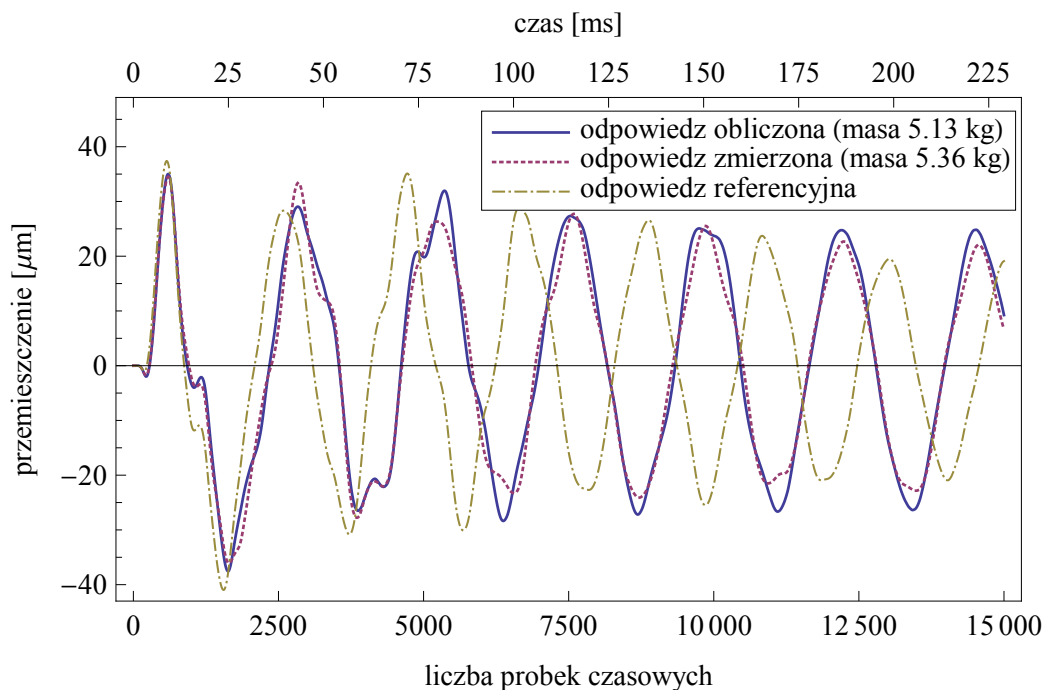
konstrukcji zmodyfikowanej, gdzie ilościowy sens “dopasowania” jest wyrażony w definicjach funkcji celu (3.1) lub znormalizowanej funkcji celu (3.4), wykorzystujących średniokwadratową odległość pomiędzy odpowiednimi odpowiedziami. Najlepsze dopasowanie (rys. 6-10) można jakościowo ocenić jako bardzo dobre pod względem zarówno amplitudy, jak i częstości przynajmniej pierwszych dwóch postaci drgań własnych układu. W wypadku dopasowania relatywnie najgorszego (rys. 6-11) zauważyć można jakościową zgodność amplitud oraz częstości pierwszej postaci drgań własnych konstrukcji.

Dwie masy węzłowe

Jednoczesną identyfikację modyfikacji masy w dwóch węzłach testowano dla każdej z trzech możliwych par węzłów spośród węzłów N_1 , N_2 i N_3 . Wartości mas odważników przymocowywanych w węzłach były zgodne z danymi zawartymi w tabeli 6.3. Podobnie jak w poprzednim scenariuszu, zakładającym identyfikację masy jednego odważnika, badano wpływ długości uwzględnionej podczas obliczeń odpowiedzi na wyniki identyfikacji. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 6-12 (modyfikacje w węzłach N_1 i N_3), rys. 6-13 (węzły N_1 i N_2) oraz rys. 6-14 (węzły N_2 i N_3). Początkowa długość uwzględnionej odpowiedzi wynosiła 7500 próbek (wyniki oznaczone jasnymi punktami) i była stopniowo zwiększana co 250 próbek aż do wartości 15 000 (wyniki oznaczone ciemnymi punktami). Wyniki identyfikacji przeprowadzonych dla odpowiedzi pełnej długości (15 000 próbek) wraz z ich błędami względnymi obliczonymi zgodnie z (6.1) zamieszczono w tabelach 6.6, 6.7 i 6.8. Wymiar wykorzystywanej w zależności (2.24) macierzy \mathbf{A} dla odpowiedzi pełnej długości był równy $90\,000 \times 90\,000$, a jej struktura została zilustrowana na rys. 6-7.



Rysunek 6-10: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie czasu (masa M_2 w węźle N_3 , najmniejsza wartość funkcji celu — najlepsze dopasowanie): porównanie zmierzonych i nieparametrycznie modelowanych odpowiedzi konstrukcji



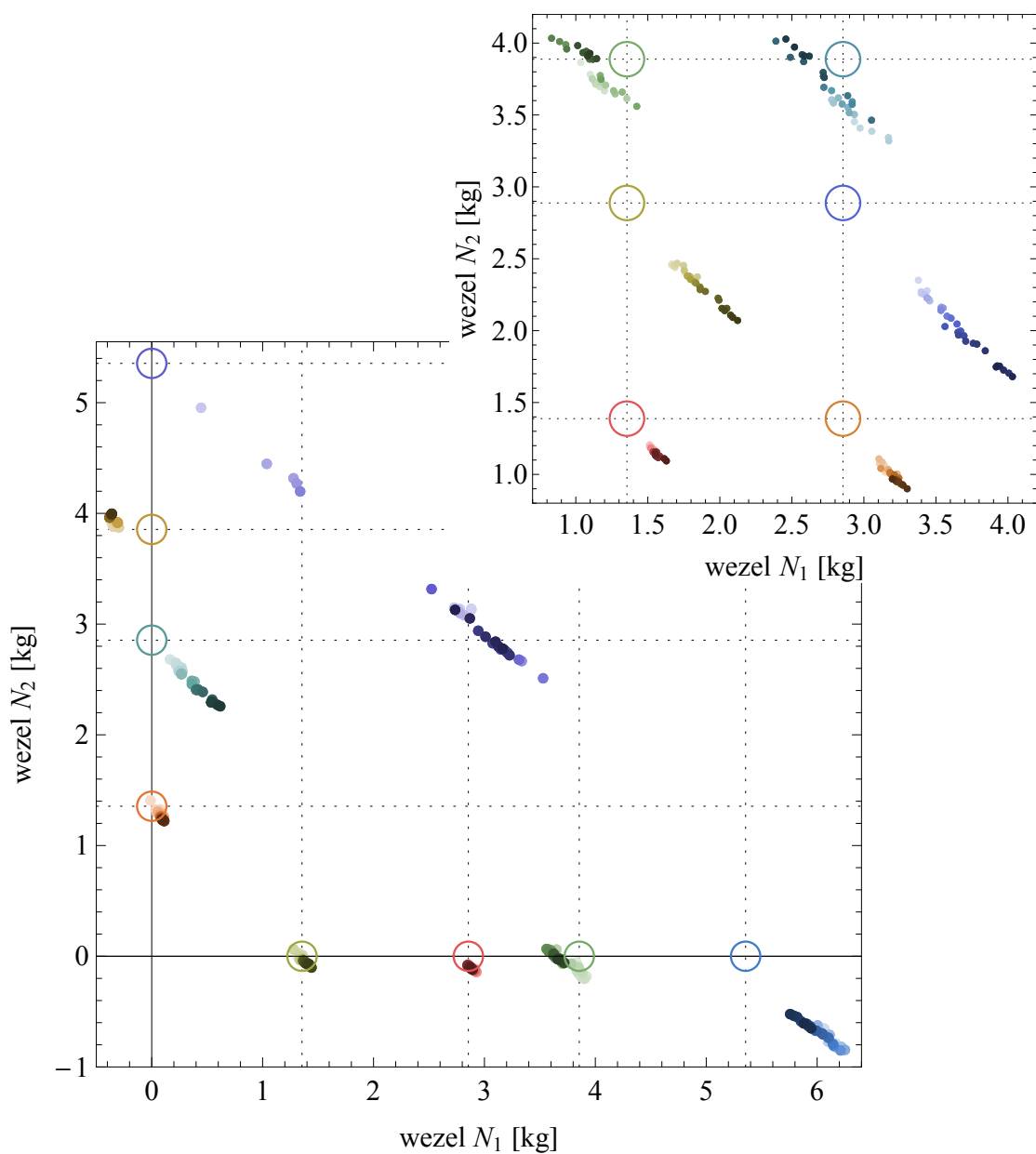
Rysunek 6-11: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie czasu (masa M_4 w węźle N_2 , największa wartość funkcji celu — najgorsze dopasowanie): porównanie zmierzonych i nieparametrycznie modelowanych odpowiedzi konstrukcji

Tabela 6.6: Identyfikacja w dziedzinie czasu mas dodanych w węzłach skrajnych N_1 i N_3 przy wykorzystaniu 15 000 próbek czasowych: masy dodane i zidentyfikowane oraz błąd względny według (6.1). Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 13.8% i 6.2%

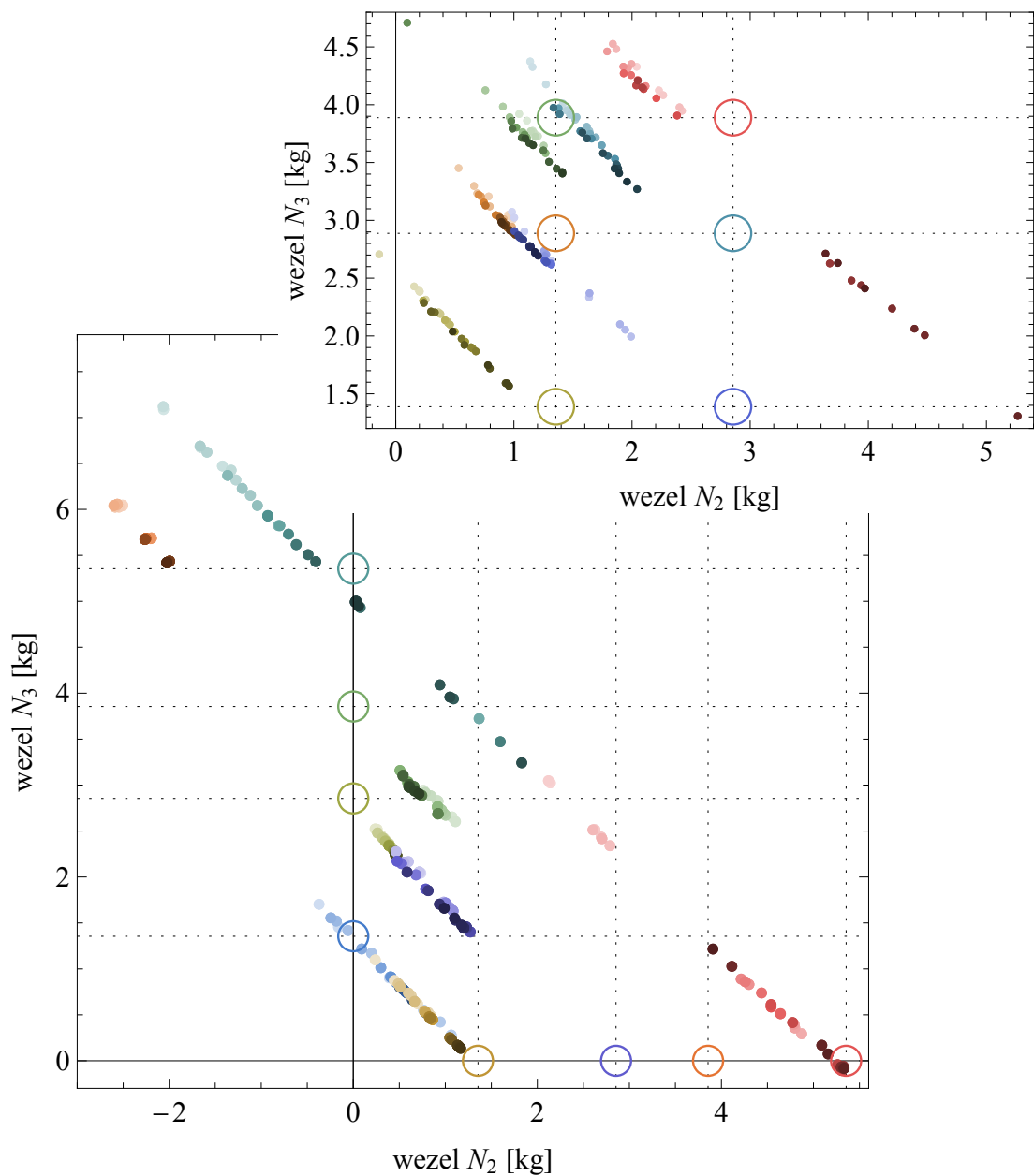
Lp.	Masy dodane [kg]		Masy zidentyfikowane [kg]		Błąd względny [%]	
	Węzeł N_1	Węzeł N_3	Węzeł N_1	Węzeł N_3	Węzeł N_1	Węzeł N_3
1	1.355	1.388	1.387	1.168	1.2	-8.0
2	2.855	1.388	3.054	1.072	4.7	-7.4
3	1.355	2.888	1.771	2.286	9.8	-14.2
4	2.855	2.888	3.062	2.391	3.6	-8.6
5	1.355	3.888	0.932	3.766	-8.1	-2.3
6	2.855	3.888	2.707	3.583	-2.2	-4.5
7	1.355	0.000	1.475	-0.111	8.9	-8.2
8	2.855	0.000	2.575	0.108	-9.8	3.8
9	3.855	0.000	3.617	-0.003	-6.2	-0.1
10	5.355	0.000	5.594	-0.358	4.5	-6.7
11	0.000	1.355	0.307	1.076	22.6	-20.6
12	0.000	2.855	0.521	2.315	18.3	-18.9
13	0.000	3.855	1.312	2.677	34.0	-30.6
14	0.000	5.355	-1.217	5.830	-22.7	8.9

Tabela 6.7: Identyfikacja w dziedzinie czasu mas dodanych w węzłach N_1 i N_2 przy wykorzystaniu 15 000 próbek czasowych: masy dodane i zidentyfikowane oraz błąd względny obliczony zgodnie z (6.1). Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 16.5% i 3.9%

Lp.	Masy dodane [kg]		Masy zidentyfikowane [kg]		Błąd względny [%]	
	Węzeł N_1	Węzeł N_2	Węzeł N_1	Węzeł N_2	Węzeł N_1	Węzeł N_2
1	1.355	1.388	1.629	1.094	10.0	-10.7
2	2.855	1.388	3.197	0.969	8.1	-9.9
3	1.355	2.888	2.123	2.071	18.1	-19.3
4	2.855	2.888	3.918	1.747	18.5	-19.9
5	1.355	3.888	1.098	3.928	-4.9	0.8
6	2.855	3.888	2.518	3.972	-5.0	1.3
7	1.355	0.000	1.419	-0.071	4.7	-5.3
8	2.855	0.000	2.888	0.116	1.2	-4.1
9	3.855	0.000	3.660	-0.027	-5.1	-0.7
10	5.355	0.000	5.884	-0.606	9.9	-11.3
11	0.000	1.355	0.073	1.252	5.4	-7.6
12	0.000	2.855	0.618	2.258	21.6	-20.9
13	0.000	3.855	-0.359	3.997	9.3	3.7
14	0.000	5.355	2.735	3.129	51.1	-41.6



Rysunek 6-13: Identyfikacja w dziedzinie czasu mas dodanych w węzłach N_1 i N_2 dwóch mas dodanych w dziedzinie czasu, wynik identyfikacji w zależności od długości uwzględnianej w obliczeniach odpowiedzi konstrukcji: (wykres górny) obie dodane masy niezerowe; (wykres dolny) jedna z mas dodanych zerowa. Okręgi oznaczają rzeczywiste wartości mas dodanych; punkty oznaczają wyniki identyfikacji dla odpowiedzi długości od 7500 próbek czasowych (jasne punkty) do 15 000 próbek czasowych (punkty ciemne) z krokiem co 250 próbek



Rysunek 6-14: Identyfikacja w dziedzinie czasu mas dodanych w węzłach N_2 i N_3 dwóch mas dodanych w dziedzinie czasu, wynik identyfikacji w zależności od długości uwzględnianej w obliczeniach odpowiedzi konstrukcji: (wykres górny) obie dodane masy niezerowe; (wykres dolny) jedna z mas dodanych zerowa. Okręgi oznaczają rzeczywiste wartości mas dodanych; punkty oznaczają wyniki identyfikacji dla odpowiedzi długości od 7500 próbek czasowych (jasne punkty) do 15 000 próbek czasowych (punkty ciemne) z krokiem co 250 próbek

Tabela 6.8: Identyfikacja w dziedzinie czasu mas dodanych w węzłach N_2 i N_3 przy wykorzystaniu 15 000 próbek czasowych: masy dodane i zidentyfikowane oraz błąd względny obliczony zgodnie z (6.1). Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 49.1% i 7.1%

Lp.	Masy dodane [kg]		Masy zidentyfikowane [kg]		Błąd względny [%]	
	Węzeł N_2	Węzeł N_3	Węzeł N_2	Węzeł N_3	Węzeł N_2	Węzeł N_3
1	1.355	1.388	0.481	2.039	-31.8	23.7
2	2.855	1.388	1.178	2.726	-39.5	31.5
3	1.355	2.888	0.895	2.985	-10.9	2.3
4	2.855	2.888	1.957	3.334	-15.6	7.8
5	1.355	3.888	1.410	3.405	1.1	-9.2
6	2.855	3.888	3.971	2.411	16.6	-21.9
7	1.355	0.000	1.167	0.135	13.9	9.9
8	2.855	0.000	0.988	1.660	-65.4	58.1
9	3.855	0.000	-2.026	5.421	-152.6	140.6
10	5.355	0.000	3.908	1.216	-27.0	22.7
11	0.000	1.355	0.830	0.485	61.2	-64.2
12	0.000	2.855	0.552	2.142	19.3	-25.0
13	0.000	3.855	0.714	2.905	18.5	-24.7
14	0.000	5.355	0.056	4.949	1.1	-7.6

Charakterystyczną cechą wyników jest ich bardzo duża wrażliwość względem liczby próbek czasowych wykorzystanych podczas obliczeń, co widoczne jest zwłaszcza w wypadku pary węzłów N_2 i N_3 . Dla celów porównawczych, w dalszej części przeanalizowano wyniki otrzymane przy użyciu odpowiedzi pełnej długości (15 000 próbek czasowych), podobnie jak to miało miejsce w wypadku identyfikacji pojedynczej modyfikacji masy.

Błąd względny identyfikacji poszczególnych mas (wyznaczonych przy użyciu odpowiedzi pełnej długości i dla wszystkich rozważanych par węzłów) mieścił się w zakresie od -152.6% do 140.6% , a względny błąd średniokwadratowy wyniósł 30.9% i był ponad sześciokrotnie większy niż w przypadku identyfikacji masy pojedynczego odważnika. Tak wysokie wartości błędów względnych podważają praktyczny sens identyfikacji. Należy jednak zauważyć, że:

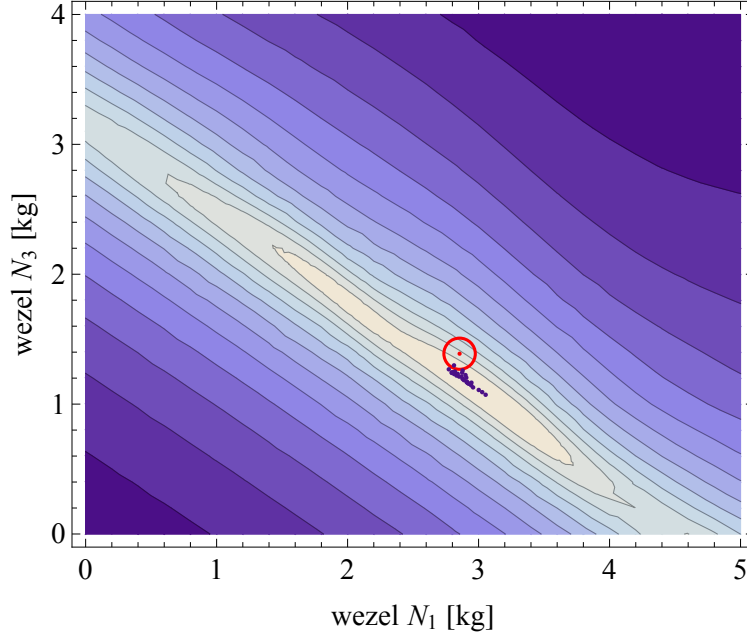
- W wypadku identyfikacji mas odważników przytwierdzonych do dwóch węzłów skrajnych N_1 i N_3 (patrz rys. 6-12 i tabela 6.6), względne błędy identyfikacji były znacząco niższe i mieściły się w zakresie od -30.6% do 34.0% z wartością średniokwadratową na akceptowalnym poziomie 13.8% . W tym wypadku większa dokładność identyfikacji wynika z większego fizycznego oddalenia punktów mocowania odważników i — w porównaniu do odważników umieszczonych w węzłach sąsiednich — ich bardziej zróżnicowanego wpływu na odpowiedź konstrukcji.

- W wypadku jednoczesnej niezerowej masy obu odważników (górne wykresy na rys. 6-12, 6-13 i 6-14), średniokwadratowy błąd względny identyfikacji był około dwukrotnie niższy niż w wypadku ogólnym. Dla niezerowych modyfikacji wszystkich trzech par węzłów wynosił on 14.8% (zakres od -39.5% do 31.5%), a dla niezerowych modyfikacji jedynie w węzłach skrajnych (N_1 i N_3) tylko 7.2% (zakres od -14.2% do 9.8%).

Niska dokładność identyfikacji wiąże się ze złym uwarunkowaniem numerycznym zadania (co jest widoczne zwłaszcza dla modyfikacji w sąsiednich parach węzłów) oraz z małym stosunkiem wykorzystywanego w obliczeniach sygnału użytecznego do szumu pomiarowego w zakresie wysokich częstotliwości. Świadczy o tym kształt funkcji celu, której warstwie dla przykładowej pary odważników o masie 2.855 kg i 1.388 kg umieszczonych w węzłach skrajnych N_1 i N_3 (obliczone dla odpowiedzi pełnej długości) pokazano na rys. 6-15. Kształt funkcji celu przypomina długą wąską dolinę. Takie jej ukształtowanie pozwala na łatwe znalezienie dna doliny, co odpowiada identyfikacji pewnej ważonej sumy mas odważników (w przybliżeniu ich masy sumarycznej). Precyzyjne rozróżnienie mas poszczególnych odważników w obecności szumu pomiarowego jest natomiast zadaniem bardzo trudnym ze względu na brak wyraźnego minimum wzdłuż dna doliny, co jest powodem występowania znacznego rozrzutu wzdłuż przybliżonego dna doliny wartości zidentyfikowanych przy wykorzystaniu odpowiedzi różnej długości. Potwierdza to również relatywnie duża względna dokładność identyfikacji sumarycznej modyfikacji masy (suma mas odważników): błędy względne mieściły się w zakresie od -13.9% do 3.5% z wartością średniokwadratową równą 6.2% i były znacząco niższe od błędów względnych identyfikacji poszczególnych mas.

Należy zauważyć, że — zwłaszcza w przypadkach gdy jedna z identyfikowanych modyfikacji jest zerowa — zidentyfikowane wartości niektórych modyfikacji mogą być ujemne, patrz dolne wykresy na rys. 6-12, 6-13 i 6-14. W eksperymencie identyfikowane są masy odważników przytwierdzonych fizycznie do konstrukcji, a więc wyniki ujemne są jedynie niefizycznym efektem zastosowania optymalizacji funkcji celu bez ograniczeń. W dalszych rozważanych przypadkach wykorzystywana będzie zatem optymalizacja z fizycznymi ograniczeniami w postaci wymagania nieujemności identyfikowanych niewiadomych mas odważników. W celu umożliwienia ilościowego porównania dokładności identyfikacji w dziedzinie czasu i dziedzinie Laplace’a, obliczono błędy względne wyników identyfikacji również przy założeniu wyżej wymienionych ograniczeń. Dla poszczególnych mas mieściły się one w zakresie od -100.0% do 82.7% z wartością średniokwadratową równą 25.2% , natomiast dla całkowitej modyfikacji masy zakres błędów względnych rozciągał się od -18.3% do 9.5% z wartością średniokwadratową równą 6.4% . Narzucenie fizycznych ograniczeń zmniejszyło względne błędy identyfikacji poszczególnych mas oraz zwiększyło błędy względne identyfikacji sumarycznej modyfikacji masy.

Odpowiadające przypadkowi zilustrowanemu na rys. 6-15 przykładowe zmierzone i obliczone przebiegi czasowe odpowiedzi konstrukcji porównano na rys. 6-16: zmierzoną odpowiedź $\mathbf{u}^L(t)$ konstrukcji referencyjnej, zmierzoną odpowiedź $\mathbf{u}^M(t)$ konstrukcji z dodaną masą oraz najlepiej dopasowaną obliczoną odpowiedź $\mathbf{u}(t)$ konstrukcji z modelowaną masą (wartości mas dodanych odpowiadają minimum funkcji celu, a więc



Rysunek 6-15: Identyfikacja dwóch mas dodanych w dziedzinie czasu: warstwice przykładowej funkcji celu (skala logarytmiczna) dla wypadku identyfikacji masy odważnika 2.855 kg w węźle N_1 i 1.388 kg w węźle N_3 . Okrąg oznacza rzeczywiste wartości mas dodanych, punkty — wartości zidentyfikowane przy wykorzystaniu różnej liczby próbek czasowych (od 7500 do 15 000)

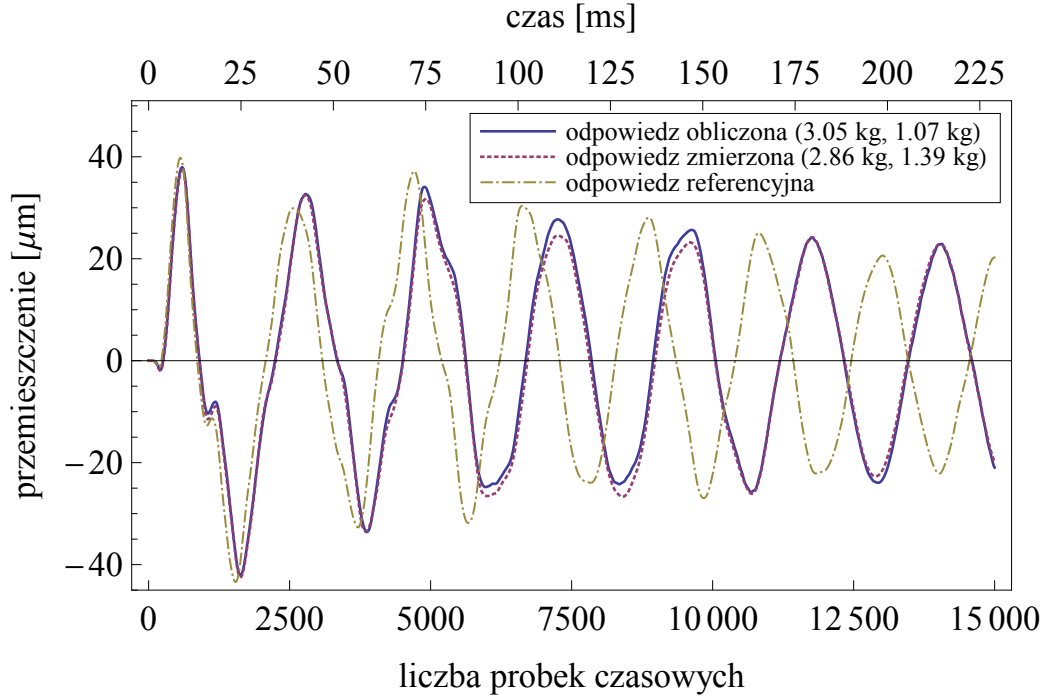
masom zidentyfikowanym 3.054 kg i 1.072 kg). Należy zauważyć, że uzyskano bardzo dobre odwzorowanie odpowiedzi $\mathbf{u}^M(t)$ zarówno w poziomie amplitudy, jak i częstotliwości drgań układu. Różnica pomiędzy odpowiedziami $\mathbf{u}^L(t)$ i $\mathbf{u}^M(t)$ wynika z mas zamocowanych odważników i umożliwia ich identyfikację.

Trzy masy węzłowe

Z uwagi na niską dokładność jednoczesnej identyfikacji w dziedzinie czasu mas dwóch odważników, widoczną zwłaszcza w wypadku węzłów N_2 i N_3 (rys. 6-14), próby jednoczesnej identyfikacji trzech modyfikacji mas uznano za bezcelowe i ich zaniechano.

6.2.3 Identyfikacja w dziedzinie Laplace'a

Wyniki identyfikacji w dziedzinie czasu zależą od liczby próbek czasowych uwzględnionych w obliczeniach, patrz rys. 6-8. W wypadku identyfikacji w dziedzinie Laplace'a, dokładność identyfikacji zależy od obszaru wiarygodności transformaty, który powinien być wyznaczony zgodnie z uwagami poczynionymi w Części 4.2.4. W ujęciu dyskretnym, patrz Część 4.3.4, wyznaczenie obszaru wiarygodności sprowadza się do określenia dyskretnych zbiorów linii spektralnych \mathbf{L}_ω i współczynników zanikania okna wykładniczego \mathbf{L}_η uwzględnianych w funkcji celu (4.28). We wszystkich poniżej opisanych przypadkach identyfikacji założono stałą wartość funkcji wagowej, to jest $w^2(\omega) = 1$ dla $\omega \in \mathbf{L}_\omega$.



Rysunek 6-16: Identyfikacja dwóch mas dodanych w dziedzinie czasu: porównanie przykładowych zmierzonych i nieparametrycznie modelowanych odpowiedzi konstrukcji (2.855 kg w węźle N_1 i 1.388 kg w węźle N_3)

- *Linie spektralne \mathbf{L}_ω* . Zbiór \mathbf{L}_ω zawierał początkowe linie spektralne odpowiadające listkom głównym transformacji FFT wszystkich eksperymentalnych quasi-impulsowych wymuszeń młotkiem modalnym wykorzystanych w procesie budowy nieparametrycznego modelu konstrukcji. Najszerszy z tych listków miał szerokość ok. 850 Hz, a więc przyjęto, że zbiór \mathbf{L}_ω odpowiada zakresowi od 0 Hz do ok. 850 Hz i zawiera 210 linii spektralnych.
- *Współczynniki zanikania okna wykładniczego \mathbf{L}_η* . Zbiór \mathbf{L}_η wartości współczynników zanikania okna wykładniczego został wyznaczony w procedurze analogicznej jak w wypadku analizy w dziedzinie czasu, to jest na podstawie dokładności identyfikacji pojedynczej masy dodanej (przeprowadzonej przy użyciu pojedynczej wartości współczynnika zanikania okna FFT, a więc efektywnie w dziedzinie częstotliwości). Zbiór wszystkich możliwych wartości η poddano dyskretyzacji z krokiem 0.1 względem wykładnika tłumienia okna na koniec przedziału czasowego, to jest uwzględniono jedynie następujące wartości dyskretne:

$$\eta = -\frac{1}{T} \log_{10} a, \quad a = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, \quad (6.2)$$

gdzie T jest długością przedziału czasowego, i do zbioru \mathbf{L}_η zaliczono te spośród nich, dla których średniokwadratowy błąd względny identyfikacji nie przekraczał wartości 3%, patrz rys. 6-18.

Pojedyncza masa węzłowa

Identyfikację przeprowadzono niezależnie w każdym z 12 przypadków odpowiadającym czterem masom (tabela 6.2) umieszczonym kolejno w każdym z trzech węzłów N_1 , N_2 i N_3 . W celu uniknięcia niestabilności numerycznych, wektor pseudo obciążeń wyznaczano poprzez rozwiązanie równania (4.10) z regularyzacją numeryczną metodą TSVD na poziomie 1% (w dziedzinie czasu efekt regularyzacji osiągnięto poprzez zastosowanie iteracyjnej metody CGLS), patrz Rozdział 5.

Zgodnie z opisaną powyżej procedurą, w celu określenia zbioru \mathbf{L}_η współczynników zanikania okna wykładniczego, identyfikację początkowo przeprowadzono oddzielnie dla każdej pojedynczej wartości współczynnika zanikania wyznaczonej zgodnie z zależnością (6.2). Wyniki identyfikacji przedstawiono na rys. 6-17, a średniokwadratowy błąd identyfikacji na rys. 6-18. Pomimo ewidentnych drobnych nieregularności, spowodowanych wpływem złego uwarunkowania numerycznego równania (4.10), wyniki identyfikacji charakteryzują się dużą dokładnością względną i stabilnością w szerokim zakresie wartości współczynnika zanikania okna wykładniczego. Do zbioru \mathbf{L}_η zaliczono te wartości współczynnika, dla których błąd średniokwadratowy nie przekraczał poziomu 3%, co odpowiadało następującym współczynnikom tłumienia na koniec przedziału czasowego:

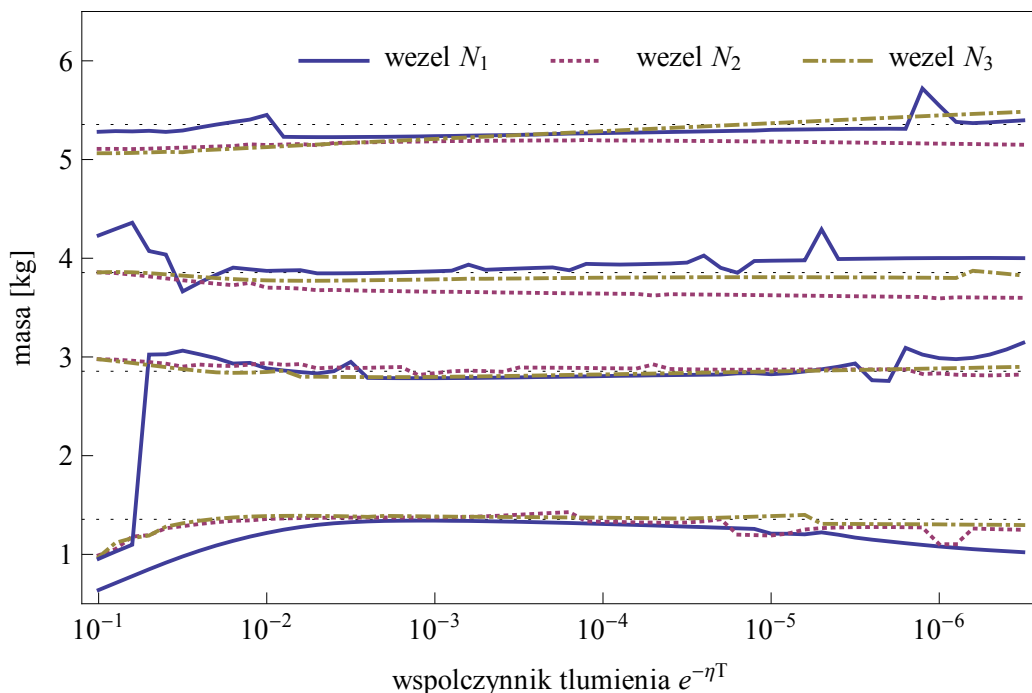
$$\eta = -\frac{1}{T} \log_{10} a, \quad a \in \{2.3, 2.4, \dots, 4.7\}. \quad (6.3)$$

Wyznaczony w ten sposób obszar wiarygodności transformaty Laplace'a wykorzystano następnie w celu przeprowadzenia identyfikacji pojedynczej masy dodanej w dziedzinie Laplace'a, to jest poprzez minimalizację funkcji celu (4.28) przy jednoczesnym użyciu wszystkich wyznaczonych w (6.3) współczynników zanikania okna wykładniczego.

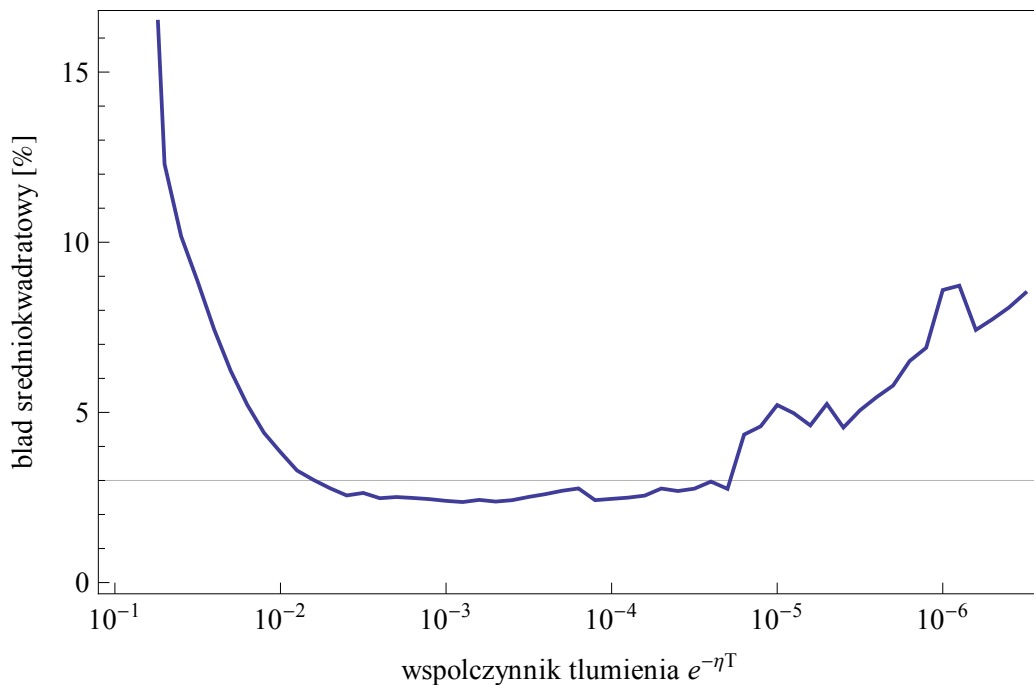
Wykresy wartości znormalizowanych funkcji celu (w skali logarytmicznej) w zależności od wartości masy dodanej w zmodyfikowanym węźle pokazano na rys. 6-19. Wykres jest analogiczny do otrzymanego w dziedzinie czasu rys. 6-19; nieznacznie większa nieregularność przebiegów funkcji celu spowodowana jest wpływem złego uwarunkowania numerycznego równania (4.10). Z wyjątkiem tych drobnych nieregularności, wszystkie funkcje celu są relatywnie gładkie i mają unimodalny charakter, co umożliwia względnie prostą i jednoznaczną identyfikację masy dodanej poprzez lokalizację ich minimów. Rzeczywiste masy odważników zaznaczono przerywanymi liniami pionowymi. Liczbowe wartości zidentyfikowanych mas odważników odpowiadające minimum funkcji celu zamieszczono w tabeli 6.9 wraz z błędem względnym identyfikacji, który mieścił się w zakresie od -5.0% do 5.6% . Średniokwadratowy względny błąd identyfikacji wyniósł 2.9% i był prawie dwukrotnie mniejszy niż w wypadku identyfikacji w dziedzinie czasu (5.4% , patrz tabela 6.9).

Dwie masy węzłowe

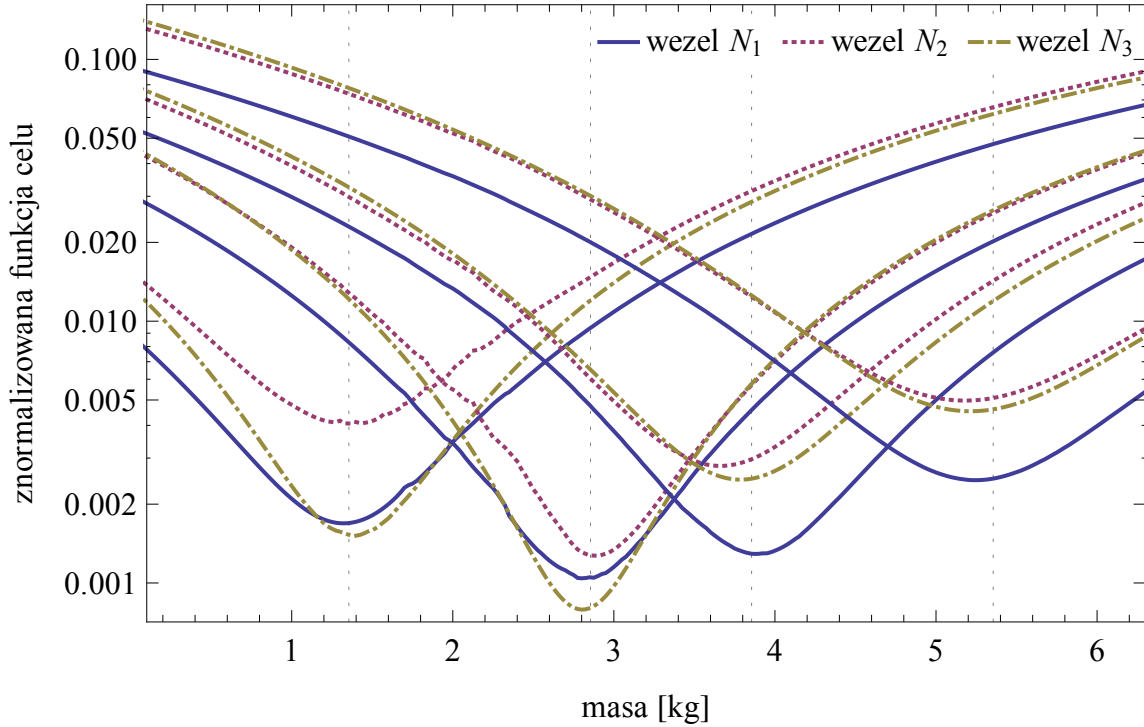
Zaproponowana procedura identyfikacji mas dodanych w dziedzinie Laplace'a pozwala na relatywnie wiarygodną identyfikację mas odważników umieszczonych w dowolnych



Rysunek 6-17: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie częstotliwości: wynik identyfikacji w zależności od wykładnika wartości tłumienia okna wykładniczego na koniec przedziału czasowego, zgodnie z zależnością (6.2). Rzeczywiste wartości mas dodanych są oznaczone za pomocą poziomych linii przerywanych



Rysunek 6-18: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie częstotliwości: średniokwadratowy błąd identyfikacji w zależności od wykładnika wartości tłumienia okna wykładniczego na koniec przedziału czasowego, zgodnie z zależnością (6.2)



Rysunek 6-19: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie Laplace'a: znormalizowane funkcje celu. Rzeczywiste wartości mas dodanych są oznaczone za pomocą pionowych linii przerywanych

Tabela 6.9: Identyfikacja pojedynczej masy dodanej w dziedzinie Laplace'a: masa dodana, masa zidentyfikowana i względny błąd identyfikacji. Średniokwadratowy względny błąd identyfikacji wyniósł 2.9%

Węzeł	Masa dodana [kg]	Masa zidentyfikowana [kg]	Błąd względny [%]
N_1	1.355	1.322	-2.5
N_1	2.855	2.798	-2.0
N_1	3.855	3.879	0.6
N_1	5.355	5.243	-2.1
N_2	1.355	1.431	5.6
N_2	2.855	2.894	1.4
N_2	3.855	3.662	-5.0
N_2	5.355	5.181	-3.3
N_3	1.355	1.380	1.9
N_3	2.855	2.805	-1.7
N_3	3.855	3.786	-1.8
N_3	5.355	5.214	-2.6

Tabela 6.10: Identyfikacja w dziedzinie Laplace’a mas dwóch odważników dodanych w węzłach N_1 i N_3 : masy dodane i masy zidentyfikowane oraz błąd względny identyfikacji obliczony zgodnie z (6.1). Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 6.8% i 3.1%

Lp.	Masy dodane [kg]		Masy zidentyfikowane [kg]		Błąd względny [%]	
	Węzeł N_1	Węzeł N_3	Węzeł N_1	Węzeł N_3	Węzeł N_1	Węzeł N_3
1	1.355	1.388	1.486	1.155	4.8	-8.5
2	2.855	1.388	2.789	1.281	-1.6	-2.5
3	1.355	2.888	1.281	2.758	-1.7	-3.1
4	2.855	2.888	3.384	2.324	9.2	-9.8
5	1.355	3.888	0.946	3.989	-7.8	1.9
6	2.855	3.888	2.809	3.810	-0.7	-1.2
7	1.355	0.000	1.122	0.179	-17.2	13.2
8	2.855	0.000	2.783	0.013	-2.5	0.5
9	3.855	0.000	3.857	0.002	0.1	0.1
10	5.355	0.000	5.233	0.004	2.8	0.1
11	0.000	1.355	0.026	1.363	1.9	0.6
12	0.000	2.855	0.266	2.612	9.3	-8.5
13	0.000	3.855	0.478	3.438	12.4	-10.8
14	0.000	5.355	0.000	5.216	0.0	2.6

z testowanych par węzłów. Stanowi to istotny postęp w porównaniu do identyfikacji w dziedzinie czasu, gdzie w węzłach N_2 i N_3 wiarygodna identyfikacja nie była możliwa.

Podczas identyfikacji wykorzystano wyznaczony powyżej obszar wiarygodności transformaty Laplace’a (zakres częstotliwości od 0 Hz do ok. 850 Hz, zakres współczynników zanikania okna wykładniczego według zależności (6.3), to jest odpowiadający tłumieniu na koniec przedziału czasowego w zakresie od $10^{-2.3}$ do $10^{-4.7}$). Na podstawie doświadczeń z identyfikacją w dziedzinie czasu, gdzie w wielu wypadkach jedna ze zidentyfikowanych mas miała niefizyczną wartość ujemną, postanowiono przeprowadzić identyfikację z ograniczeniami do dziedziny mającej sens fizyczny: założono, że wartości mas są nieujemne. Wyniki identyfikacji z ograniczeniami, narzuconymi metodą zewnętrznej funkcji kary, dla wszystkich par węzłów oraz odpowiadające im błędy względne obliczone zgodnie z (6.1) przedstawiono w tabeli 6.10 (węzły N_1 i N_3), tabeli 6.11 (węzły N_1 i N_2) oraz tabeli 6.12 (węzły N_2 i N_3).

Analizując wyniki można poczynić następujące istotne obserwacje:

- Błąd względny identyfikacji poszczególnych mas (we wszystkich trzech parach węzłów) mieścił się w zakresie od -17.2% do 13.2% , a względny błąd średniokwadratowy wyniósł 5.9% . W porównaniu z przypadkiem identyfikacji z ograniczeniami dwóch mas w dziedzinie czasu, długość zakresu błędu względnego identyfikacji jest około sześciokrotnie mniejsza, a względny błąd średniokwadratowy jest ponad czterokrotnie mniejszy. Średniokwadratowy względny błąd

Tabela 6.11: Identyfikacja w dziedzinie Laplace’a mas dwóch odważników dodanych w węzłach N_1 i N_2 : masy dodane i masy zidentyfikowane oraz błąd względny identyfikacji obliczony zgodnie z (6.1). Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 6.5% i 4.2%

Lp.	Masy dodane [kg]		Masy zidentyfikowane [kg]		Błąd względny [%]	
	Węzeł N_1	Węzeł N_2	Węzeł N_1	Węzeł N_2	Węzeł N_1	Węzeł N_2
1	1.355	1.388	1.230	1.296	4.6	-3.7
2	2.855	1.388	2.855	1.388	0.0	0.0
3	1.355	2.888	0.816	3.162	-12.7	6.5
4	2.855	2.888	2.787	2.795	1.2	-1.6
5	1.355	3.888	0.674	4.132	-13.0	4.6
6	2.855	3.888	2.537	3.894	-4.7	0.1
7	1.355	0.000	1.130	0.164	-16.6	12.1
8	2.855	0.000	2.800	0.000	-1.9	0.0
9	3.855	0.000	3.879	0.000	0.6	0.0
10	5.355	0.000	5.243	0.000	2.1	0.0
11	0.000	1.355	0.001	1.365	0.1	0.8
12	0.000	2.855	0.000	2.855	0.0	0.0
13	0.000	3.855	0.092	3.596	2.4	-6.7
14	0.000	5.355	0.597	4.746	11.1	11.4

Tabela 6.12: Identyfikacja w dziedzinie Laplace’a mas dwóch odważników dodanych w węzłach N_2 i N_3 : masy dodane i masy zidentyfikowane oraz błąd względny identyfikacji obliczony zgodnie z (6.1). Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 4.1% i 3.6%

Lp.	Masy dodane [kg]		Masy zidentyfikowane [kg]		Błąd względny [%]	
	Węzeł N_2	Węzeł N_3	Węzeł N_2	Węzeł N_3	Węzeł N_2	Węzeł N_3
1	1.355	1.388	1.157	1.461	-7.2	2.7
2	2.855	1.388	2.758	1.275	-2.3	-2.7
3	1.355	2.888	1.243	2.809	-2.6	-1.7
4	2.855	2.888	2.093	3.409	-13.3	9.1
5	1.355	3.888	1.232	3.784	-2.4	-2.0
6	2.855	3.888	2.614	3.827	-3.6	-0.9
7	1.355	0.000	1.364	0.004	0.7	0.3
8	2.855	0.000	2.855	0.000	0.0	0.0
9	3.855	0.000	3.662	0.000	-5.0	0.0
10	5.355	0.000	5.181	0.000	-3.3	0.0
11	0.000	1.355	0.027	1.359	2.0	0.3
12	0.000	2.855	0.053	2.753	1.9	-3.6
13	0.000	3.855	0.167	3.624	4.3	-6.0
14	0.000	5.355	0.000	5.215	0.0	2.6

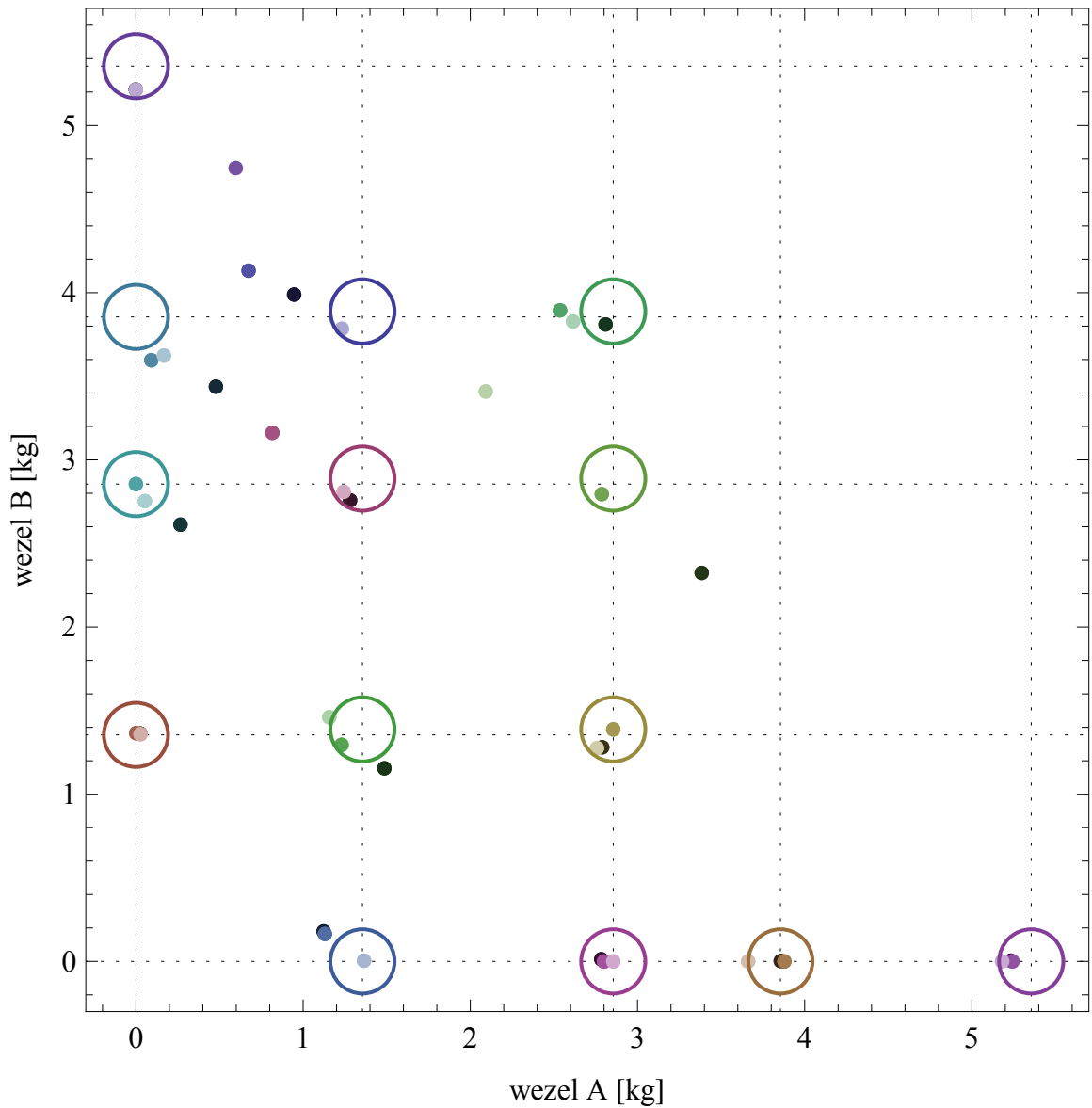
identyfikacji dwóch mas w dziedzinie Laplace'a (5.9%) jest porównywalny ze średniokwadratowym względnym błędem identyfikacji pojedynczej masy w dziedzinie czasu (5.4%).

- Błąd względny identyfikacji mas dwóch odważników (5.9%) był około dwukrotnie większy niż w przypadku identyfikacji masy pojedynczego odważnika (2.9%). Podobny efekt, choć w znacznie większym stopniu, występował również podczas identyfikacji w dziedzinie czasu (5.4% vs. 25.2%, identyfikacja z ograniczeniami). Fakt ten wiąże się ze złym uwarunkowaniem numerycznym zadania, o czym świadczy kształt funkcji celu, której warstwicę dla przykładowej pary odważników o masie 2.855 kg i 1.388 kg umieszczonych odpowiednio w węzłach N_1 i N_3 pokazano na rys. 6-21. Podobnie jak w wypadku analogicznej funkcji celu sformułowanej w dziedzinie czasu i pokazanej na rys. 6-15 — choć w znacznie mniejszym stopniu — kształt funkcji celu przypomina długą wąską dolinę, co pozwala na łatwe znalezienie dna doliny (identyfikacja pewnej ważonej sumy mas odważników, w przybliżeniu ich masy sumarycznej), ale utrudnia lokalizację minimum wzdłuż tego dna (precyzyjne rozróżnienie mas poszczególnych odważników).
- Błędy względne identyfikacji całkowitej modyfikacji masy mieściły się w zakresie od -8.3% do 2.5% z wartością średniokwadratową równą 3.6% i — podobnie jak w wypadku identyfikacji w dziedzinie czasu — były znacząco niższe od błędów względnych identyfikacji poszczególnych mas. W porównaniu z przypadkiem identyfikacji dwóch mas w dziedzinie czasu, długość zakresu błędu względnego identyfikacji oraz względny błąd średniokwadratowy były odpowiednio około trzy i dwa razy mniejsze.

Trzy masy węzłowe

Zaproponowana procedura identyfikacji mas dodanych w dziedzinie Laplace'a pozwala na relatywnie wiarygodną jednoczesną identyfikację mas dodanych w trzech węzłach, co było niemożliwe w wypadku sformułowania w dziedzinie czasu. Podczas identyfikacji wykorzystano wyznaczony wcześniej obszar wiarygodności transformaty Laplace'a. Identyfikację przeprowadzono z ograniczeniami: przyjęto fizyczne założenie, że wartości identyfikowanych mas są nieujemne, a ograniczenia zaimplementowano przy wykorzystaniu techniki zewnętrznej kwadratowej funkcji kary. Wyniki identyfikacji z ograniczeniami oraz odpowiadające im błędy względne obliczone zgodnie z zależnością (6.1) przedstawiono w tabeli 6.13, numeracja przypadków kombinacji mas odpowiada podanej w tabeli 6.4.

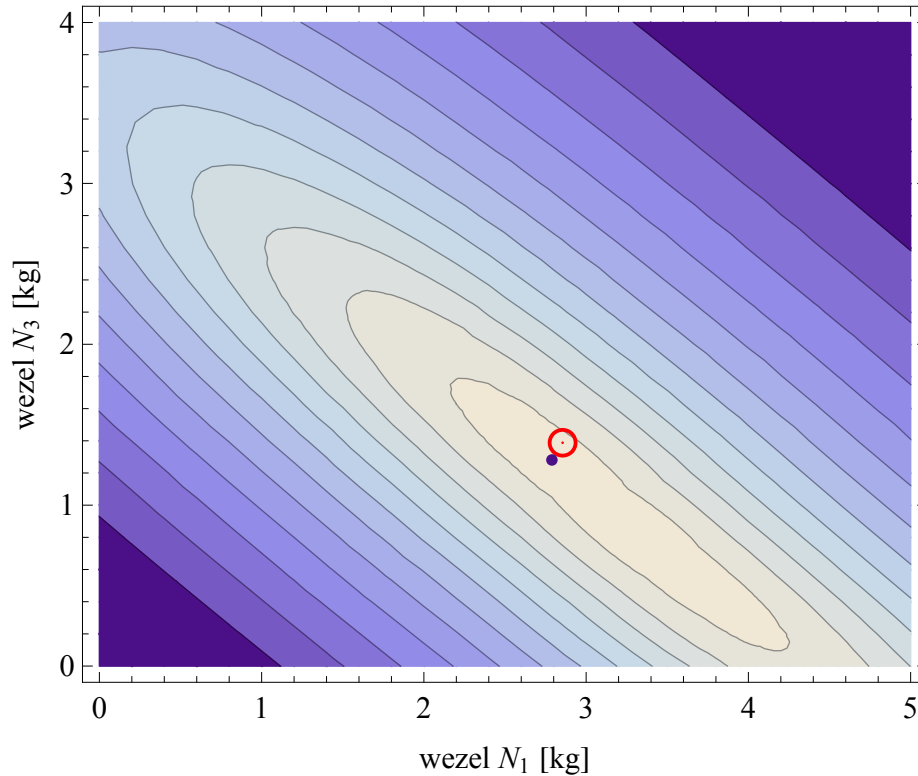
Średniokwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 5.6% (zakres od -21.6% do 18.2%) oraz 3.7% (zakres od -8.2% do 2.7%) i były porównywalne z odpowiednimi wartościami błędów względnych otrzymanymi w wypadku jednoczesnej identyfikacji mas jedynie dwóch odważników.



Rysunek 6-20: Identyfikacja w dziedzinie Laplace'a dwóch mas dodanych. Okręgi oznaczają rzeczywiste wartości mas dodanych; punkty oznaczają wyniki identyfikacji dla węzłów A i B równych odpowiednio N_1 i N_3 (punkty ciemne), N_1 i N_2 (punkty o pośredniej jasności) oraz N_2 i N_3 (punkty jasne)

Tabela 6.13: Identyfikacja w dziedzinie Laplace'a mas dodanych w trzech węzłach: masy zidentyfikowane oraz odpowiadający im błąd względny identyfikacji obliczony zgodnie z (6.1). Rzeczywiste wartości mas dodanych podane są w tabeli 6.4. Średnio-kwadratowe błędy względne identyfikacji poszczególnych mas i całkowitej modyfikacji masy wyniosły odpowiednio 5.6% i 3.7%

Lp.	Masy zidentyfikowane [kg]			Błąd względny [%]		
	Węzeł N_1	Węzeł N_2	Węzeł N_3	Węzeł N_1	Węzeł N_2	Węzeł N_3
1	1.063	0.115	0.112	-21.6	8.5	8.2
2	2.785	0.000	0.013	-2.4	0.0	0.4
3	3.857	0.000	0.002	0.0	0.0	0.1
4	5.232	0.004	0.004	-2.3	0.1	0.1
5	0.001	1.364	0.004	0.1	0.7	0.3
6	0.000	2.855	0.000	0.0	0.0	0.0
7	0.011	3.651	0.007	0.3	-5.3	0.2
8	0.000	5.355	0.000	0.0	0.0	0.0
9	0.013	0.021	1.358	0.9	1.5	0.2
10	0.299	0.022	2.563	10.5	0.8	-10.2
11	0.506	0.022	3.387	13.1	0.6	-12.2
12	0.000	0.000	5.215	0.0	0.0	-2.6
13	1.168	1.348	0.001	-6.8	-1.5	0.0
14	3.221	0.709	0.295	8.6	-16.	6.9
15	1.187	2.873	0.000	-4.0	-0.4	0.0
16	2.787	2.822	0.001	-1.2	-1.2	0.0
17	1.162	3.710	0.009	-3.7	-3.4	0.2
18	2.726	3.748	0.001	-1.9	-2.1	0.0
19	1.418	0.021	1.181	2.3	0.8	-7.5
20	2.876	0.009	1.200	0.5	0.2	-4.4
21	1.282	0.001	2.759	-1.7	0.0	-3.0
22	2.821	0.008	2.750	-0.6	0.1	-2.4
23	0.969	0.000	3.972	-7.4	0.0	1.6
24	2.852	0.000	3.883	0.0	0.0	-0.1
25	0.007	1.159	1.451	0.3	-7.1	2.3
26	0.003	2.756	1.266	0.1	-2.3	-2.9
27	0.007	1.200	2.784	0.2	-3.6	-2.5
28	0.270	2.175	3.132	4.7	-11.8	4.2
29	0.955	0.786	3.578	18.2	-10.9	-5.9
30	0.766	2.463	3.461	11.4	-5.8	-6.3



Rysunek 6-21: Identyfikacja dwóch mas dodanych w dziedzinie Laplace'a: warstwi-
ce przykładowej funkcji celu (skala logarytmiczna) dla wypadku identyfikacji masy
odważnika 2.855 kg w węźle N_1 i 1.388 kg w węźle N_3 . Okrąg oznacza rzeczywiste
wartości mas dodanych; ciemny punkt oznacza zidentyfikowane wartości mas

6.2.4 Dyskusja wyników

W przypadku identyfikacji w dziedzinie czasu istotnym parametrem wpływającym na dokładność wyników jest długość odpowiedzi, czyli liczba próbek czasowych, która bezpośrednio określa na rozmiar kluczowego równania (2.19b). W przypadku identyfikacji w dziedzinie Laplace'a takim parametrem okazał się współczynnik zanikania okna wykładniczego, a dokładniej wykorzystany w obliczeniach zakres jego zmienności. Obliczenia dla celów porównawczych wykonano dla następujących wartości tych parametrów, które zostały wyznaczone zgodnie z opisaną w poprzednich punktach procedurą na podstawie analizy wyników wstępnej identyfikacji pojedynczej masy:

- Podczas identyfikacji w dziedzinie czasu wykorzystano odpowiedzi pełnej długości, to jest 15 000 próbek czasowych.
- Podczas identyfikacji w dziedzinie Laplace'a wykorzystano zakres zmienności zgodny z (6.3), to jest odpowiadający współczynnikowi tłumienia okna wykładniczego na koniec odcinka czasowego w zakresie od $10^{-2.3}$ do $10^{-4.7}$.

Wartości procentowe minimalnych, maksymalnych i średniokwadratowych błędów względnych wyników identyfikacji z ograniczeniami (nieujemne wartości modyfikacji)

Tabela 6.14: Identyfikacja modyfikacji masy: wartości procentowe minimalnych, maksymalnych i średniokwadratowych błędów względnych wyników w wypadku identyfikacji z ograniczeniami (masy nieujemne). Wartości obliczone zgodnie z (6.1)

	poszczególne odważniki			masa sumaryczna		
	min [%]	max [%]	rms [%]	min [%]	max [%]	rms [%]
pojedyncza modyfikacja masy						
dziedz. czasu	-7.2	2.5	5.4	-7.2	2.5	5.4
dziedz. Laplace'a	-5.0	5.6	2.9	-5.0	5.6	2.9
dwie modyfikacje masy						
dziedz. czasu	-100.0	82.7	25.2	-18.3	9.5	6.4
dziedz. Laplace'a	-17.2	13.2	5.9	-8.3	2.5	3.6
trzy modyfikacje masy						
dziedz. czasu	—	—	—	—	—	—
dziedz. Laplace'a	-21.6	18.2	5.6	-8.2	2.7	3.7

jednej, dwóch i trzech modyfikacji oraz sumarycznej masy modyfikacji zostały zebrane w tabeli 6.14. Wartości obliczono zgodnie z (6.1). Wyniki jednoznacznie świadczą na korzyść procedury identyfikacji w dziedzinie Laplace'a, której zalety — w porównaniu do identyfikacji w dziedzinie czasu — można podsumować następująco:

- *Lepsza dokładność.* We wszystkich porównywanych scenariuszach modyfikacji wyniki identyfikacji w dziedzinie Laplace'a były istotnie dokładniejsze od wyników otrzymanych w dziedzinie czasu, zarówno w kategoriach zakresu błędów, jak i średniokwadratowego błędu względnego. Przykładowo:
 - Niezależnie od scenariusza modyfikacji, średniokwadratowy błąd względny identyfikacji był w dziedzinie Laplace'a od około dwukrotnie do około czterokrotnie mniejszy niż w dziedzinie czasu.
 - Średniokwadratowy błąd względny jednoczesnej identyfikacji trzech mas w dziedzinie Laplace'a był w przybliżeniu równy średniokwadratowemu błędowi względnemu identyfikacji w dziedzinie czasu jedynie pojedynczej modyfikacji masy.
- *Większe możliwości identyfikacji.* Wiarygodna jednoczesna identyfikacja trzech mas w dziedzinie czasu była niemożliwa, a identyfikacja dwóch mas obciążona była wysokim średniokwadratowym błędem względnym równym 25.2%. Wiarygodna identyfikacja w dziedzinie Laplace'a była możliwa w obu wypadkach ze średniokwadratowym błędem względnym nie przekraczającym akceptowalnej wartości 5.9%.
- *Krótszy czas obliczeń.* Czas identyfikacji w dziedzinie Laplace'a był krótszy dwa do trzech rzędów wielkości od czasu identyfikacji w dziedzinie czasu. Dla komputera klasy PC odpowiadało to czasowi obliczeń równemu odpowiednio pojedynczym sekundom (dziedzina Laplace'a) i około godzinie (dziedzina czasu).

Poprawa dokładności i możliwości identyfikacji w dziedzinie Laplace'a w porównaniu do procedury w dziedzinie czasu wynika z pominięcia w procesie identyfikacji informacji pomiarowych związanych z wyższymi częstotliwościami (nieobecny w eksperymentalnie stosowanym wymuszeniu, a więc o charakterze przypadkowego szumu pomiarowego) oraz z uwzględnienia wielu wartości współczynnika zanikania okna wykładniczego. Oba te zabiegi pozwoliły na znaczne zwiększenie stosunku użytecznego sygnału do szumu (ang. signal to noise ratio, SNR), a więc wyeliminowanie znacznej części błędów związanych z inherentnym złym uwarunkowaniem numerycznym zadania. Istotne zmniejszenie czasu identyfikacji wynika natomiast z przeprowadzenia operacji (rozwikłania) splotu w dziedzinie Laplace'a, gdzie jest ona znacznie mniej czasochłonna, niż w dziedzinie czasu, oraz z pominięcia w obliczeniach znacznej liczby linii spektralnych odpowiadającym wyższym częstotliwościom i tak nieobecnym w eksperymentalnie stosowanym wymuszeniu.

W niektórych zastosowaniach istotnym ograniczeniem lub wadą metodologii modelowania i identyfikacji w dziedzinie Laplace'a jest natomiast:

- *Brak przebiegów czasowych odpowiedzi.* W metodologii sformułowanej w dziedzinie czasu, nieparametrycznie modelowane, wiarygodne przebiegi czasowe odpowiedzi konstrukcji zmodyfikowanej obliczane są wprost i stanowią inherentny element procedury identyfikacji. Przy stosowaniu procedury sformułowanej w dziedzinie Laplace'a, takie przebiegi należy odtworzyć na podstawie ich nieparametrycznie modelowanych transformat Laplace'a, to jest przy zastosowaniu odwrotnej transformacji Laplace'a, co — zwłaszcza w wypadku transformaty danej w postaci dyskretnych punktów w ograniczonej dziedzinie wiarygodności — jest operacją nieoczywistą i zazwyczaj wymagającą dodatkowego procesu optymalizacyjnego i regularyzacji numerycznej [169,170]. Należy również zauważyć, że procesy regularyzacji numerycznej rozwiązania w obu zaproponowanych tutaj sformułowaniach są przeprowadzane innymi metodami (iteracyjna metoda CGLS oraz progowanie wartości osobliwych TSVD) i w innych dziedzinach (czasu oraz Laplace'a), a więc nie muszą być sobie równoważne: odpowiednio zregularyzowana numerycznie odpowiedź w dziedzinie Laplace'a niekoniecznie odpowiada wystarczająco zregularyzowanej odpowiedzi w dziedzinie czasu i odwrotnie.

6.3 Identyfikacja modyfikacji sztywności

W tej części rozdziału zamieszczono i omówiono wyniki identyfikacji redukcji sztywności osiowej elementu o dyskretnie zmiennej sztywności, który został opisany w Części 6.1.3 i przedstawiony na rys. 6-4. Identyfikację przeprowadzono niezależnie przy wykorzystaniu opracowanych sformułowań w dziedzinie czasu i w dziedzinie Laplace'a; w obu wypadkach zastosowano te same dane wejściowe składające się na nieparametryczny model konstrukcji oraz te same scenariusze modyfikacji sztywności, co umożliwiło porównanie otrzymanych wyników.

Dane pomiarowe. Dla każdego z pięciu ustawień sztywności osiowej zaprojektowanego elementu, w sposób niezależny zebrano dane pomiarowe tworzące odpowiednie nieparametryczne modele konstrukcji, zredukowane względem elementu o zmiennej sztywności (patrz rys. 6-4), czujnika i punktu przyłożenia wymuszenia testowego $f(t)$. Podobnie, jak w wypadku identyfikacji modyfikacji masy, w procesie identyfikacji w dziedzinie czasu wykorzystano odpowiedzi przemieszczeniowe, natomiast analiza w dziedzinie Laplace’a została wykonana przy użyciu bezpośrednio mierzonych odpowiedzi przyspieszeniowych.

Wymuszenie testowe. Podobnie jak w wypadku identyfikacji modyfikacji masy, w procesie identyfikacji w dziedzinie czasu wykorzystano w roli wymuszenia testowego eksperymentalne quasi impulsowe wymuszenie młotkiem modalnym. Analiza w dziedzinie Laplace’a umożliwiła natomiast wiarygodne odtworzenie (w obszarze wiarygodności transformacji, patrz Część 4.2.4) wymuszenia czysto impulsowego i wykorzystanie go w procesie identyfikacji.

Scenariusze redukcji sztywności. Zaprojektowany i wykonany na potrzeby badań element o dyskretnie zmiennej sztywności osiowej posiadał pięć różnych ustawień przedstawionych w tabeli 6.1. Podczas weryfikacji doświadczalnej każde z tych ustawień (poza ustawieniem o sztywności najmniejszej) traktowano kolejno jako ustawienie referencyjne, a następnie kolejno redukowano sztywność do ustawień o mniejszej sztywności w celu identyfikacji. Na przykład: przy ustawieniu w pozycji nr 5 traktowanej jako referencyjna identyfikowano cztery redukcje sztywności (do ustawień w pozycjach od nr. 1 do nr. 4), następnie przy ustawieniu w pozycji nr 4 traktowanym jako referencyjne identyfikowano trzy redukcje sztywności (do ustawień w pozycjach od nr. 1 do nr. 3), itd. Taka procedura umożliwiła przeprowadzenie identyfikacji w dziesięciu różnych scenariuszach redukcji sztywności. Scenariusze oznaczono symbolem “ $p \rightarrow q$ ”, gdzie p jest numerem pozycji referencyjnej, a q jest numerem pozycji identyfikowanej.

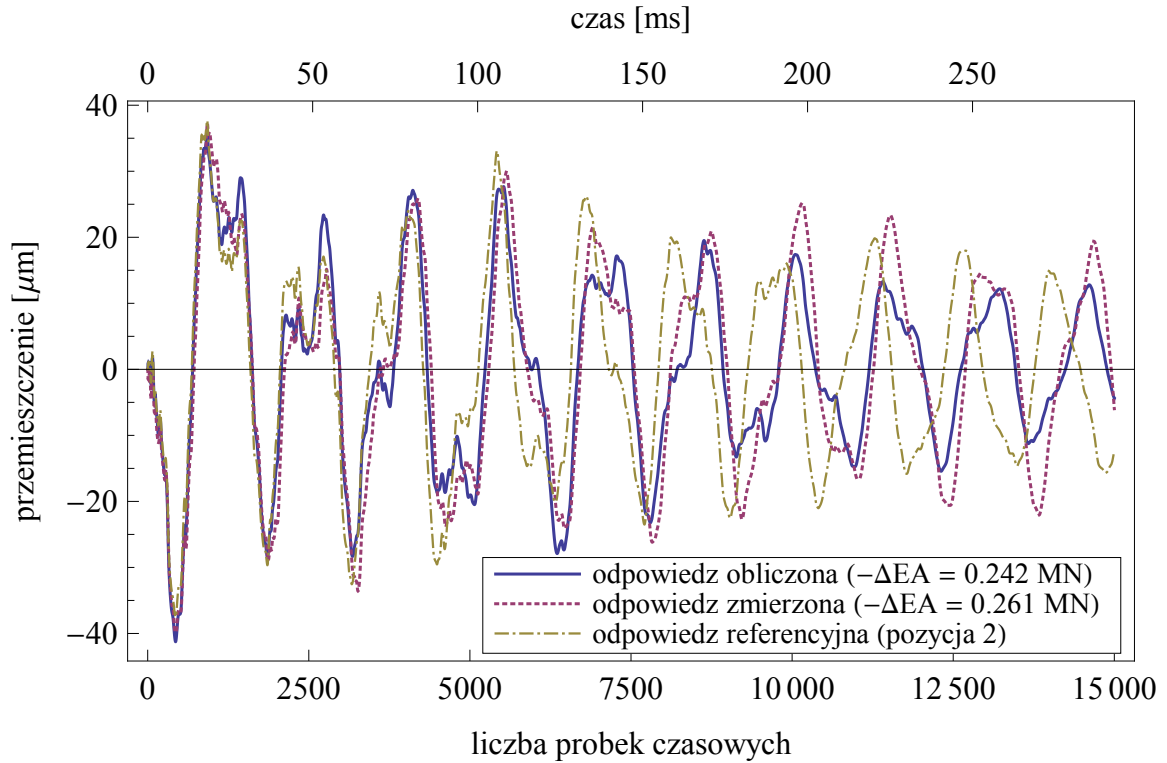
Wyniki identyfikacji. W każdym z dziesięciu rozważanych scenariuszy modyfikacji identyfikację przeprowadzono w dziedzinie czasu i w dziedzinie Laplace’a. W trakcie obliczeń w dziedzinie czasu uwzględniono odpowiedzi pełnej długości (15 000 próbek czasowych lub 293 ms). Dla celów identyfikacji w dziedzinie Laplace’a przyjęto taki sam obszar jej wiarygodności, jak w wypadku identyfikacji modyfikacji masy: zakres częstotliwości do 850 Hz, współczynniki zanikania okna wykładniczego zgodne z zależnością (6.2), stała wartość funkcji wagowej w definicji funkcji celu w dziedzinie Laplace’a, $w^2(\omega) = 1$ dla $\omega \in \mathbf{L}_\omega$.

Wyniki identyfikacji przedstawiono w Tabeli 6.15. Na rys. 6-22 pokazano przykładowe zmierzone i nieparametrycznie modelowane przebiegi czasowe odpowiedzi dla scenariusza identyfikacji w dziedzinie czasu $2 \rightarrow 1$ (odpowiedź referencyjna zmierzona przy ustawieniu bloczków w pozycji nr 2, identyfikacja redukcji sztywności osiowej do pozycji nr 1, patrz Tabela 6.1). Poczynić można trzy istotne obserwacje:

Tabela 6.15: Identyfikacja redukcji sztywności w dziedzinie czasu i w dziedzinie Laplace’a: scenariusz redukcji (pozycja referencyjna \rightarrow pozycja identyfikacji, zgodnie z Tabelą 6.1) i redukcja rzeczywista, redukcja zidentyfikowana oraz błąd względny identyfikacji. Średniokwadratowy błąd względny wynosi 53.0% dla dziedziny czasu i 29.8% dla dziedziny Laplace’a

scenariusz	id. w dziedzinie czasu			id. w dziedzinie Laplace’a	
	redukcja [MN]	redukcja [MN]	błąd względny [%]	redukcja [MN]	błąd względny [%]
5 \rightarrow 1	2.297	1.677	-27.0	2.553	11.1
5 \rightarrow 2	2.036	1.293	-36.5	1.945	-4.5
5 \rightarrow 3	1.739	0.934	-46.3	1.348	-22.5
5 \rightarrow 4	1.075	0.592	-44.9	0.673	-37.4
4 \rightarrow 1	1.222	0.880	-28.0	1.466	19.9
4 \rightarrow 2	0.961	1.116	16.1	1.006	4.7
4 \rightarrow 3	0.664	0.610	-8.2	0.457	-31.2
3 \rightarrow 1	0.558	1.060	90.0	0.750	34.5
3 \rightarrow 2	0.297	0.630	112.1	0.362	22.0
2 \rightarrow 1	0.261	0.242	-7.3	0.421	61.3

- Średniokwadratowy błąd względny wyników identyfikacji był około dwukrotnie mniejszy w dziedzinie Laplace’a niż w dziedzinie czasu. Jest to podobny rezultat jak w wypadku identyfikacji zmiany masy i – razem ze znacznie krótszym czasem obliczeń — zdecydowanie świadczy na korzyść procedury identyfikacji w dziedzinie Laplace’a.
- Błędy względne otrzymanych wyników są o rząd wielkości większe niż w wypadku identyfikacji zmiany masy. Tak istotna różnica wynika m.in. ze znacznie mniejszego wpływu na odpowiedź konstrukcji identyfikowanych redukcji sztywności (rys. 6-22) niż uprzednio identyfikowanych zmian mas (rys. 6-10, 6-11 i 6-16).
- Jakość dopasowania odpowiedzi modelowanej nieparametrycznie do odpowiedzi zmierzonej jest w wypadku identyfikacji zmiany sztywności osiowej (rys. 6-22) znacznie niższa niż w wypadku identyfikacji zmiany masy (rys. 6-10, 6-11 i 6-16). Tak istotna różnica jakości dopasowania wynika z faktu, że trudniej jest modelować wpływ na dynamikę konstrukcji redukcji sztywności złożonego elementu niż prostej węzłowej modyfikacji masy. Wykorzystywany model nieparametryczny opiera się na założeniu, że rozważany element ma cechy idealnego elementu kratowego, oraz zakłada jednorodną redukcję jego sztywności. Natomiast rzeczywisty element wykazuje prawdopodobnie istotną wewnętrzną dynamikę i wewnętrzne stopnie swobody, a redukcja jego sztywności nie jest jednorodna.



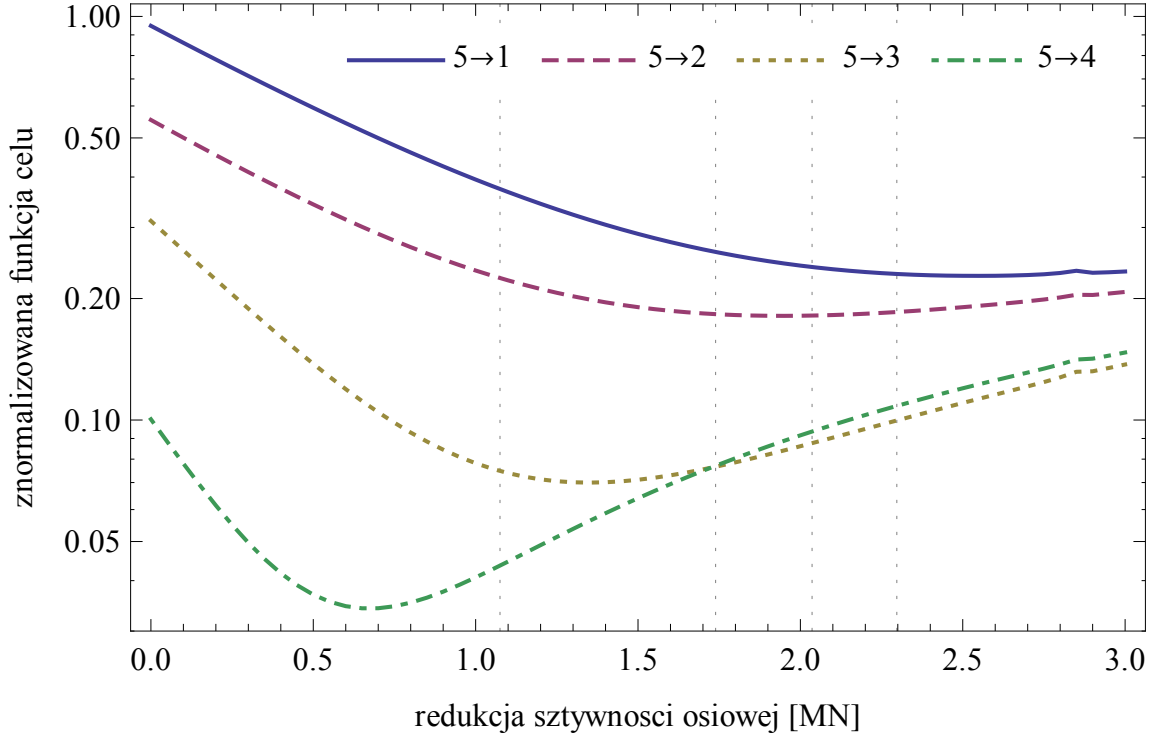
Rysunek 6-22: Identyfikacja redukcji sztywności osiowej w dziedzinie czasu: porównanie zmierzonych i nieparametrycznie modelowanych odpowiedzi konstrukcji. Scenariusz redukcji 2 \rightarrow 1 (odpowiedź referencyjna zmierzona przy ustawieniu bloczków w pozycji nr 2, identyfikowano redukcję sztywności osiowej do pozycji nr 1, patrz Tabela 6.1

Na rys. 6-23 przedstawiono przykładowo cztery funkcje celu obliczone w dziedzinie Laplace'a dla konstrukcji referencyjnej modelowanej ustawieniem bloczków w pozycji nr 5 i identyfikacji redukcji sztywności do pozycji nr 1–4, patrz Tabela 6.1. Funkcje celu są unimodalne i relatywnie gładkie, co ułatwia identyfikację redukcji sztywności drogą ich minimalizacji. Rzeczywiste wartości redukcji sztywności są oznaczone za pomocą pionowych linii przerywanych.

6.4 Identyfikacja uderzenia niesprężystego

W tej części rozdziału zamieszczono i omówiono wyniki identyfikacji w dziedzinie czasu parametrów uderzenia idealnie niesprężystego, doświadczalnie imitowanego w sposób opisany w Części 6.1.4.

Dane pomiarowe. W procesie identyfikacji parametrów uderzenia przyjęto typowy profil wymuszenia młotka modalnego pokazany na rys. 6-6. Wyniki identyfikacji parametrów uderzenia zależą od liczby próbek czasowych w sposób podobny jak w przypadku identyfikacji dodanych mas węzłowych, gdzie wyniki identyfikacji sta-



Rysunek 6-23: Identyfikacja redukcji sztywności osiowej w dziedzinie Laplace'a: znormalizowane funkcje celu. Ustawienie referencyjne sztywności w pozycji nr 5, identyfikacja redukcji do pozycji nr 1–4, patrz Tabela 6.1. Rzeczywiste wartości redukcji sztywności są oznaczone za pomocą pionowych linii przerywanych

bilizują się wraz ze wzrostem liczby użytych próbek. Z tego powodu w obliczeniach wykorzystano odpowiedzi pełnej długości (15 000 próbek czasowych, co odpowiada odpowiedzi czasowej długości ok. 290 ms).

Scenariusze uderzeń. Zgodnie z opisem przedstawionym w Części 6.1.4, identyfikację przeprowadzono w ośmiu scenariuszach uderzenia niesprężystego, imitowanego poprzez przytwierdzenie kolejno czterech mas (1.388 kg, 2.888 kg, 3.888 kg i 5.355 kg) w węzłach N_2 i N_3 i nadanie im prędkości początkowej w kierunku pionowym za pomocą młotka modalnego.

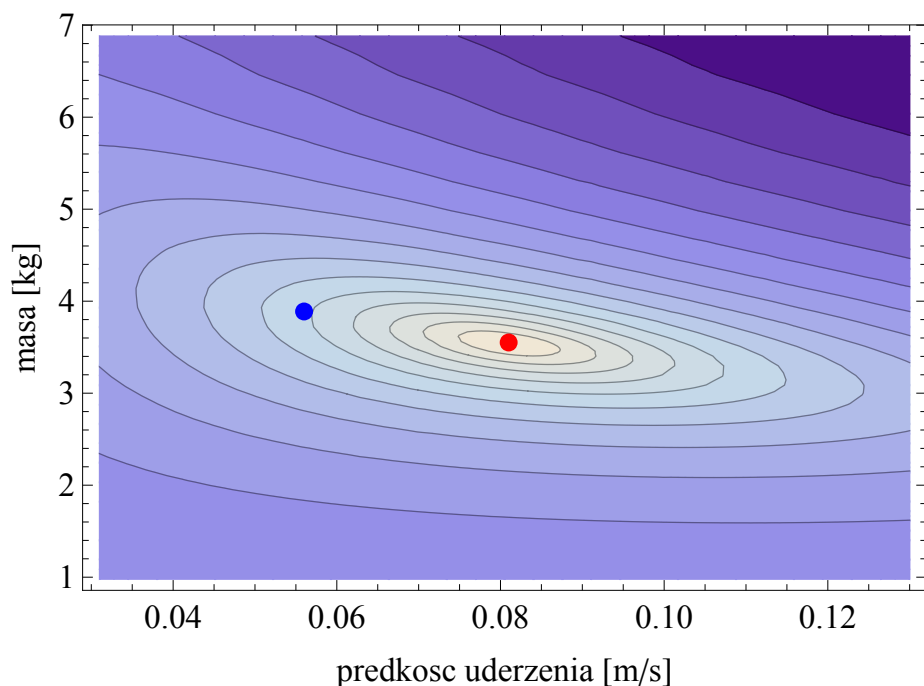
Wyniki identyfikacji. Liczbowe wartości zidentyfikowanych parametrów uderzenia zamieszczono w tabeli 6.16. Błąd względny identyfikacji masy m wyniósł od -7.9% do 0.2% , natomiast ekwiwalentu prędkości uderzenia v_z mieścił się w zakresie od -29.3% do 45.5% . Średniokwadratowy błąd względny identyfikacji był równy odpowiednio 4.4% i 31.1% . Warto zauważyć, że średniokwadratowy błąd względny identyfikacji masy uderzającej jest o 1.3% mniejszy od średniokwadratowego błędu względnego identyfikacji pojedynczej masy dodanej w tych samych węzłach.

Na rys. 6-24 pokazano przykładowy wykres funkcji celu odpowiadający scenariuszowi uderzenia w węzeł N_3 , w którym zamontowano odważnik o masie 3.888 kg

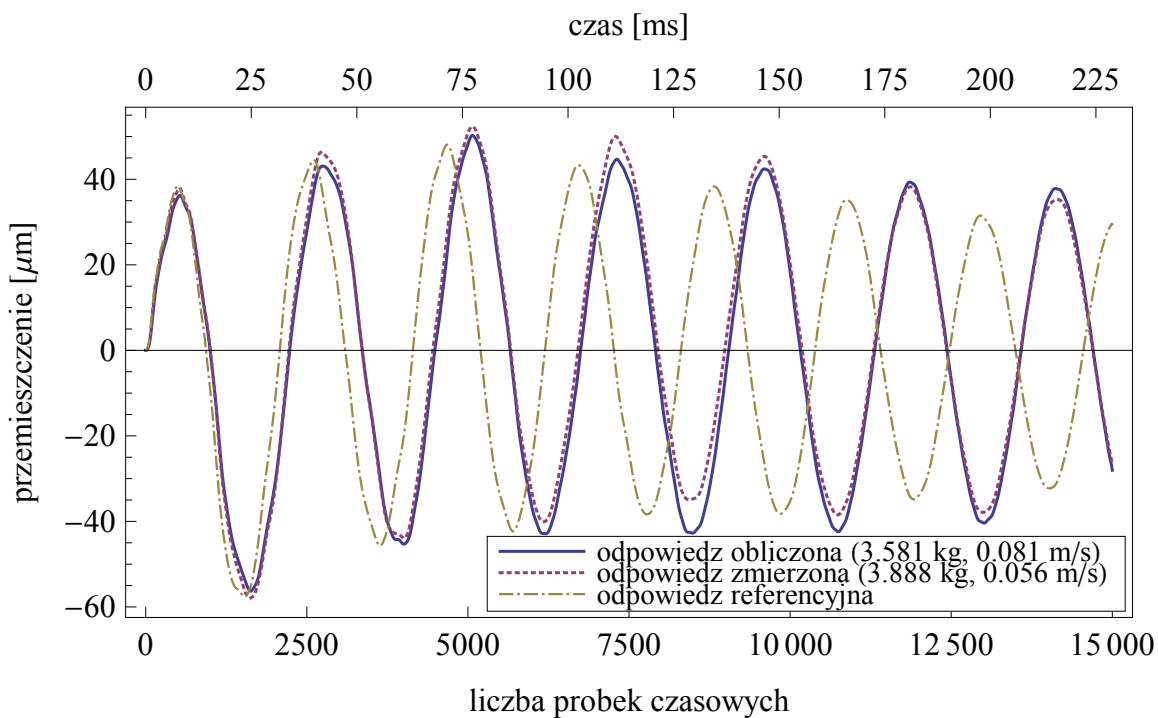
Tabela 6.16: Identyfikacja parametrów uderzenia niesprężystego w dziedzinie czasu: parametry uderzenia, zidentyfikowane parametry uderzenia i błąd względny. Średniokwadratowy błąd względny masy i ekwiwalentu prędkości uderzenia wynosiły odpowiednio 4.4% i 31.1%

Węzeł	Parametry uderzenia		Parametry zidentyfikowane		Błąd względny	
	Masa [kg]	Prędkość [m/s]	Masa [kg]	Prędkość [m/s]	Masa [%]	Prędkość [%]
N_2	1.388	0.172	1.391	0.204	0.2	18.6
N_2	2.888	0.045	2.842	0.056	-1.6	24.4
N_2	3.888	0.045	3.784	0.056	-2.7	24.4
N_2	5.355	0.048	5.192	0.039	-3.0	-17.9
N_3	1.388	0.154	1.392	0.202	0.2	31.2
N_3	2.888	0.116	2.684	0.082	-7.1	-29.3
N_3	3.888	0.056	3.581	0.081	-7.9	44.5
N_3	5.355	0.044	5.081	0.064	-5.1	45.5

i nadano mu ekwiwalent prędkości początkowej równy 0.056 m/s. Umieszczony na wykresie czerwony marker wskazuje minimum funkcji celu (wynik identyfikacji), natomiast markerem niebieskim zaznaczono rzeczywiste parametry uderzenia niesprężystego. Identyfikacja przeprowadzona dla tego scenariusza obarczona jest największym błędem względnym identyfikacji masy (równym 7.9%) i jednocześnie jednym z największych błędów względnych ekwiwalentu prędkości uderzenia v_z (równym 44.5%). Porównanie przebiegów czasowych dla tego scenariusza, zmierzonych i nieparametrycznie modelowanych (odpowiadających minimum funkcji celu), zamieszczono na rys. 6-25. Kolorem czerwonym zaznaczono zmierzoną odpowiedź $\mathbf{u}^M(t)$ konstrukcji poddanej imitowanemu uderzeniu niesprężystemu, kolorem zielonym zaznaczono zmierzoną odpowiedź $\mathbf{u}^L(t)$ konstrukcji referencyjnej oraz kolorem niebieskim zaznaczoną nieparametrycznie modelowaną odpowiedź $\mathbf{u}(t)$. Należy zauważyć, że uzyskano bardzo dobre odwzorowanie odpowiedzi zmierzonej $\mathbf{u}^M(t)$ odpowiedzią modelowaną $\mathbf{u}(t)$, zarówno pod względem poziomu amplitudy, jak i pod względem okresu drgań układu.



Rysunek 6-24: Identyfikacja parametrów uderzenia niesprężystego w dziedzinie czasu: warstwie przykładowej funkcji celu (skala logarytmiczna) dla wypadku identyfikacji masy 3.888 kg w węźle N_3 i ekwiwalentu prędkości uderzenia 0.056 m/s



Rysunek 6-25: Identyfikacja parametrów uderzenia niesprężystego w dziedzinie czasu: porównanie zmierzonych i nieparametrycznie modelowanych odpowiedzi konstrukcji (masa 3.888 kg w węźle N_3 , ekwiwalent prędkości uderzenia 0.056 m/s)

Rozdział 7

Zakończenie

Stan techniczny konstrukcji inżynierskich ulega powolnej degradacji na skutek działania czynników atmosferycznych, czasu oraz obciążeń eksploatacyjnych. Z tego powodu przeprowadza się okresowe kontrole w celu wykrycia uszkodzeń, mogących potencjalnie doprowadzić do groźnych w skutkach awarii. Zazwyczaj kontrole te są czasochłonne i wymagają sporych nakładów finansowych. Zrozumiałe jest zatem poszukiwanie nowych rozwiązań pozwalających na ciągłe, zautomatyzowane monitorowanie stanu technicznego konstrukcji (SHM), a jednocześnie umożliwiających wykrywanie uszkodzeń już w początkowej fazie ich rozwoju.

W niniejszej pracy zaproponowano i zweryfikowano nieparametryczną metodę identyfikacji zmian parametrów masowych i sztywnościowych konstrukcji referencyjnej, która może stanowić ważny element składowy przyszłych systemów SHM. W porównaniu do innych metod monitorowania, opracowana metoda pomija typowe, kłopotliwe etapy budowy modelu parametrycznego i jego kalibracji, wymaga jednak rozszerzenia etapu pomiarów konstrukcji referencyjnej. Elastyczność opracowanej metody pozwala na zastosowanie danych wejściowych pochodzących zarówno z symulacji numerycznych, jak i danych pomiarowych. Główną ideą metody jest zastąpienie zmian parametrów masowych i sztywnościowych konstrukcji ekwiwalentnym pseudo obciążeniem. Takie ogólne postawienie problemu pozwoliło na opracowanie sformułowania w dziedzinie czasu i dziedzinie Laplace'a, opisanych odpowiednio w Rozdziałach 2 i 4. W każdym z tych sformułowań wyznaczono ściśle, analityczne zależności na gradient i Hesjan funkcji celu, umożliwiając tym samym zastosowanie do rozwiązania zadania odwrotnego klasycznych gradientowych metod optymalizacyjnych pierwszego i drugiego rzędu.

Opracowana metoda pozwala w ogólności na identyfikację zmian i obciążeń konstrukcji dowolnego typu, niemniej ze względu na trudności techniczne związane z dynamicznym pomiarem kątów obrotu oraz z realizacją wymuszeń momentowych, zaleca się, by metodę na obecnym etapie jej rozwoju stosowano dla obiektów o konstrukcji kratowej i na takiej konstrukcji metoda była weryfikowana doświadczalnie w niniejszej pracy.

Wyniki otrzymane podczas przeprowadzonej weryfikacji doświadczalnej, zamieszczone w Rozdziale 6, pozwalają jednoznacznie stwierdzić, że sformułowanie w dziedzinie Laplace'a odznacza się znacznie większą dokładnością i krótszym czasem iden-

tyfikacji niż sformułowanie w dziedzinie czasu, a jednocześnie nie wymaga ono użycia wyrafinowanych technik numerycznych omówionych w Rozdziale 5. Charakterystyczną cechą wyników był ponadto znacznie niższy poziom ich błędów względnych w wypadku identyfikacji zmian masy niż w wypadku identyfikacji redukcji sztywności.

7.1 Oryginalne osiągnięcia pracy

Poniżej zamieszczono zdaniem autora najważniejsze oryginalne osiągnięcia niniejszej dysertacji:

- Sformułowano podstawy teoretyczne nieparametrycznej metody identyfikacji zmiany masy, sztywności i obciążenia w dziedzinie czasu i dziedzinie Laplace'a. Metoda wykorzystuje nieparametryczny, złożony z danych czysto doświadczalnych, model konstrukcji referencyjnej, a jednocześnie umożliwia identyfikację parametrycznie wyrażonych zmian konstrukcji i jej obciążeń.
- Wyrażenie pseudo obciążenia w postaci splotu nieznanej funkcji i zarejestrowanego wymuszenia przyłożonego do konstrukcji za pomocą młotka modalnego w znaczący sposób przyczyniło się do uproszczenia i skrócenia etapu przygotowania danych pomiarowych do opracowanego podejścia nieparametrycznego.
- Zastosowanie iteracyjnego algorytmu regularyzującego CGLS, w połączeniu ze specyficznymi właściwościami ustrukturyzowanej macierzy współczynników, pozwoliło na rozwiązanie dużych, źle uwarunkowanych układów równań w przystępnym czasie.
- Wyznaczenie dokładnych, analitycznych zależności na gradient i Hesjan funkcji celu pozwoliło na zastosowanie szybkozbieżnych gradientowych metod optymalizacyjnych.
- Przeprowadzono weryfikację doświadczalną opracowanej nieparametrycznej metody na przestrzennej konstrukcji wspornika kratowego. Stosując dwa opracowane podejścia, przeprowadzono identyfikację zmiany masy, sztywności i obciążenia nieelastycznego.

7.2 Plany dalszych badań

Wyniki uzyskane w ramach przeprowadzonej weryfikacji doświadczalnej są obiecujące i przemawiają za podjęciem dalszych badań rozszerzających proponowaną metodę. Poniżej wymieniono główne planowane kierunki rozwoju opracowanej metody nieparametrycznej:

- Sformułowanie metody w dziedzinie Laplace'a posiada szereg zalet w stosunku do analogicznego sformułowania w dziedzinie czasu, poczynając od skrócenia czasu procesu identyfikacji, po zwiększoną dokładność otrzymanych wyników. Kolejnym czynnikiem, który może korzystnie wpłynąć na poprawę wyników,

jest optymalny dobór kształtu wymuszenia testowego charakteryzowanego poprzez jego widmo amplitudowe. W Części 4.4 zaproponowano sposób realizacji tego pomysłu. Jego weryfikacja doświadczalna wymaga jednak większej liczby scenariuszy modyfikacji konstrukcji, niż była dostępna w niniejszej pracy.

- Wyniki zamieszczone w Rozdziale 6 zostały uzyskane dla scenariuszy modyfikacji charakteryzujących się pewnym uproszczeniem, a mianowicie zakładały wystąpienie zmian jedynie pojedynczo lub w ograniczonym obszarze konstrukcji. Dalsze badania powinny obejmować przeprowadzenie doświadczeń zakładających wystąpienie kilku jednoczesnych zmian rozproszonych na większej części konstrukcji.
- Konstrukcje rzeczywiste poddane są oddziaływaniu czynników zewnętrznych, które w wielu przypadkach mają znaczący wpływ na zmianę parametrów dynamicznych konstrukcji. Zmiany te mogą być błędnie interpretowane przez metody globalne jako wystąpienie potencjalnego uszkodzenia o znacznych rozmiarach. Dlatego przed przeprowadzeniem testów polowych konieczne jest zaproponowanie mechanizmu uwzględniającego zmiany czynników zewnętrznych w procedurze identyfikacji zmian masy i sztywności.
- Ze względów ekonomicznych lub praktycznych monitorowanie stanu technicznego konstrukcji może ograniczać się do jej wybranych fragmentów. Niemniej wybrany fragment, jak i cała konstrukcja, powinny spełniać pewne założenia przyjęte na etapie formułowania teoretycznego metody. Najważniejszym z nich jest założenie o liniowości konstrukcji; niespełnienie tego warunku równoważne jest z brakiem możliwości stosowania metody na danym obiekcie. Rozwiązaniem tego ograniczenia może być integracja opracowanej metody z metodą wirtualnej (numerycznej) izolacji podstruktur [171]. Pozwoliłoby to na lokalne monitorowanie wyodrębnionych niewrażliwych części konstrukcji spełniających warunek liniowości, wirtualnie izolowanych od wpływu pozostałych części konstrukcji.
- Weryfikację doświadczalną opracowanej metody przeprowadzono w warunkach laboratoryjnych. Kolejnym etapem weryfikacji jest przeprowadzenie testów polowych.

Bibliografia

- [1] D. Adams. *Health Monitoring of Structural Materials and Components*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [2] J. Balageas, C.-P. Fritzen, and A. Güemes. *Structural Health Monitoring Systems*. ISTE, 2006.
- [3] T. Stepinski, T. Uhl, and W. Staszewski. *Advanced Structural Damage Detection: From Theory to Engineering Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, 2013.
- [4] C.R. Farrar and K. Worden. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):303–315, 2007.
- [5] K. Worden, C.R. Farrar, G. Manson, and G. Park. The fundamental axioms of structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082):1639–1664, 2007.
- [6] J.M. Brownjohn. Structural health monitoring of civil infrastructure. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):589–622, 2007.
- [7] H. Wenzel and D. Pichler. *Ambient Vibration Monitoring*. John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [8] W. J. Staszewski, C. Boller, and G. R. Tomlinson, editors. *Structural Health Monitoring Systems of Aerospace Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [9] A. Rytter. *Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures*. PhD thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark, 1993.
- [10] P. C. Chang and S. C. Liu. Recent research in nondestructive evaluation of civil infrastructures. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 15(3):298–304, 2003.
- [11] A. Żak, M. Radziński, M. Krawczuk, and W. Ostachowicz. Damage detection strategies based on propagation of guided elastic waves. *Smart Materials and Structures*, 21(3):035024, 2012.

- [12] M. Rucka and K. Wilde. Experimental study on ultrasonic monitoring of splitting failure in reinforced concrete. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 32(4):372–383, 2013.
- [13] M. Rucka and K. Wilde. Non-destructive diagnostics of concrete cantilever beam and slab by impact echo method. *Diagnostyka*, 3(55):63–68, 2010.
- [14] A. Raghavan and C. E.S. Cesnik. Review of guided waves structural health monitoring. *The Shock and Vibration Digest*, 39(2):91–114, 2007.
- [15] P. Kudela, M. Mieloszyk, and W. Ostachowicz. Wave propagation based damage assessment and decision making for SHM. In *11th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR*, 2383–2388, New York, NY, June 16–20, 2013.
- [16] Z.Q. Su, L. Ye, and Y. Lu. Guided lamb waves for identification of damage in composite structures: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3–5):753–780, 2006.
- [17] R. Ghoni, M. Dollah, A. Sulaiman, and FadhilMamat Ibrahim. Defect characterization based on eddy current technique: Technical review. *Advances in Mechanical Engineering*, 2014:11, 2014.
- [18] Z. Ranachowski. Emisja akustyczna w diagnostyce obiektów budowlanych. *Drogi i Mosty*, 2:151–173, 2012.
- [19] M. Giordano, A. Calabro, C. Esposito, A. D’Amore, and L. Nicolais. An acoustic-emission characterization of the failure modes in polymer-composite materials. *Composites Science and Technology*, 58(12):1923–1928, 1998.
- [20] S. Shahidana, R. P. Norazura, M. Bunnori, and K. M. Holford. Damage classification in reinforced concrete beam by acoustic emission signal analysis. *Construction and Building Materials*, 45:78–86, 2013.
- [21] A.A. Carvalho, J.M.A. Rebello, M.P.V. Souza, L.V.S. Segrilo, and S.D. Soares. Reliability of non-destructive test techniques in the inspection of pipelines used in the oil industry. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2008.
- [22] E. Jasinien, R. Raiutis, R. literis, A. Voleiis, A. Vladiauskas, D. Mitchard, and M. Amos. NDT of wind turbine blades using adapted ultrasonic and radiographic techniques. *Insight*, 51(9):477–483, 2009.
- [23] S. Bagavathiappan, B.B. Lahiri, T. Saravanan, John Philip, and T. Jayakumar. Infrared thermography for condition monitoring – a review. *Infrared Physics & Technology*, 60:35–55, 2013.
- [24] S. Gontarz and S. Radkowski. Magnetic methods in diagnosis of machines and infrastructural objects—a survey. *Diagnostyka*, 1:3–11, 2011.

- [25] F.P.G. Marquez, A.M. Tobias, J.M.P. Perez, and M. Papaelias. Condition monitoring of wind turbines: techniques and methods. *Renewable Energy*, 46:169–178, 2012.
- [26] H. Sohn. Effects of environmental and operational variability on structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):539–560, 2007.
- [27] Y. Xia, B. Chen, S. Weng, Y.-Q. Ni, and Y.-L. Xu. Temperature effect on vibration properties of civil structures: a literature review and case studies. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 2(1):29–46, 2012.
- [28] C. Liu and J. T. DeWolf. Effect of temperature on modal variability of a curved concrete bridge under ambient loads. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 17(5):1742–1751, 2007.
- [29] G.-D. Zhou and T.-H. Yi. Thermal load in large-scale bridges: A state-of-the-art review. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2013:217983.
- [30] H. Sohn, M. Dzwonczyk, E. G. Straser, A. S. Kiremidjian, K. H. Law, and T. Meng. An experimental study of temperature effect on modal parameters of the Alamosa Canyon bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28(8):879–897, 1999.
- [31] M. Sanayei, J. Phelps, J. Sipple, E. Bell, and B. Brenner. Instrumentation, nondestructive testing, and finite-element model updating for bridge evaluation using strain measurements. *Journal of Bridge Engineering*, 17(1):130–138, 2012.
- [32] P. Barr, C. Woodward, B. Najera, and M. Amin. Long-term structural health monitoring of the San Ysidro Bridge. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 20(1):14–20, 2012.
- [33] E. Bell, P. Lefebvre, M. Sanayei, B. Brenner, J. Sipple, and J. Peddle. Objective load rating of a steel-girder bridge using structural modeling and health monitoring. *Journal of Structural Engineering*, 139(10):1771–1779, 2013.
- [34] X. Cao, Y. Sugiyamac, and Y. Mitsui. Application of artificial neural networks to load identification. *Computers and Structures*, 69(1):63–78, 1998.
- [35] J. S. P. Cruz and R. Salgado. Performance of vibration-based damage detection methods in bridges. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24(1):62–79, 2009.
- [36] G. Hearn and R. Testa. Modal analysis for damage detection in structures. *Journal of Structural Engineering*, 117(10):3042–3063, 1991.
- [37] P. Cawley and R. D. Adams. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 14(2):49–57, 1979.

- [38] J.-T. Kim, Y.-S. Ryu, H.-M. Cho, and N. Stubbs. Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method. *Engineering Structures*, 25(1):57–67, 2003.
- [39] M. I. Friswell and J. E. T. Penny. Is damage location using vibration measurements practical? In *EUROMECH 365 International Workshop: DAMAS 97, Structural Damage Assessment using Advanced Signal Processing Procedures*, 351–362, Sheffield, UK, 1997.
- [40] C. R. Farrar and G.H. James. System identification from ambient vibration measurements on a bridge. *Journal of Sound and Vibration*, 205:1–18, 1997.
- [41] O. S. Salawu and C. Williams. Bridge assessment using forced-vibration testing. *Journal of Structural Engineering*, 121(2):161–173, 1995.
- [42] L. Frýba and M. Pirner. Load tests and modal analysis of bridges. *Engineering Structures*, 23:102–109, 2001.
- [43] A. Z. Khan, A. B. Stanbridge, and D. J. Ewins. Detecting damage in vibrating structures with a scanning LDV. *Optics and Lasers in Engineering*, 32(6):583–592, 1999.
- [44] O. S. Salawu and C. Williams. Damage location using vibration mode shapes. In *Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference (IMAC XII)*, 933–939, Honolulu, Hawaii, USA, 1994.
- [45] A. K. Pandey, M. Biswas, and M. M. Samman. Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332, 1991.
- [46] L. M. Khoo, P. R. Mantena, and P. Jadhav. Structural damage assessment using vibration modal analysis. *Structural Health Monitoring*, 3(2):177–194, 2004.
- [47] A. A. Elshafey, H. Marzouk, and M. R. Haddara. Experimental damage identification using modified mode shape difference. *Journal of Marine Science and Application*, 10(2):150–155, 2011.
- [48] M. Cao, M. Radziński, W. Xu, and W. Ostachowicz. Identification of multiple damage in beams based on robust curvature mode shapes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 46:468–480, 2014.
- [49] C. Ratcliffe and W. J. Bagaria. A vibration technique for locating delamination in a composite beam. *AIAA Journal*, 36(6):1074–1077, 1998.
- [50] M. Battipede, R. Ruotolo, and C. Surace 2001. Damage detection of plate-like structures. In *Proceedings of the 4th International Conference on Damage Assessment of Structures*, 27–34., Cardiff, Wales, UK, 2001.

- [51] P. Cornwell, S.W. Doebling, and C.R Farrar. Application of the strain energy damage detection method to plate-like structures. *Journal of Sound and Vibration*, 224(2):359–374, 1999.
- [52] W. Fan and P. Qiao. A strain energy-based damage severity correction factor method for damage identification in plate-type structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 28:660–678, 2012.
- [53] N. Stubbs, J. T. Kim, and C. R. Farrar. Field verification of a nondestructive damage localization and severity estimation algorithm. In *Proceedings of 13th International Modal Analysis Conference (IMAC XIII)*, 210–218, Nashville, TN, USA, 1995.
- [54] N. Stubbs and J. T. Kim. Damage localization in structures without baseline modal parameters. *AIAA Journal*, 34:1644–1649, 1996.
- [55] C. Modena, D. Sonda, and D. Zonta. Damage localization in reinforced concrete structures by using damping measurements. In *Proceedings of the International conference on damage assessment of structures, DAMAS*, 132–141, 1999.
- [56] C. Williams and O. S. Salawu. Damping as a damage indication parameter. *Proceeding of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC), Orlando, FL, USA*, 1531–1536, 1997.
- [57] G. Kawiecki. Modal damping measurement for damage detection. *Smart Materials and Structures*, 10(3):466–471, 2001.
- [58] A. Deraemaeker and A. Preumont. Vibration-based damage detection using large array sensors and spatial filters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7):1615–1630, 2006.
- [59] K. Mendrok. Lokalizacja uszkodzenia z wykorzystaniem filtracji modalnej — weryfikacja eksperymentalna. *Diagnostyka*, 45(1):85–90, 2008.
- [60] G. L. Slater and S. J. Shelley. Health monitoring of flexible structures using modal filter concepts. *Proceedings of SPIE*, 1917:997–1008, 1993.
- [61] K. Mendrok and T. Uhl. The application of modal filters for damage detection. *Smart Structures and Systems*, 6(2):115–133, 2010.
- [62] K. Mendrok and T. Uhl. Experimental verification of the damage localization procedure based on modal filtering. *Structural Health Monitoring*, 10(2):157–171, 2011.
- [63] T. Uhl and K. Mendrok. Zastosowanie wektorów ritza w diagnostyce konstrukcji. *Diagnostyka*, 32:23–30, 2004.
- [64] H. Sohn and K. Law. Damage diagnosis using experimental ritz vectors. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(11):1184–1193, 2001.

- [65] H. F. Lam, K. V. Yuen, and J. L. Beck. Structural health monitoring via measured ritz vectors utilizing artificial neural networks. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 21(4):232–241, 2006.
- [66] A.K. Pandey and M. Biswas. Experimental verification of flexibility difference method for locating damage in structures. *Journal of Sound and Vibration*, 184(2):311–328, 2005.
- [67] Q. W. Yang and J. K. Liu. Damage identification by the eigenparameter decomposition of structural flexibility change. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(4):444–459, 2009.
- [68] K. C. Park, G. W. Reich, and K. F. Alvin. Structural damage detection using localized flexibilities. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 9(11):911–919, 1998.
- [69] D. Bernal. Flexibility-based damage localization from stochastic realization results. *Journal of Engineering Mechanics*, 132(6):651–658, 2006.
- [70] Z. Duan, G. Yan, J. Ou, and B. F. Spencer. Damage detection in ambient vibration using proportional flexibility matrix with incomplete measured DOFs. *Structural Control and Health Monitoring*, 14(2):186–196, 2007.
- [71] M. Gul and F. N. Catbas. Statistical pattern recognition for Structural Health Monitoring using time series modeling: Theory and experimental verifications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(7):2192–2204, 2009.
- [72] D. A. Tibaduiza, L. E. Mujica, and J. Rodellar. Damage classification in structural health monitoring using principal component analysis and self-organizing maps. *Structural Control and Health Monitoring*, 20(10):1303–1316, 2013.
- [73] M. Rucka and K. Wilde. Application of continuous wavelet transform in vibration based damage detection method for beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 297(3–5):536–550, 2006.
- [74] M. Rucka. Damage detection in beams using wavelet transform on higher vibration modes. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 49(2):399–417, 2011.
- [75] S. W. Doebling, C. R. Farrar, M. B. Prime, and D. W. Shevitz. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review. Technical Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, N.M., 1996.
- [76] S. W. Doebling, C. R. Farrar, and M. B. Prime. A summary review of vibration-based damage identification methods. *The Shock and Vibration Digest*, 30(2):91–105, March 1998.

- [77] P. C. Chang, A. Flatau, and S. C. Liu. Review paper: Health monitoring of civil infrastructure. *Structural Health Monitoring*, 2(3):257–267, 2004.
- [78] W. Fan and P. Qiao. Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study. *Structural Health Monitoring*, 10(1):83–111, 2011.
- [79] H. Sohn, C. R. Farrar, F. M. Hemez, D. D. Shunk, D. W. Stinemat, B. R. Nadler, and J. J. Czarnecki. A review of structural health monitoring literature: 1996–2001. Technical Report LA-13976-MS, Los Alamos National Laboratory, 2004.
- [80] E. P. Carden and P. Fanning. Vibration based condition monitoring: A review. *Structural Health Monitoring*, 3(4):355–377, 2004.
- [81] D. Montalvao, N. M. M. Maia, and A. M. R. Ribeiro. A review of vibration-based structural health monitoring with special emphasis on composite materials. *The Shock and Vibration Digest*, 36(4):295–324, 2006.
- [82] R. Perera and A. Ruiz. A multi-stage FE updating procedure for damage identification in large scale structures based on multi-objective evolutionary optimization. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4):970–991, 2008.
- [83] P. F. Liu and J. Y. Zheng. Recent developments on damage modeling and finite element analysis for composite laminates: A review. *Materials & Design*, 31(8):3825–3834, 2010.
- [84] Y. An and J. Ou. Experimental and numerical studies on model updating method of damage severity identification utilizing four cost functions. *Structural Control & Health Monitoring*, 20(1):107–120, 2013.
- [85] J. Lia, S.S. Law, and Y. Dingc. Substructure damage identification based on response reconstruction in frequency domain and model updating. *Engineering Structures*, 41:270–284, 2012.
- [86] I. Benedetti, M.H. Aliabadi, and A. Milazzo. A fast BEM for the analysis of damaged structures with bonded piezoelectric sensors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9–12):490–501, 2014.
- [87] F. Zou, I. Benedetti, and M. H. Aliabadi. A boundary element model for structural health monitoring using piezoelectric transducers. *Smart Materials and Structures*, 23(1):15–22, 2014.
- [88] W. Ostachowicz, P. Kudela, M. Krawczuk, and A. Zak. *Guided Waves in Structures for SHM: The Time-Domain Spectral Element Method*. John Wiley & Sons, Ltd, 2012.
- [89] W. Ostachowicz. Damage detection of structures using spectral finite element method. *Computers and Structures*, 86(3–5):454–462, 2008.

- [90] S. Gopalakrishnan, A. Chakraborty, and D. Roy Mahapatra. *Spectral Finite Element Method*. Computational Fluid and Solid Mechanics. Springer, 2008.
- [91] X. Wang and J. Tang. Damage identification using piezoelectric impedance approach and spectral element method. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(8):907–921, 2009.
- [92] M. Krawczuk, M. Palacz, and W. Ostachowicz. The dynamic analysis of a cracked timoshenko beam by the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, 264:1139–1153, 2003.
- [93] M. Rucka. Experimental and numerical study on damage detection in an l-joint using guided wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10):1760–1779, 2010.
- [94] W. Ostachowicz, M. Krawczuk, and M. Cartmell. The location of a concentrated mass on rectangular plates from measurements of natural vibrations. *Computers & Structures*, 80(16–17):1419–1428, 2002.
- [95] M. Friswell and J.E. Mottershead. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic, 1995.
- [96] T. Marwala. *Finite Element Model Updating Using Computational Intelligence Techniques*. Springer, 2010.
- [97] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, New York, 2nd edition, 2006.
- [98] Z. Waszczyszyn and L. Ziemiański. Neurocomputing in the analysis of selected inverse problems of mechanics of structures and materials. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences (CAMES)*, 13(1):125–159, 2006.
- [99] L. E. Mujica Delgado. A hybrid approach of knowledge-based reasoning for structural assessment. *PhD thesis, University of Girona*, 2006.
- [100] L. E. Mujica Delgado, J. Vehí, W. Staszewski, and K. Worden. Impact damage detection in aircraft composites using knowledge-based reasoning. *Structural Health Monitoring: An International Journal*, 7(3):215–230, 2008.
- [101] R. Le Riche, D. Gualandris, J. J. Thomas, and F. Hemez. Neural identification of non-linear dynamic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 248(2):247–265, 2001.
- [102] T. Szolc, P. Tuzowski, R. Stocki, and J. Knabel. Damage identification in vibrating rotor-shaft systems by efficient sampling approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(5):1615–1633, 2009.
- [103] Z. Waszczyszyn and L. Ziemiański. Neural networks in mechanics of structures and materials – new results and prospects of applications. *Computers and Structures*, 79(22–25):2261–2276, 2001.

- [104] T. Uhl and K. Mendrok. Overview of modal model based damage detection methods. In *Proc. of the Int'l Conf. on Noise and Vibration Engineering (ISMA2004)*, 561–575, Leuven, Belgium, 20–22 September 2004.
- [105] N. Lieven and D. Ewins. Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC). *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference (IMAC)*. Kissimmee, FL, USA, 690–695, 1988.
- [106] M. West. Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen. *Proceedings of the 4th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Los Angeles, CA, USA, 1–6, 1986.
- [107] H. Guan and V. Karrbhari. Improved damage detection method based on element modal strain damage index using sparse measurement. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3–6):455–494, 2008.
- [108] M. Salehi, S. Ziaei-Rad, M. Ghayour, and M. A. Vaziri-Zanjani. A structural damage detection technique based on measured frequency response functions. *Contemporary Engineering Sciences*, 3(5):215–226, 2010.
- [109] A. K. Pandey and M. Biswas. Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of Sound and Vibration*, 169(1):3–17, 1994.
- [110] Y. Gao, B. F. Spencer Jr., and D. Bernal. Experimental verification of the flexibility-based damage locating vector method. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(10):1043–1049, 2007.
- [111] F. Casciati and S. Casciati. Structural health monitoring by lyapunov exponents of non-linear time series. *Structural Control and Health Monitoring*, 13(1):132–146, 2006.
- [112] A. Biegus and K. Rykaluk. Collapse of Katowice fair building. *Engineering Failure Analysis*, 16(5):1643–1654, 2009.
- [113] O. Caglayan and E. Yuksel. Experimental and finite element investigations on the collapse of a Mero space truss roof structure—A case study. *Engineering Failure Analysis*, 15(5):458–470, 2008.
- [114] M. Holicky and M. Sykora. Failures of roofs under snow load: Causes and reliability analysis. *Forensic Engineering*, 2009:444–453.
- [115] P. J. Fanning and E. P. Carden. Experimentally validated added mass identification algorithm based on frequency response functions. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(9):1045–1051, 2004.
- [116] G. Piątkowski and Z. Waszczyszyn. Identification problems of recurrent cascade neural network application in predicting an additional mass location. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 3:217–228, 2011.

- [117] U. Dackermann, J. Li, and B. Samali. Identification of member connectivity and mass changes on a two-storey framed structure using frequency response functions and artificial neural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 332(16):3636–3653, 2013.
- [118] E. Papatheou, G. Manson, R.J. Barthorpe, and K. Worden. The use of pseudo-faults for damage location in SHM: An experimental investigation on a Piper Tomahawk aircraft wing. *Journal of Sound and Vibration*, 333(3):971–990, 2014.
- [119] K. Dems and Z. Mróz. Damage identification using modal, static and thermographic analysis with additional control parameters. *Computers & Structures*, 88(21–22):1254–1264, 2010.
- [120] J. Hou, Ł. Jankowski, and J. Ou. Structural damage identification by adding virtual masses. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(1):59–72, 2013.
- [121] T. Uhl. The inverse identification problem and its technical application. *Archive of Applied Mechanics*, 77(5):325–337, May 2007.
- [122] H. Inoue, J. J. Harrigan, and S. R. Reid. Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force. *Applied Mechanics Reviews*, 54(6):503–524, 2001.
- [123] Ł. Jankowski. Off-line identification of dynamic loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(6):609–623, 2009.
- [124] M. Klinkov and C.-P. Fritzen. An updated comparison of the force reconstruction methods. *Key Engineering Materials*, 347:461–466, 2007.
- [125] L. E. Mujica, J. Vehí, W. Staszewski, and K. Worden. Impact damage detection in aircraft composites using knowledge-based reasoning. *Structural Health Monitoring*, 7(3):215–230, 2008.
- [126] J. Holnicki-Szulc and J. Gierliński. *Structural Analysis, Design and Control by the Virtual Distortion Method*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1995.
- [127] G. Suwała and Ł. Jankowski. A model-free method for identification of mass modifications. *Structural Control and Health Monitoring*, 19(2):216–230, 2012.
- [128] P. Kołakowski, M. Wikło, and J. Holnicki-Szulc. The virtual distortion method – a versatile reanalysis tool for structures and systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(3):217–234, 2008.
- [129] R. Kress. *Linear integral equations*. Springer, New York, 2nd edition, 1999.
- [130] P. C. Hansen. Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices. *Numerical Algorithms*, 29(4):323–378, 2002.
- [131] P. C. Hansen. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion*. SIAM, Philadelphia, 1998.

- [132] P. C. Hansen. *Discrete inverse problems: insight and algorithms*. SIAM, Philadelphia, 2010.
- [133] D. I. Papadimitriou and K. C. Giannakoglou. Aerodynamic shape optimization using first and second order adjoint and direct approaches. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 15(4):447–488, 2008.
- [134] M. Kleiber, H. Antunez, and P. Kowalczyk. *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics: Theory and Finite Element Computations*. John Wiley & Sons, 1997.
- [135] G. Suwała and Ł. Jankowski. Nonparametric identification of added masses in frequency domain. In *6th World Conference on Structural Control and Monitoring (6WCSCM 2014)*, Barcelona, Spain, 15–17 July 2014.
- [136] J.L. Schiff. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Springer, 1999.
- [137] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [138] M. Rucka and K. Wilde. Neuro-wavelet damage detection technique in beam, plate and shell structures with experimental validation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 48(3):579–604, 2010.
- [139] R. R. Goldberg. *Methods of real analysis*. Wiley, New York, 2nd edition, 1976.
- [140] L. M. Delves and J. L. Mohamed. *Computational methods for integral equations*. Cambridge University Press, 1988.
- [141] E. Beltrami. Sulle funzioni bilineari. *Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita*, 11:98–106, 1873.
- [142] C. Jordan. Mémoire sur les formes bilinéaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 19:35–54, 1874.
- [143] C. Jordan. Sur la reduction des formes bilineaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 78:614–617, 1874.
- [144] J. J. Sylvester. A new proof that a general quadric may be reduced to its canonical form (that is, a linear function of squares) by means of a real orthogonal substitution. *Messenger of Mathematics*, 19:1–5, 1889.
- [145] J. J. Sylvester. On the reduction of a bilinear quantic of the n^{th} order to the form of a sum of n products by a double orthogonal substitution. *Messenger of Mathematics*, 19:42–46, 1889.
- [146] J. J. Sylvester. Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 108:651–653, 1889.

- [147] E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. I. Teil: Entwicklung willkürlichen Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Mathematische Annalen*, 63:433–476, 1907.
- [148] H. Weyl. Das asymptotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen (mit einer anwendung auf die theorie der hohlraumstrahlung). *Mathematische Annalen*, 71(4):441–479, 1912.
- [149] G. W. Stewart. On the early history of the singular value decomposition. *SIAM Review*, 35(4):551–566, 1993.
- [150] P. C. Hansen. Regularization tools: A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms*, 6(1):1–35, 1994.
- [151] P. C. Hansen. The discrete picard condition for discrete ill-posed problems. *BIT Numerical Mathematics*, 30(4):658–672, 1990.
- [152] J. L. Humar. *Dynamics of Structures*. CRC Press, 1990.
- [153] A. N. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 151:501–504, 1963.
- [154] D. L. Phillips. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *Journal of the ACM*, 9(1):84–97, 1962.
- [155] L. Landweber. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 73:615–624, 1951.
- [156] M. R. Hestenes and E. Stiefe. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436, 1952.
- [157] P. J. Davis. *Circulant Matrices: Second Edition*. American Mathematical Society, 2012.
- [158] J. Cooley and J. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301, 1965.
- [159] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. The John Hopkins University Press, 3rd edition, 1996.
- [160] P. C. Hansen and D. P. O’Leary. The use of the l-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(6):1487–1503, 1993.
- [161] R. Palm. *Numerical Comparison of Regularization Algorithms for Solving Ill-Posed Problems*. PhD thesis, University of Tartu, January 2010.

- [162] F. Bauer and M. A. Lukas. Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(9):1795–1841, 2011.
- [163] P. C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 34(4):561–580, 1992.
- [164] P.R. Johnston and R.M. Guljarani. Selecting the corner in the L-curve approach to Tikhonov regularization. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 47(9):1293–1296, 2000.
- [165] P.C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In P. Johnston, editor, *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, chapter 5, 119–142. WIT Press, 2001.
- [166] M. Hanke. Limitations of the l-curve method in ill-posed problems. *BIT Numerical Mathematics*, 36(2):287–301, 1996.
- [167] MeroForm System USA. M12 System, System & Function Component Catalogue. <http://www.meroform.us/pdf/m12.pdf>. Accessed: 2014-11-12.
- [168] MTS Systems Corporation. 634.25 Axial Extensometers. http://www.mts.com/ucm/groups/public/documents/library/dev_003729.pdf. Accessed: 2014-11-12.
- [169] A.M. Cohen. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Numerical Methods and Algorithms, vol. 5. Springer Science+Business Media, 2007.
- [170] H. Hassanzadeh and M. Pooladi-Darvish. Comparison of different numerical Laplace inversion methods for engineering applications. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2):1966–1981, 2007.
- [171] J. Hou, Ł. Jankowski, and J. Ou. Experimental study of the substructure isolation method for local health monitoring. *Structural Control & Health Monitoring*, 19(4):491–510, 2012.