

Aneta Ustrzycka

Optymalne kształtowanie elementów konstrukcyjnych z uwagi  
na czas zniszczenia mieszanego w warunkach pełzania

Praca doktorska

wykonana pod kierunkiem Prof. dr hab. inż. Krzysztofa Szuwalskiego

Politechnika Krakowska  
Wydział Mechaniczny  
Kraków 2012

Składam serdeczne podziękowania Promotorowi  
Panu Prof. dr hab. inż. Krzysztofowi Szuwalskiemu  
za pełną życzliwości pomoc okazywaną mi  
w ciągu całego toku studiów doktoranckich.

Aneta Ustrzycka

## SPIS TREŚCI

<b>1. Wprowadzenie.....</b>	<b>5</b>
<b>2. Teorie zniszczenia w warunkach pełzania.....</b>	<b>11</b>
2.1. Klasyczne teorie zniszczenia.....	11
2.1.1. Zniszczenie ciągłe wg Hoffa.....	12
2.1.2. Zniszczenie kruche wg Kachanova.....	13
2.1.3. Zniszczenie mieszane wg Kachanova.....	14
2.2. Sformułowanie problemu.....	16
<b>3. Teoretyczne rozważania.....</b>	<b>17</b>
<b>4. Optymalne kształtowanie prętów z uwagi na czas zniszczenia mieszane.....</b>	<b>22</b>
4.1. Pręt wirujący ze stałą prędkością kątową.....	22
4.1.1. Model matematyczny pręta z uwzględnieniem zniszczenia mieszane.....	24
4.1.2. Algorytm numeryczny.....	26
4.2. Optymalne rozwiązania.....	31
4.2.1. Optymalizacja jednoparametryczna.....	32
4.2.2. Optymalizacja dwuparametryczna.....	34
4.2.3. Korekta kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej.....	37
<b>5. Optymalne kształtowanie tarcz pełnych z uwagi na czas zniszczenia mieszane.....</b>	<b>41</b>
5.1. Model matematyczny pełzania tarczy pełnej z uwzględnieniem zniszczenia mieszane.....	41
5.2. Obliczenia numeryczne.....	48
5.2.1. Optymalizacja jednoparametryczna.....	55
5.2.2. Optymalizacja dwuparametryczna.....	57
5.2.3. Korekta kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej.....	60
<b>6. Optymalne kształtowanie tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia mieszane.....</b>	<b>64</b>
6.1. Model matematyczny pełzania tarczy pierścieniowej z uwzględnieniem zniszczenia mieszane.....	64
6.2. Wpływ warunków brzegowych.....	66
6.2.1. Tarcza utwierdzona na sztywnym wale.....	66

6.2.2. Tarcza osadzona na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym.....	72
6.2.3. Tarcza ze swobodnym brzegiem wewnętrznym.....	76
<b>7. Optymalne kształtowanie tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego.....</b>	<b>79</b>
7.1. Model matematyczny pełzania tarczy pierścieniowej z uwzględnieniem zniszczenia ciągłego.....	79
7.2. Wpływ warunków brzegowych.....	84
7.2.1. Tarcza utwierdzona na sztywnym wale.....	84
7.2.2. Tarcza osadzona na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym.....	86
7.2.3. Tarcza ze swobodnym brzegiem wewnętrznym.....	88
<b>8. Podsumowanie i perspektywy rozwoju tematyki pracy.....</b>	<b>91</b>
<b>9. Bibliografia.....</b>	<b>100</b>

---

# 1. Wprowadzenie

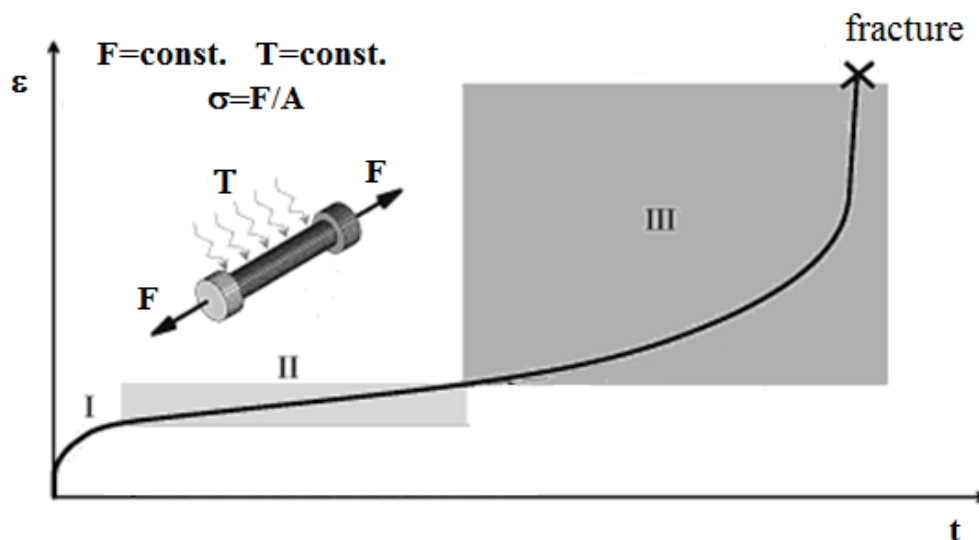
---

Problematyka optymalnego kształtowania elementów konstrukcyjnych jest od przeszło 300 lat przedmiotem zainteresowania na całym świecie. Jest to dziedzina interdyscyplinarna, stanowi ona połączenie nie tylko mechaniki i fizyki, ale także teorii optymalnego projektowania oraz informatyki. Każda z wymienionych dziedzin wiedzy bezpośrednio oddziałuje na wyniki optymalnego kształtowania. Postęp techniczny jaki osiągnięto w rozwoju technologii potęguje wzrost wymagań w zakresie wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych. Wszelkie badania naukowe stymulują rozwój tej dziedziny dając możliwość wykorzystania istniejących, w coraz szerszym stopniu rozwijających się algorytmów numerycznych i rozwiązań optymalnych z nich wynikających, umożliwiając jednocześnie ich praktyczne zastosowanie przez społeczeństwo.

Problematyka optymalnego kształtowania konstrukcji w warunkach pełzania jest stosunkowo młodą dziedziną i otwiera wiele nowych możliwości badań. Obciążenia eksploatacyjne elementów konstrukcyjnych na ogół mają charakter długoterminowy, często również realizowane są w podwyższonych temperaturach co sprzyja rozwojowi trwałej deformacji materiałów. Dominuje wówczas proces odkształcania będący wynikiem zjawiska pełzania klasycznie definiowanego jako proces zachodzący przy długotrwałym obciążeniu w podwyższonych temperaturach, w których wartości naprężeń i odkształceń powstałych w wyniku obciążenia elementu konstrukcyjnego ulegają zmianie w czasie. Zagadnienie to jest

szczególnie istotne w wielu działach przemysłu, począwszy od energetyki, (kotły parowe, łopatkę turbin w elektrowniach) w elektrowniach (rurociągi) w przemyśle chemicznym, w przemyśle obronnym (urządzenia wojskowe), na badaniach przestrzeni kosmicznej kończąc. Współczesne badania pełzania prowadzone są zarówno dla aktualnie stosowanych materiałów [66, 89, 30], jak i nowo wprowadzanych, np.: kompozyty [14, 31], materiały gradientowe [49, 48, 6, 7], intermetaliki [43].

Pierwsze prace badawcze procesu pełzania zostały wykonane przez fizyka M. Vicata [101] w latach 1830 – 1833 dla prętów żelaznych. Jego prace nie zostały wówczas opisane teoretycznie. Naukowy opis procesu pełzania zaproponowany został przez Andrade [2] w 1910 roku. Wprowadził on podział zjawiska pełzania na trzy etapy w zależności od charakteru zmiany prędkości odkształcenia (rys. 1.1).

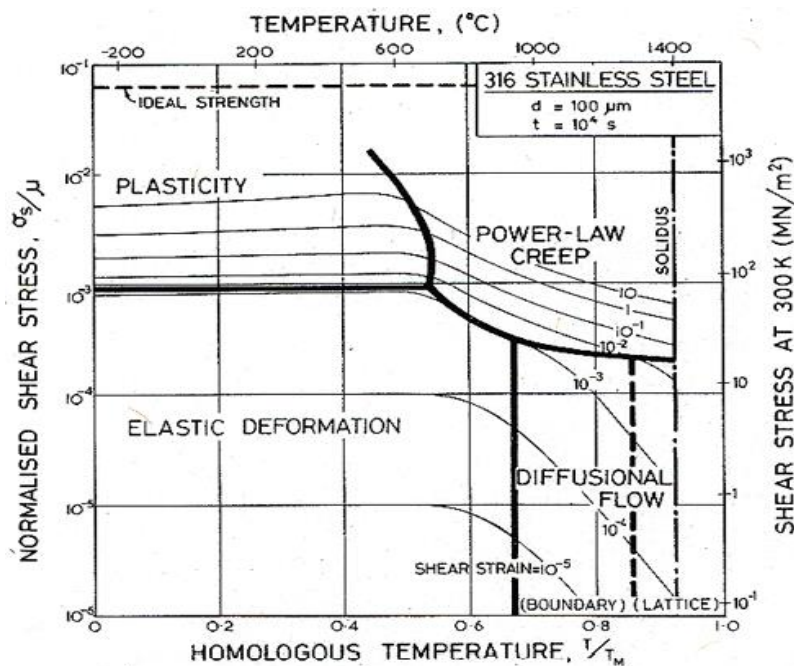


Rys. 1.1. Krzywa pełzania  $\epsilon(t)$  – odkształcenie próbki pod wpływem stałych obciążeń  $F$  i temperatury  $T$ .

W pierwszym okresie prędkość pełzania stopniowo maleje aż do osiągnięcia wartości minimalnej. Wartość odkształcenia pierwszego okresu pełzania jest zwykle niewielka i często jest pomijana. Drugi okres charakteryzuje się w przybliżeniu stałą prędkością pełzania (pełzanie ustalone). Okres ten jest wydłużony w czasie dlatego też może powodować duże odkształcenia. Podczas trzeciego etapu pełzania prędkość odkształcenia wzrasta, co prowadzi do zerwania próbki, a w konsekwencji do zniszczenia materiału.

Mikroskopowe mechanizmy deformacyjne w procesie pełzania (rys. 1.2) wpływające na przebieg krzywej pełzania można w najprostszy sposób podzielić na:

1. Mechanizm pełzanie dyslokacyjnego, zachodzący wskutek poślizgu dyslokacji w materiałach w których występujące w nich przeszkody dla ruchu dyslokacji odznaczają się małą wytrzymałością, a opór sieci krystalicznej jest niewielki lub poprzez wspinanie dyslokacji polegające na ominięciu tworzących się barier poprzez przejście dyslokacji na inną płaszczyznę poślizgu. Pełzanie zachodzące jednocześnie wskutek poślizgu i wspinania dyslokacji stanowi jeden z podstawowych mechanizmów odkształcenia dla tego procesu.
2. Mechanizm pełzania dyfuzyjnego, zachodzący wskutek przepływu wakansów (nieobsadzone atomy węzły sieci krystalicznej – defekty punktowe) z obszarów w których panują naprężenia rozciągające, w kierunku obszarów gdzie dominują naprężenia ściskające. Przepływ wakansów, a co za tym idzie masy, powoduje wydłużenie ziaren w kierunku rozciągania, w skali makroskopowej odpowiada za odkształcenie materiału.



Rys. 1.2. Mapa mechanizmów deformacyjnych [4].

Należy podkreślić, że odkształcenie pełzania jest procesem niezwykle złożonym i najczęściej zachodzi wskutek jednoczesnego działania kilku mechanizmów deformacyjnych [70]. W tym miejscu zostały one tylko pokrótce omówione, ponieważ nie są głównym przedmiotem zainteresowania niniejszej pracy.

Do opisu krzywej pełzania, dla przypadku dużych odkształceń Andrade [2] zaproponował empiryczny związek:

$$l = l_0(1 + \beta t^{1/3})e^{kt}, \quad (1.1)$$

gdzie:  $l_0$  jest długością początkową próbki,  $\beta$  i  $k$  są funkcjami naprężenia i temperatury materiału.

Z zależności tej można określić logarytmiczne odkształcenie pełzania:

$$\varepsilon_l = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \beta t^{1/3}) + kt, \quad (1.2)$$

oraz prędkość deformacji:

$$\dot{\varepsilon}_l = \frac{1}{3} \frac{\beta}{t^{2/3} + \beta t} + k. \quad (1.3)$$

Inną próbą opisu pełzania w jego drugim stadium jest wykładnicze prawo Ludwika [54] z roku 1908:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right), \quad (1.4)$$

gdzie:  $\dot{\varepsilon}$  jest ustaloną prędkością pełzania,  $\dot{\varepsilon}_0$  i  $\sigma_0$  - stałe materiałowe.

Podstawową wadą tego prawa jest fakt, że daje duże błędy w zakresie małych naprężeń.

Kolejną propozycją opisu pełzania ustalonego usuwającą tę wadę było prawo przedstawione przez Nadai'a [58] w 1938 roku:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = 2 \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right). \quad (1.5)$$

Najbardziej znanym prawem jest zależność typu potęgowego zaproponowana przez Nortona [60] w 1929 roku:

$$\dot{\varepsilon} = k\sigma^n, \quad (1.6)$$

gdzie:  $k$  i  $n$  to stałe materiałowe zależne od temperatury.

W ogólnym przypadku zjawisko pełzania opisuje równanie konstytutywne:

$$F(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, X, t) = 0, \quad (1.7)$$

gdzie przez  $X$  wprowadzono niejednorodność materiału, a przez  $t$  efekt starzenia.

W tabeli nr 1.1 przedstawiono zestawienie wybranych, najczęściej stosowanych praw fizycznych do opisu materiału.



Rodzaj funkcji	Prawo fizyczne	Autor propozycji	Rok	Pozycja w spisie literatury
Funkcja naprężenia	$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)$	Ludwik	1908	[54]
	$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) - 1$	Soderberg	1936	[81]
	$\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} = 2 \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)$	Nadai	1938	[58]
	$\dot{\varepsilon} = k\sigma^n$	Norton	1929	[60]
	$\dot{\varepsilon} = D_1\sigma^{m_1} + D_2\sigma^{m_2}$	Johnson, Henderson, Khan	1963	[44]
	$\dot{\varepsilon} = A \left[ \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \right]$	Garofalo	1965	[26]
	$\dot{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n + \left( \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} \right)^{n_0}$	Odqvist	1966	[62]
Funkcja czasu	$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \beta t^{1/3}) + kt$	Andrade	1910	[2]
	$\varepsilon = Ft^n$	Bailey	1935	[5]
	$\varepsilon = \sum a_i t^{n_i}$	Graham, Walles	1955	[32]
Funkcja temperatury	$\varepsilon = f[t \exp(-Q/RT)] f_1(\sigma)$	Dorn	1955	[15]
	$\varepsilon = f[t \exp(-Q/RT)]^n f_1(\sigma)$	Penny, Marriot	1971	[71]

$D_1, D_2, m_1, m_2, A, m, n, n_0, k, \beta, \sigma_0, \sigma_{c0}, a$  - stałe,  $Q$  - energia aktywacji,  $R$ - stała gazowa.

Tab.1.1. Prawa fizyczne stosowane w opisach pełzania [50].

Z punktu widzenia rozwoju badań pełzania niezmiernie istotne jest zagadnienie rozwoju uszkodzeń podczas procesu pełzania. Obecnie badania pełzania ukierunkowane są na rozwój fenomenologicznych [56] jak również mikroskopowych teorii [93].

Modele makroskopowe opierają się głównie na wynikach doświadczalnych. Zawierają parametry, które powinny być zidentyfikowane dla każdego rodzaju materiału. Choć nie wyjaśniają one w pełni przyczyn rozwoju uszkodzeń są w zupełności wystarczające i poprawne z punktu widzenia inżynierii konstrukcji.

Zrozumienie wewnętrznej natury pełzania było przyczyną powstania nowych fizycznych koncepcji opisu procesów zachodzących przy odkształceniach materiałów. Zaczęły się rozwijać koncepcje opisu pełzania uwzględniające rozwój uszkodzenia materiału w trakcie przebiegu procesu. W 1958 roku Kachanov [45] wprowadził pojęcie parametru uszkodzenia. Parametr uszkodzenia został zdefiniowany poprzez stosunek powierzchni pustek do powierzchni całkowitego przekroju. Propozycja Kachanowa stała się inspiracją do budowy modeli uszkodzenia i jest uważana za początek kontynualnej mechaniki uszkodzeń. Przełomowym momentem w rozwoju nowego nurtu było wprowadzenie w latach trzydziestych XX wieku przez Taylora [92] pojęcia dyslokacji, tj. liniowego defektu sieci krystalicznej.

Modele mikroskopowe powiązały rozwój uszkodzeń z istnieniem pustek w strukturze materiału, powstałych wskutek koncentracji naprężenia wytworzonego przez spiętrzone dyslokacje, które to pustki powiększając się, doprowadzają do zniszczenia [47, 17, 16]. Niewątpliwą zaletą tych modeli jest fakt, że pozwalają one oszacować czas do zniszczenia na podstawie parametrów opisujących strukturę i właściwości materiału [80]. Jednakże barierą dla rozwoju modeli mikroskopowych stał się problem skali. Zjawisko uszkodzeń opisywane jest równaniami różniczkowymi cząstkowymi i zmienne, na których operują, powinny być funkcjami ciągłymi. Aby rozwiązać ten problem wprowadzono pojęcie reprezentatywnego elementu objętościowego RVE, w obszarze którego dokonuje się homogenizacji zmiennych. Jednak aby prawidłowo zamodelować mechanizmy uszkodzeń potrzebne są modele operujące w skali mikro, a rezultaty ich działania muszą być w sposób właściwy przeniesione na poziom zmiennych makroskopowych.

Obecnie oba podejścia, fenomenologiczne oraz mikroskopowe rozwijane są równolegle.

---

## 2. Teorie zniszczenia w warunkach pełzania

---

### 2.1. Klasyczne teorie zniszczenia

Reologia formułuje prawa rozwoju w czasie odkształceń i przemieszczeń, poprzez wprowadzenie do równań stanu nowej zmiennej jaką jest czas. Zjawiska reologiczne ujawniają się przede wszystkim w postaci znacznych i narastających deformacji ciał uważanych za stałe. Właściwości zjawisk reologicznych powodują, że zniszczenie materiału następuje przy nawet niezbyt dużych wartościach przyłożonego naprężenia, pod warunkiem utrzymania go odpowiednio długo.

Stopniowe rozluźnienie struktury materiału w procesie pełzania prowadzi do utraty spójności materiału. Proces ten zainicjowany w jednym lub kilku izolowanych punktach ciała stopniowo rozszerza się na nowe obszary, następuje propagacja uszkodzeń by w efekcie końcowym doprowadzić do zniszczenia elementów konstrukcyjnych.

Badania prowadzone przy stałym naprężeniu nominalnym pokazują, że w zależności od wartości naprężenia i temperatury wyróżnić można trzy obszary, w których zniszczenie jest kontrolowane przez różne mechanizmy zmian mikrostrukturalnych i ma różną postać.

### 2.1.1. Zniszczenie ciągłe wg Hoffa

Dla dużych naprężeń i niskiej temperatury homologicznej (stosunek temperatury materiału do jego temperatury topnienia) dominują poślizgi wewnątrz ziaren i na ich granicach, obserwowane są duże odkształcenia, jest to tzw. zniszczenie ciągłe.

Koncepcja opisu matematycznego zniszczenia ciągłego została opracowana przez N. J. Hoffa [39]. Za kryterium zniszczenia ciągłego dla pryzmatycznego pręta rozciąganego stałą siłą Hoff przyjął czas, w którym przekrój poprzeczny  $A(X)$  zmaleje do zera, a co za tym idzie długość pręta  $l$  będzie zmierzać do nieskończoności.

$$\exists A_i(X) : (X \in \langle 0, l \rangle \wedge A(x, t_*) \rightarrow 0 \Rightarrow l \rightarrow \infty). \quad (2.1)$$

Do opisu materiału przyjął on prawo pełzania ustalonego Nortona Baileya:

$$\dot{\varepsilon} = k\sigma^n, \quad (2.2)$$

zastosowane do rzeczywistej miary naprężeń i logarytmicznej miary odkształceń:

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{L}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{l}}{l}, \quad (2.3)$$

gdzie  $L$  oznacza pierwotną, zaś  $l$  aktualną długość pręta,  $\dot{\varepsilon}$  oznacza tu prędkość odkształcenia logarytmicznego.

Uogólnienie prawa Nortona –Baileya dla naprężeń rzeczywistych i prędkości odkształceń logarytmicznych dobrze pokrywa się z wynikami badań doświadczalnych.

Naprężenia są definiowane jako rzeczywiste:

$$\sigma = \frac{P}{a}, \quad (2.4)$$

gdzie:  $P$  oznacza stałe obciążenie, odniesione do bieżącego przekroju poprzecznego  $a$ .

Przy założeniu nieściśliwości materiału:

$$AL = al, \quad (2.5)$$

gdzie  $A$  oznacza powierzchnię początkową przekroju poprzecznego, naprężenie rzeczywiste jest równe:

$$\sigma = \frac{Pl}{AL} = \Sigma \frac{l}{L}, \quad (2.6)$$

przez  $\Sigma$  oznaczono wartość naprężenia w chwili początkowej procesu pełzania (naprężenie nominalne).

Podstawienie powyższej zależności do prawa Nortona przy uwzględnieniu logarytmicznej miary odkształceń prowadzi do równania różniczkowego:

$$\frac{dl}{l^{n+1}} = \frac{k \Sigma^n}{L^n} dt, \quad (2.7)$$

które scałkowane przy warunku początkowym:

$$l(t=0) = L, \quad (2.8)$$

daje:

$$\frac{L}{l} = \frac{a}{A} = \left(1 - nk \Sigma^n t\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.9)$$

Czasem zniszczenia ciągłego będzie czas, po którym  $l \rightarrow \infty$ :

$$t_*^{(d)} = \frac{1}{nk \Sigma^n}. \quad (2.10)$$

Wówczas przekrój poprzeczny zmaleje do zera, a naprężenie rzeczywiste zmierza do nieskończoności. Jak widać, takie podejście wymaga prześledzenia całego procesu pełzania, z uwzględnieniem zmian geometrycznych zachodzących w jego trakcie (teoria skończonych odkształceń).

### 2.1.2. Zniszczenie kruche wg Kachanova

Zniszczenie typu kruchego zachodzi w obszarze niskich poziomów naprężeń wobec małych odkształceń. Jest ono spowodowane pęknięciami wewnątrz kryształów, które otwierając się w wyniku rozciągania tworzą mikropustki. Kachanov [46] wprowadził zmienną stanu  $\Psi \in \langle 1, 0 \rangle$ , opisującą rozwój uszkodzeń, określającą stosunek powierzchni efektywnie przenoszącej siły wewnętrzne (pomniejszonej o powierzchnię mikropustek) do powierzchni nominalnej, nieuszkodzonej:

$$\Psi = \frac{a_{ef}}{A}. \quad (2.11)$$

Równanie konstytutywne dla zmiennej  $\Psi$  (funkcja ciągłości) zostało zaproponowane w postaci równania ewolucji uzależniającego prędkość zmiennej  $\Psi$  od naprężenia rzeczywistego:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -D \left( \frac{\Sigma}{\Psi} \right)^m, \quad (2.12)$$

gdzie:  $D$  i  $m$  są stałymi materiałowymi.

Scałkowanie równania (2.12) przy stałym naprężeniu nominalnym  $\Sigma$  daje:

$$\Psi^{m+1} - 1 = -D(m+1) \Sigma^m t. \quad (2.13)$$

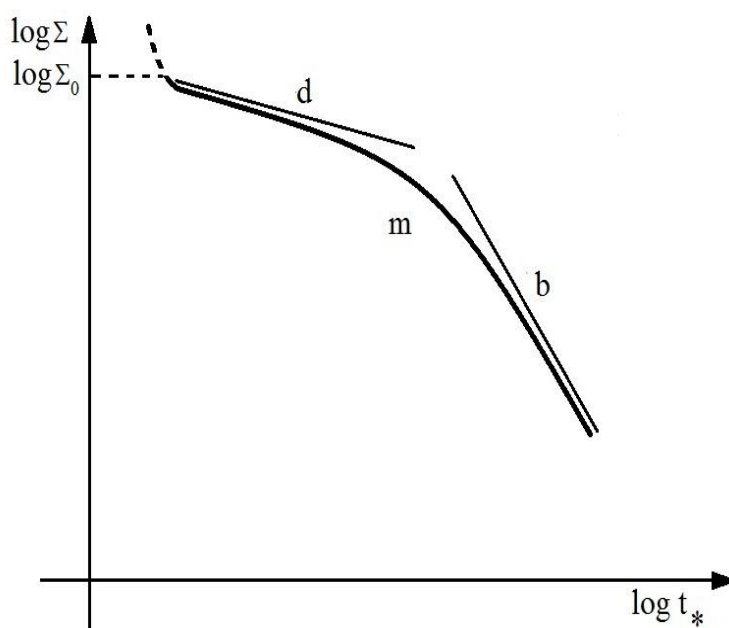
Czas po którym  $\Psi \rightarrow 0$  w chwili zniszczenia, pozwala określić czas zniszczenia kruchego  $t^b$ :

$$t_*^{(b)} = \frac{1}{(m+1)D\Sigma^m}. \quad (2.14)$$

Teoria ta pozwala na stosowanie zasady zeszywnienia.

### 2.1.3. Zniszczenie mieszane wg Kachanova

Kachanov zaproponował jeszcze rozwiązanie pośrednie, w którym założył jednoczesny wpływ zmian geometrycznych materiału w wyniku dużych odkształceń jak i zmniejszenie jego efektywnej powierzchni w konsekwencji rozwoju uszkodzeń.



Rys. 2.1. m- zniszczenie mieszane, d- zniszczenie ciągliwe Hoffa , b- zniszczenie kruche Kachanova.

Dla małych wartości naprężeń krzywa zniszczenia mieszanego (m) dąży asymptotycznie do prostej zniszczenia kruchego (b), natomiast dla większych wartości naprężeń krzywa ta jest ograniczana przez prostą opisującą zniszczenie ciągłego (d) (rys.2.1).

W równaniu ewolucji (2.12) naprężenie nominalne należy zastąpić aktualnym naprężeniem rzeczywistym  $\sigma$ , uwzględniającym zmniejszanie przekroju poprzecznego spowodowane przez duże odkształcenia (jak w zniszczeniu ciągłym):

$$\frac{d\Psi}{dt} = -D \left( \frac{\sigma}{\Psi} \right)^m. \quad (2.15)$$

Konieczną do scałkowania tego równania funkcję  $\sigma(t)$  określa się z prawa fizycznego. Dla prawa Nortona otrzymuje się:

$$\sigma(t) = \Sigma(1 - kn\Sigma^n t)^{\frac{1}{n}}. \quad (2.16)$$

Czas zniszczenia mieszanego otrzymuje się w wyniku całkowania równania ewolucji (2.15) przyjmując jako kryterium zniszczenia  $\Psi \rightarrow 0$ :

$$t_*^{(m)} = t_*^{(d)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{n-m}{n} \frac{t_*^{(b)}}{t_*^{(d)}} \right)^{\frac{n}{n-m}} \right]. \quad (2.17)$$

Aby powyższe równanie miało sens, musi zachodzić warunek:

$$1 - \frac{n-m}{n} \frac{t_*^{(b)}}{t_*^{(d)}} \geq 0, \quad (2.18)$$

stąd wynika ograniczenie stosowalności teorii zniszczenia mieszanego dla naprężenia:

$$\Sigma_0 \leq \left[ \frac{D(1+m)}{k(n-m)} \right]^{\frac{n}{n-m}}, \quad (2.19)$$

powyżej którego zniszczenie opisuje się wykorzystując teorię zniszczenia ciągłego Hoffa.

## 2.2. Sformułowanie problemu

Celem niniejszej pracy jest sformułowanie i uzyskanie efektywnych rozwiązań problemu optymalnego kształtowania elementów konstrukcji z uwagi na ich czas pracy do zniszczenia mieszanego przy pełzaniu.

Teoria ta, jak dotąd, nie była jeszcze stosowana w problemach optymalizacji. Przyczyny należy upatrywać w znacznym stopniu trudności zagadnienia, wynikającym z konieczności zastosowania teorii skończonych odkształceń w połączeniu z teorią kruchego pęknięcia Kachanova.

Problem optymalnego kształtowania sformułowano w niniejszej pracy następująco: dla zadanej, ustalonej objętości elementu  $V$ , która jest ograniczeniem, poszukiwany jest taki pierwotny kształt  $\mathfrak{S}$ , który przy ustalonych parametrach obciążenia i gabarytach elementu zagwarantuje najdłuższy możliwy czas pracy do chwili zniszczenia mieszanego  $t_*^{(m)}$ , rozumianego jako czas po którym funkcja ciągłości  $\Psi$ , bodaj w jednym miejscu elementu zmaleje do zera.

$$(\exists! \mathfrak{S} \in f), \quad t_*^{(m)} \xrightarrow{V=const.} \max, \quad (2.20)$$

gdzie funkcja  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .



---

## 3. Teoretyczne rozważania

---

Niniejszy rozdział poświęcono teoretycznym rozważaniom w oparciu o teorię mnogości stworzoną przez Georga Cantora [10], [11]. Postrzegając elementy konstrukcyjne jako pewne wyróżnione obiekty o zdefiniowanych własnościach, odróżniających się od innych, wskazano pewne klasy zbiorów, w tym zbiór optymalnych elementów konstrukcyjnych z uwagi na czas zniszczenia mieszanego, do których zalicza się jako jego elementy zdefiniowane obiekty. Przy odpowiednich założeniach sformułowano ogólne twierdzenia określające relacje pomiędzy odpowiednimi klasami zbiorów [85].

Przyjęto następujące założenia:

- izotropowość, jednorodność i ciągłość materiału elementu konstrukcyjnego,
- elementy konstrukcyjne poddaje się naprężeniom rozciągającym w kierunkach głównych,
- kierunki główne są ustabilizowane w czasie.

### Definicja 1:

Dla dowolnego zbioru  $\Omega$  o charakterze dystrybutywnym, istnieje niepusty zbiór niepowtarzających się elementów:

$$C = \{\aleph(\chi) \in \Omega : W_C(\aleph(\chi))\} \quad (3.1)$$

złożony z tych i tylko tych elementów zbioru  $C$ , zwanych dalej *elementami równomiernej wytrzymałości początkowej*, o zdefiniowanym profilu początkowym zależnym od współrzędnej materialnej Lagrange'a  $\aleph(\chi)$ , które mają daną własność  $W_C(\aleph(\chi))$ :

$$W_C(\aleph(\chi)) := \{\forall \aleph(\chi) : (\sigma_{red}(\chi, t=0) = \Sigma(\chi) = cK_r)\}, \quad (3.2)$$

gdzie:  $0 < c \leq 1$ ,  $K_r$  oznacza naprężenie krytyczne, niszczące.

Przez element konstrukcyjny równomiernej wytrzymałości początkowej, rozumie się więc taki element, w którym naprężenia na początku procesu pełzania, w chwili  $t = 0$ , będą stałe i wyrównane.

### Definicja 2:

Dla dowolnego zbioru  $\Omega$  o charakterze dystrybutywnym, istnieje niepusty zbiór niepowtarzających się elementów:

$$G = \{\aleph(\chi) \in \Omega : W_G(\aleph(\chi))\}, \quad (3.3)$$

złożony z tych i tylko tych elementów zbioru  $G$ , zwanych dalej *elementami równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane*, o zdefiniowanym profilu początkowym zależnym od współrzędnej materialnej Lagrange'a  $\aleph(\chi)$ , które mają daną własność  $W_G(\aleph(\chi))$ :

$$W_G(\aleph(\chi)) := \{\forall \aleph(\chi) : (\Psi(\chi_i, t_*^{(m)}) \in \langle 1, 0 \rangle \wedge \forall \chi_i : \Psi(\chi_i, t_*^{(m)}) \rightarrow 0)\}. \quad (3.4)$$

Elementami konstrukcyjnymi równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane będą więc nazywane takie elementy, w których stan zniszczenia mieszanego, gdy funkcja ciągłości osiąga wartość zero, zostanie osiągnięty równocześnie we wszystkich przekrojach.

Można wyobrazić sobie element konstrukcyjny o takich własnościach, że naprężenia na początku procesu pełzania, proporcjonalne do stałego naprężenia niszczącego, będą rozwijały się w taki sposób, że doprowadzą do sytuacji, w której funkcja ciągłości osiągnie wartość zero w chwili zniszczenia we wszystkich przekrojach równocześnie. Stan zniszczenia mieszanego

zostanie osiągnięty we wszystkich przekrojach równocześnie. Z tego wynika, że istnieje część wspólna zbiorów C i G.

Na podstawie powyżej przeprowadzonego rozumowania sformułowano lemat 1.

**Lemat 1:**

Istnieje część wspólna zbiorów C i G, której elementy konstrukcyjne posiadają własności:

$$\forall \mathfrak{N}(\chi) : [\mathfrak{N}(\chi) \in (C \cap G) \Rightarrow (\mathfrak{N}(\chi) \in \Omega : W_C(\mathfrak{N}(\chi))) \wedge (\mathfrak{N}(\chi) \in \Omega : W_G(\mathfrak{N}(\chi)))]. \quad (3.5)$$

Istnieje co najmniej jeden element równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane, który jest też elementem konstrukcyjny równomiernej wytrzymałości początkowej. Zależności pomiędzy zdefiniowanymi zbiorami przedstawiono na rysunku 3.1.

**Definicja 3:**

Dla dowolnego zbioru  $\Omega$  o charakterze dystrybutywnym, istnieje niepusty zbiór niepowtarzających się elementów:

$$Z = \{\mathfrak{N}(\chi) \in \Omega : W_Z(\mathfrak{N}(\chi))\}, \quad (3.6)$$

złożony z tych i tylko tych elementów zbioru Z, zwanych dalej *elementami równomiernej uszkodzalności* o zdefiniowanym profilu początkowym zależnym od współrzędnej materialnej Lagrange'a  $\mathfrak{N}(\chi)$ , które mają daną własność  $W_Z(\mathfrak{N}(\chi))$ , gdzie:

$$W_Z(\mathfrak{N}(\chi)) := \{\forall \mathfrak{N}(\chi) : (\Psi(\chi, t) = f(t))\}. \quad (3.7)$$

Przez elementy równomiernej uszkodzalności rozumie się takie elementy, dla których rozkład funkcji ciągłości jest niezależny od współrzędnej materialnej (wyrównany wzdłuż całego profilu), a zmienia się jedynie w czasie.

Tego typu elementy będą oczywiście jednocześnie elementami równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane. Będą one również posiadały własności elementów konstrukcyjnych równomiernej wytrzymałości początkowej. Stan zniszczenia mieszanego zostanie osiągnięty we wszystkich przekrojach równocześnie. W oparciu o wysnuty wniosek sformułowano lemat 2.

**Lemat 2:**

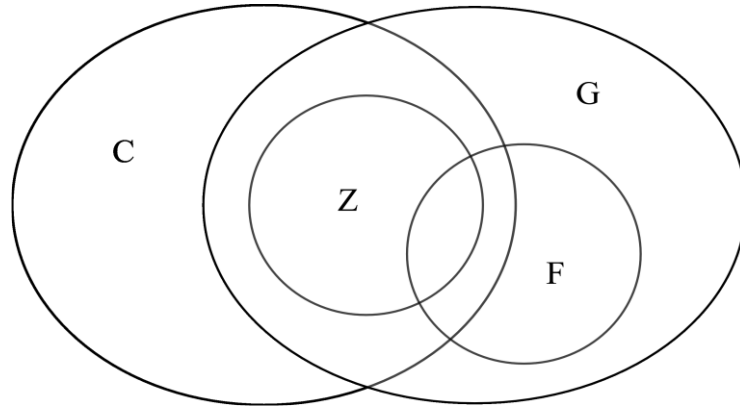
Zbiór  $Z$  jest właściwym podzbiorem części wspólnej zbiorów  $C$  i  $G$ . Zachodzi relacja:

$$Z \subset (C \cap G), \quad (3.8)$$

Z czego wynika, że:

$$\forall \mathfrak{N}(\chi) : \mathfrak{N}(\chi) \in Z \Rightarrow (\mathfrak{N}(\chi) \in \Omega : W_C(\mathfrak{N}(\chi))) \wedge (\mathfrak{N}(\chi) \in \Omega : W_G(\mathfrak{N}(\chi))), \quad (3.9)$$

Każdy element równomiernej uszkodzalności jest elementem równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane, jednocześnie istnieją elementy równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane, które nie są elementami równomiernej uszkodzalności. Wzajemne relacje pomiędzy zbiorami zostały przedstawione w postaci grafu (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Wzajemne relacje pomiędzy zbiorami.

**Definicja 4:**

Dla dowolnego zbioru  $\Omega$  o charakterze dystrybutywnym, istnieje niepusty zbiór niepowtarzających się elementów:

$$F = \{\mathfrak{N}(\chi) \in \Omega : W_F(\mathfrak{N}(\chi))\} \quad (3.10)$$

złożony z tych i tylko tych elementów zbioru  $F$ , zwanych dalej *elementami optymalnym z uwagi na czas zniszczenia mieszane* o zdefiniowanym profilu początkowym zależnym od współrzędnej materialnej Lagrange'a  $\mathfrak{N}(\chi)$ , które mają daną własność  $W_F(\mathfrak{N}(\chi))$ :

$$W_F(\mathfrak{N}(\chi)) := \left\{ \exists \mathfrak{N}(\chi) : (t_*^{(m)} \xrightarrow[V=const.]{} \max) \right\} \quad (3.11)$$

gdzie:  $\mathfrak{N}(\chi) \in f \wedge f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ .

Przez elementy optymalne z uwagi na czas zniszczenia mieszane, rozumie się elementy, dla których przy ustalonej objętości materiału czas do zniszczenia mieszane jest najdłuższy.

**Lemat 4:**

Zbiór  $F$  jest właściwym podzbiorem zbioru  $G$ . Zachodzi relacja:

$$F \subset G, \quad (3.12)$$

jednocześnie:

$$Z \cap F, \quad (3.13)$$

istnieje część wspólna zbiorów  $Z$  i  $F$  do których nie należą elementy ze zbioru  $C$ :

$$F \cap (C \cap Z), \quad (3.14)$$

istnieje część wspólna zbioru  $F$  oraz części wspólnej zbiorów  $Z$  i  $C$ .

Optymalne elementy z uwagi na czas zniszczenia mieszanego będą więc zawsze elementami równomiernej wytrzymałości na zniszczenie mieszane. Jednocześnie istnieją rozwiązania optymalne z uwagi na czas zniszczenia mieszanego pośród elementów równomiernej uszkodzalności, jak również pośród elementów równomiernej wytrzymałości początkowej będących jednocześnie elementami równomiernej wytrzymałości na zniszczenia mieszane.

---

## 4. Optymalne kształtowanie prętów z uwagi na czas zniszczenia mieszanego

---

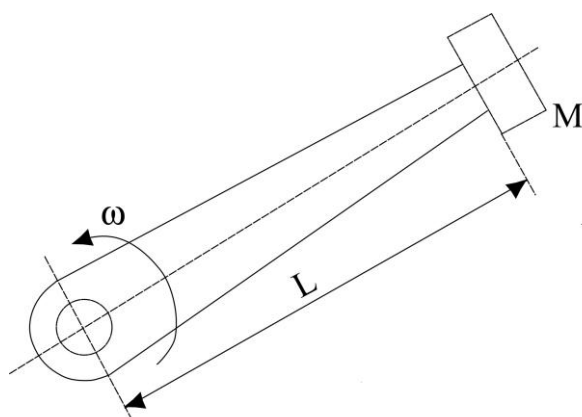
### 4.1. Pręt wirujący ze stałą prędkością kątową

The problem of optimal design of structures working in creep conditions is usually much more complicated than for elastic, or elastic-plastic structures. Difficulties are connected with existence of new independent variable – time, resulting in partial differential equations even in uniaxial problems. The general approach to the creep problem, especially in multi-axial stress state was presented by Martin and Leckie [55], Hayhurst [] and Betten [8].

W ostatnich latach do problemów optymalizacji kształtu stosowana była głównie teoria kruchego pęknięcia Kachanova z uwagi na możliwość stosowania zasady zeszywnienia. W ten sposób optymalne rozwiązania uzyskali Piechnik i Chrzanowski [73] dla belek, Rysz [77] dla cylindrów. Problem sprężystej deformacji prętów rozwiązali z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych i fizycznych dla różnych typów obciążeń Shimanovskii i Shalinskii [79]. Zastosowanie teorii zniszczenia ciągłego zaproponowanej przez Hoffa [39] prowadzi do znacznego skomplikowania problemu. Pierwsze rozwiązania problemów optymalizacyjnych, zgodnie z teorią Hoffa uzyskał Szuwalski [82] dla prętów. Niektóre problemy dla prętów przyrmatycznych były omawiane również przez Goluba [30], Pedersena [64] i Kulagina [51]. Definicja zniszczenia wg Hoffa - zmniejszenie przekroju poprzecznego do zera, może

powodować pewne wątpliwości, a nawet może prowadzić do braku optymalnego rozwiązania, jak to było wykazane przez Szuwalskiego [84, 87] na przykładzie kratownicy Misesa.

Niedogodności te mogą zostać usunięte poprzez zastosowanie teorii zniszczenia mieszanego zaproponowanej przez Kachanova [45], która bierze pod uwagę zarówno wzrost mikropustek jak również geometryczne zmiany wynikające z dużych obciążeń. Stopień komplikacji problemu oraz fakt, że jest to pierwsza próba sformułowania odmiennego problemu optymalnego kształtowania powoduje, że w pracy ograniczono się do stosunkowo prostych przypadków. Jako pierwszy rozpatrzono problem pręta o długości początkowej  $L$ , wirującego z ustaloną prędkością kątową  $\omega$  wokół jednego z końców (rys. 4.1).

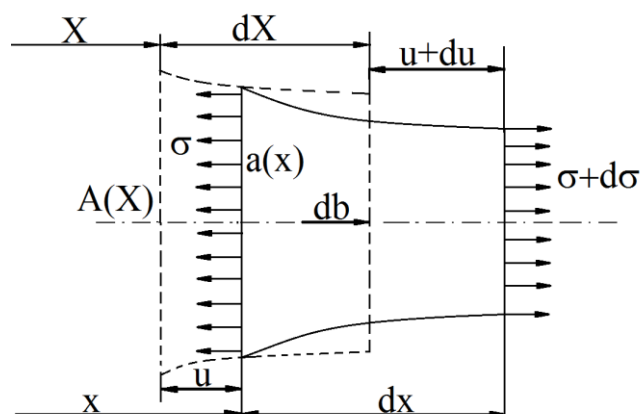


Rys.4.1. Model pręta wirującego.

W celu wyeliminowania rozwiązań trywialnych do swobodnego końca pręta przyłożono niezerową masę. W przypadku jej braku, w pręcie optymalnym cała jego masa skoncentrowałaby się na osi obrotu. Optymalny kształt pręta byłby więc opisany funkcją Diraca. Poszukiwano takiego kształtu pręta rozciąganego, który przy ustalonej objętości zapewni maksymalny czas pracy do zniszczenia mieszanego [96, 89].

#### 4.1.1. Model matematyczny pręta z uwzględnieniem zniszczenia mieszanego

Wyróżniono współrzędne materialne Lagrange'a, związane z jego pierwotną konfiguracją pręta (oznaczane dużymi literami), oraz współrzędne przestrzenne Eulera (rys. 4.2), mierzone w aktualnej konfiguracji (oznaczane małymi literami).



Rys. 4.2. Element pręta: w konfiguracji pierwotnej (linia przerywana), w aktualnej konfiguracji (linia ciągła).

Warunek równowagi wewnętrznej dla odkształconego elementu pręta przybiera postać:

$$\sigma da + ad\sigma + ba dx = 0, \quad (4.1)$$

gdzie:  $\sigma$  – naprężenia rzeczywiste,  $a$  – aktualna wielkość przekroju poprzecznego,  $b$  – siła masowa.

Założenie nieściśliwości materiału prowadzi do zależności między bieżącą a początkową powierzchnią przekroju:

$$a(x) = \frac{A}{\frac{dx}{dX}}. \quad (4.2)$$

Wykorzystując zależność (4.1) i (4.2) warunek równowagi wewnętrznej zapisano w następującej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\sigma A}{x'} \right] + bA = 0. \quad (4.3)$$

Wprowadzono logarytmiczną miarę odkształceń oraz prędkości odkształceń:

$$\varepsilon = \ln \frac{dx}{dX} = \ln x', \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{x}'}{x'}. \quad (4.4)$$

Symbol „prim” oznacza pochodną cząstkową względem współrzędnej materialnej  $X$ . Kropka u góry symbolu oznacza pochodną tej wielkości po czasie, przy ustalonej współrzędnej materialnej.

Dla prętów wykonanych z materiału podlegającego prawu Nortona uogólnionego dla naprężeń rzeczywistych i odkształceń logarytmicznych otrzymano:



$$\sigma = \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{n}}} \left[ \frac{\dot{x}'}{x'} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (4.5)$$

W połączeniu z warunkiem równowagi wewnętrznej (4.3) prawo to prowadzi do równania stanu:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{A(\dot{x}')^{\frac{1}{n}}}{k^{\frac{1}{n}} (x')^{\frac{n+1}{n}}} \right] + bA = 0. \quad (4.6)$$

Siła masowa w funkcji współrzędnej przestrzennej ma postać:

$$b(x) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 x, \quad (4.7)$$

Podstawienie siły (4.7) do równania stanu (4.6) prowadzi do równania:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{A(\dot{x}')^{\frac{1}{n}}}{k^{\frac{1}{n}} (x')^{\frac{n+1}{n}}} \right] + \frac{\gamma}{g} \omega^2 Ax = 0. \quad (4.8)$$

W celu określenia zniszczenia mieszanego należy wprowadzić równanie ewolucji Kachanova:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -D \left[ \frac{\sigma}{\Psi} \right]^m, \quad (4.9)$$

które posługuje się pojęciem funkcji ciągłości  $\Psi$ , zdefiniowanej tutaj poprzez stosunek powierzchni efektywnie przenoszącej naprężenia do aktualnej powierzchni przekroju, zmniejszonej wskutek przewężenia:

$$\Psi = \frac{a_{ef}}{a}. \quad (4.10)$$

Aby uzyskać rozwiązanie numeryczne zastąpiono równanie różniczkowe cząstkowe trzeciego rzędu (4.8) równoważnym układem czterech równań różniczkowych pierwszego rzędu, który w połączeniu z równaniem ewolucji Kachanova (4.10) przedstawia

matematyczny model pełzania:

$$\frac{\partial x}{\partial X} = y ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = z ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial X} = k \left[ \frac{f}{A} \right]^n y^{n+1} , \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{\gamma}{g} \omega^2 Ax ,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -D \left[ \frac{f}{a\Psi} \right]^m ,$$

o pięciu niewiadomych funkcjach: współrzędnej przestrzennej  $x(X,t)$ , jej pochodnej względem współrzędnej materialnej  $y(X,t)$  i względem czasu  $z(X,t)$ , siły podłużnej  $f(X,t)$  oraz funkcji ciągłości  $\Psi(X,t)$ .

Warunki brzegowe na osi obrotu dla tak sformułowanego problemu mają postać:

$$x(0,t) = 0 , \quad z(0,t) = 0 , \quad (4.12)$$

natomiast na swobodnym końcu pręta:

$$f(L,t) = M \omega^2 x(L,t) . \quad (4.13)$$

Warunki początkowe zapisano:

$$y(X,0) = 1 , \quad \Psi(X,0) = 1 . \quad (4.14)$$

#### 4.1.2. Algorytm numeryczny

Aby przeprowadzić obliczenia numeryczne układu (4.11), należy wprowadzić wielkości bezwymiarowe, tutaj oznaczane daszkiem u góry symbolu.

Współrzędna materialna jak i przestrzenna, będą odnoszone do długości początkowej pręta  $L$ :

$$\hat{X} = \frac{X}{L} , \quad \hat{x} = \frac{x}{L} , \quad (4.15)$$

przekroje poprzeczne są odnoszone do średniego przekroju pręta pryzmatycznego o zadanej objętości  $V$  :

$$\hat{A} = \frac{AL}{V}, \quad \hat{a} = \frac{aL}{V}. \quad (4.16)$$

Bezwymiarowa siła podłużna odniesiona jest do siły podłużnej rozciągającej wirujący pręt, obliczonej w oparciu o zasadę zeszywnienia, z pominięciem masy własnej pręta:

$$\hat{f} = \frac{f}{F_{pr}} = \frac{f}{M\omega^2 L}. \quad (4.17)$$

Konsekwentnie bezwymiarowe naprężenie jest odniesione do początkowego naprężenia  $\sigma_{pr}$  w pryzmatycznym pręcie rozciągającym siłą  $F_{pr}$  :

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_{pr}} = \frac{\sigma V}{M\omega^2 L^2}. \quad (4.18)$$

Bezwymiarowy czas odniesiony jest do czasu zniszczenia ciągłego pryzmatycznego pręta (2.10) rozciąganego naprężeniem  $\sigma_{pr}$  :

$$\hat{t} = \frac{t}{t_{pr}^{(d)}} = nk\sigma_{pr}^n t. \quad (4.19)$$

Powyższa parametryzacja czasu jest bardzo dogodna dla numerycznego całkowania równania równowagi wewnętrznej, lecz w przypadku równania ewolucji Kachanowa zrodzi ona pewne komplikacje w uniwersalności zapisanych równań.

W celu ubezwymiarowania równania ewolucji Kachanowa wprowadzono parametr  $\Theta$  wyrażony poprzez stosunek czasu zniszczenia kruchego do czasu zniszczenia ciągłego pryzmatycznego pręta rozciąganego naprężeniem  $\sigma_{pr}$  :

$$\Theta = \frac{t_{pr}^{(b)}}{t_{pr}^{(d)}} = \frac{nk\sigma_{pr}^n}{(m+1)D\sigma_{pr}^m}. \quad (4.20)$$

Parametr  $\Theta$  w funkcji stałych materiałowych  $k$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $D$ , opisuje fizyczny aspekt problemu, określa wrażliwość materiału na typ zniszczenia.

Wprowadzenie takich zmiennych bezwymiarowych jest wygodne dla numerycznego całkowania układu równań opisujących proces pełzania i rozwoju uszkodzeń (4.11):

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{X}} = y,$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{t}} = \hat{z},$$

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{X}} = \frac{1}{n} \left[ \frac{\hat{f}}{\hat{A}} \right]^n y^{n+1}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{X}} = -\mu \hat{A} \hat{x},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{t}} = \frac{-1}{(m+1)\Theta} \left[ \frac{\hat{f}}{\hat{A}\Psi} \right]^m,$$

gdzie:

$$\mu = \frac{V\gamma}{Mg}, \quad (4.22)$$

jest stosunkiem masy własnej pręta do masy zamocowanej na jego końcu.

Warunki początkowe oraz brzegowe w formie bezwymiarowej przyjmują postać:

$$\hat{x}(0, \hat{t}) = 0,$$

$$\hat{z}(0, \hat{t}) = 0,$$

$$\hat{f}(1, \hat{t}) = \hat{x}(1, \hat{t}), \quad (4.23)$$

$$y(\hat{X}, 0) = 1,$$

$$\Psi(\hat{X}, 0) = 1.$$

Rozwiązanie układu (4.21) jest możliwe tylko dla znanej początkowej geometrii pręta  $A(X)$  - rozkładu pola przekroju poprzecznego, która to dla zadanego problemu jest zmienną optymalizacji. Z tego powodu zastosowano optymalizację parametryczną.

Poszukiwano optimum w klasie funkcji wielomianowych, tak aby przez odpowiedni dobór parametrów  $b_i \in \mathbf{R}$  zmaksymalizować czas pracy do zniszczenia mieszanego:

$$(\exists! A(X) \in f) \quad t_*^{(m)} \xrightarrow{V=const.} \max, \quad (4.24)$$

gdzie funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $X \rightarrow b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_n X^n$ , dla wszystkich argumentów  $X \in \langle 0, L \rangle$ ,  $n \in \mathbf{N} \subset \{\mathbf{0}\}$  ( $n$  jest nieujemną liczbą całkowitą),  $b_i \in \mathbf{R}$  są stałymi współczynnikami, gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , i  $b_n \neq 0$ .

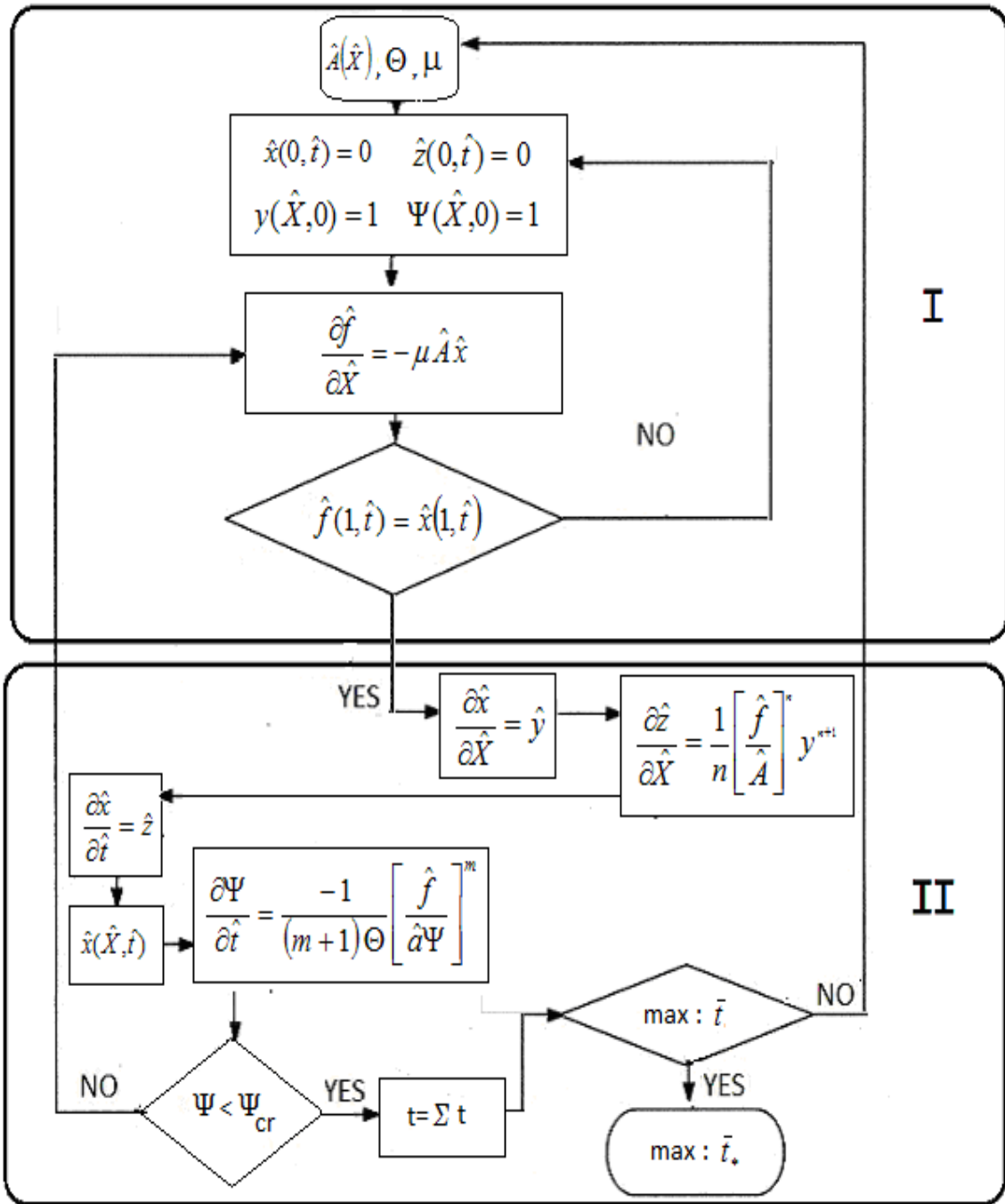
Kryterium zniszczenia materiału przyjęto w następującej formie:

$$\exists A_i(X) : (X \in \langle 0, l \rangle \wedge \Psi(\sigma, t_*^{(m)}) \in \langle 1, 0 \rangle \wedge \Psi(\sigma, t_*^{(m)}) \rightarrow 0). \quad (4.25)$$

W chwili początkowej procesu  $\Psi = 1$  na całej długości pręta i maleje wraz z rozwojem uszkodzeń w materiale. Czas po którym choć w jednym punkcie węzłowym funkcja ciągłości  $\Psi$  osiągnie wartość bliską zera (z zadaną dokładnością), określa czas pracy do zniszczenia mieszanego.

Model symulacyjny procesu pełzania prętów został stworzony w Maple'u [107, 108, 109]. Jest to program typu CAS (Computer Algebra System), który oprócz zaimplementowanych metod symbolicznych i numerycznych posiada wbudowany język programowania przez co staje się kompletnym środowiskiem do rozwiązywania zaawansowanych problemów matematycznych.

Obliczenia numeryczne były prowadzone według schematu przedstawionego na rys. 4.3. Właściwości fizyczne materiału wprowadzane są poprzez zdefiniowanie wykładnika potęgowego  $n$  w prawie Nortona, wykładnika potęgowego  $m$  w równaniu ewolucji Kachanova, parametru  $\mu$  oraz  $\Theta$ .



Rys.4.3. Algorytm obliczeń numerycznych.

Strukturę algorytmu podzielono na dwie części:

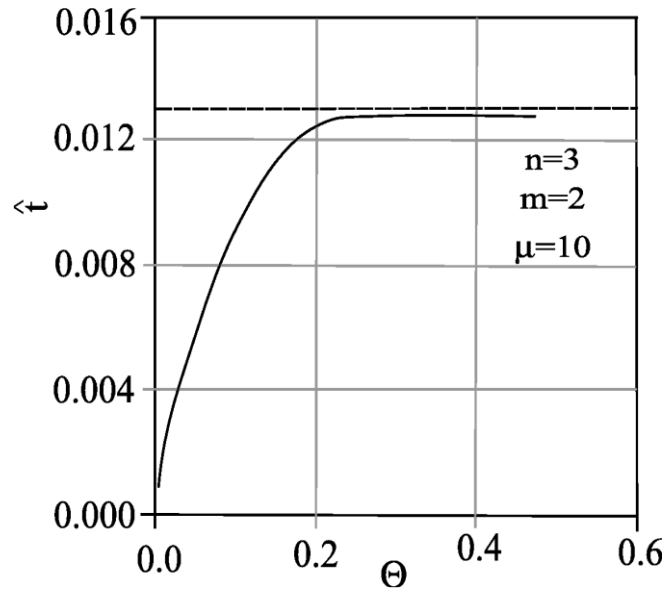
I części – dla zadanej (początkowej) geometrii pręta oraz stałych materiałowych, przy uwzględnieniu warunków początkowych i brzegowych (4.23) poszukiwany jest taki (początkowy) rozkład naprężeń w pręcie dla którego spełniony zostanie warunek na zewnętrznym brzegu pręta (zapisany jako trzecie równanie układu 4.23) z zadaną dokładnością. Ponieważ wartość naprężenia na brzegu wewnętrznym pręta nie jest znana, zastosowano procedury rekurencyjne. Początkowa długość pręta  $L$  podzielona została na 50 równych części. Wszystkim całkom po przestrzeni algorytm numeryczny przypisuje procedurę Rungego-Kutty IV rzędu.

W II części – dla znanego już rozkładu naprężeń obliczana jest zmiana geometrii pręta. Wszystkie całki czasowe liczone metodą Eulera. Ponieważ rozwiązania są bardzo czułe na wielkość kroku czasowego, obliczenia przeprowadzono ze zmiennym krokiem czasowym dobieranym do aktualnej prędkości pełzania. Następnie we wszystkich punktach węzłowych ustala się zmianę funkcji ciągłości  $\Psi$  i sprawdza, czy nie zostało wyczerpane przyjęte kryterium zniszczenia ( $\Psi_{cr} = 0.01$ ).

Cała procedura – (określenie rozkładu naprężeń dla pręta w części I , następnie w części II dla przyjętego kroku czasowego określenie zamiany geometrii i zmianę funkcji ciągłości) jest powtarzana do chwili, gdy na kolejnym kroku czasowym, w co najmniej jednym punkcie węzłowym funkcja ciągłości nie osiągnie wartości mniejszej od przyjętej wartości krytycznej  $\Psi < \Psi_{cr}$  . Wtedy proces pełzania zostaje zakończony, a nasumowane wszystkie wykonane kroki czasowe określają czas pracy pręta do zniszczenia mieszanego.

## 4.2. Optymalne rozwiązania

W celu ustalenia zakresu wartości zaproponowanego w pracy nowego parametru  $\Theta$  , przebadano jego wpływ na czas zniszczenia mieszanego wg opisanej powyżej procedury dla wybranego pręta o wykładnikach potęgowych  $n = 3$  i  $m = 2$ , oraz stosunku mas  $\mu = 10$ . Wpływ parametru  $\Theta$  na czas do zniszczenia przedstawiono na rys. 4.4.



Rys.4.4. Zależność czasu zniszczenia mieszanego w funkcji parametru  $\Theta$ .

Parametr  $\Theta$  (4.22) charakteryzuje wrażliwość materiału na typ zniszczenia. Wraz ze wzrostem wartości parametru  $\Theta$ , czas do zniszczenia elementu rośnie do pewnej granicznej wartości  $\Theta \approx 0.2$ , powyżej której nie wpływa on na czas zniszczenia. Dla wyższych wartości parametru ( $\Theta > 0.2$ ), zmniejsza się wrażliwość materiału na pęknięcie, materiał ulega zniszczeniu na skutek zmian geometrycznych przekroju poprzecznego i wówczas czas zniszczenia mieszanego staje się równy czasowi zniszczenia ciągłego.

#### 4.2.1. Optymalizacja jednoparametryczna

Z uwagi na brak możliwości zapisania funkcji celu (czas zniszczenia mieszanego) jako jawnej funkcji parametrów optymalizacji (profil początkowy pręta), wynikający z konieczności śledzenia całego procesu pełzania od początku do chwili zniszczenia, zdecydowano się na optymalizację parametryczną (metoda przeszukiwania).

Początkowo poszukiwano kształtu optymalnego pręta w klasie funkcji liniowych. Założono zmienność pola przekroju poprzecznego zgodnie z funkcją:

$$\hat{A}(\hat{X}, u_1, u_2) = u_0 + u_1 \hat{X}, \quad (4.26)$$

Z warunku ustalonej objętości:

$$\hat{V} = \int_0^1 \hat{A}(\hat{X}) d\hat{X} = 1 \quad (4.27)$$

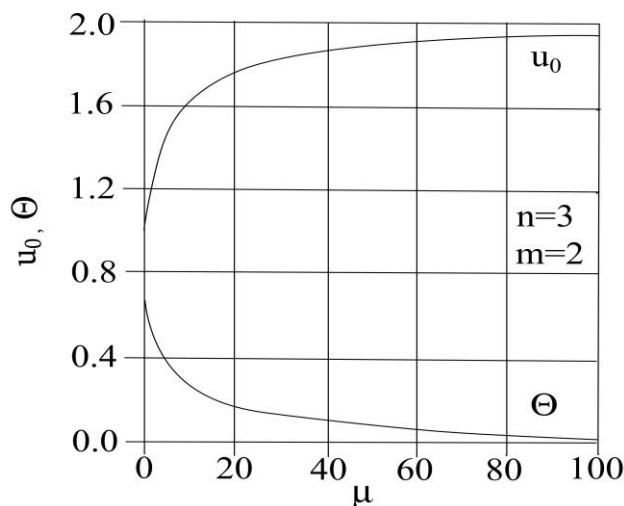
wynika następująca zależność:

$$u_1 = 2(1 - u_0). \quad (4.28)$$



Jako parametr swobodny przyjęto parametr  $u_0$ , ze względu na jego prostą interpretację fizyczną: jest on równy bezwymiarowemu przekrojowi pręta na osi obrotu.

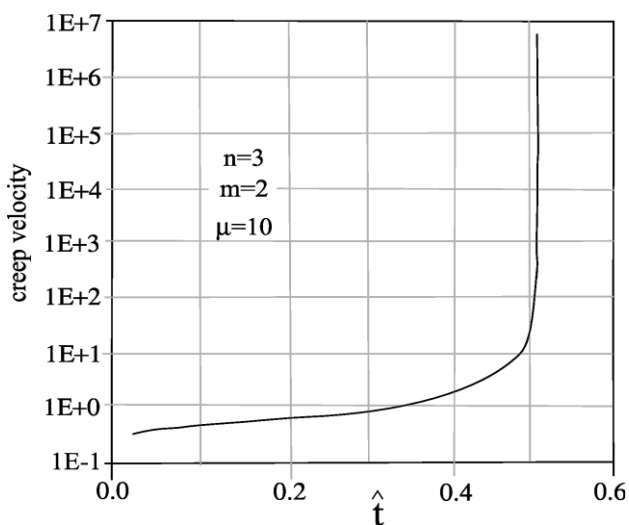
Wyniki jednoparametrycznej optymalizacji przedstawiono na rys. 4.5. Na rysunku tym pokazano zależność optymalnych wartości parametrów  $u_0$  w funkcji parametru  $\mu$  dla różnych wartości parametru  $\Theta$ .



Rys.4.5. Zależność optymalnych wartości parametrów  $u_0$  w funkcji parametru  $\mu$  dla różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Wraz ze zwiększającym się udziałem masy własnej pręta w stosunku do masy zamocowanej na jego końcu (parametr  $\mu$ ), przekrój pręta optymalnego na osi obrotu zwiększa się (parametr  $(u_0)_{opt}$ ). Dla  $\mu$  zmierzającego do nieskończoności, brak masy  $M$  na końcu pręta ( $u_0$  osiąga wartość 2.0), powierzchnia swobodnego końca pręta maleje do zera.

Zmiany prędkości pełzania pręta w zależności od czasu przedstawiono na rys. 4.6.



Rys.4.6. Prędkość pełzania w funkcji czasu.

W pierwszym okresie prędkość pełzania utrzymuje praktycznie stałą wartość, natomiast w drugim gwałtownie rośnie, aż do wystąpienia zniszczenia. R.W. Bailey [15] zaproponował interpretację takiego rozwoju zjawiska w postaci wzajemnego oddziaływania mechanicznego umocnienia i termicznego osłabienia materiału. W początkowym etapie następuje zrównoważenie pomiędzy procesami wzmocnienia odkształceniowego i termicznego osłabienia. Natomiast w końcowym etapie przeważa proces termicznego osłabienia prowadzącego do zniszczenia. Interpretacja fizyczna końcowego stadium jest bardzo trudna i wciąż poszukiwane jest jego właściwe wyjaśnienie.

#### 4.2.2. Optymalizacja dwuparametryczna

Lepszych rezultatów optymalnego kształtowania należało oczekiwać dla prętów, w których powierzchnia przekroju pierwotnego zmienia się wg funkcji kwadratowej:

$$\hat{A}(\hat{X}, b_0, b_1, b_2) = b_0 + b_1 \hat{X} + b_2 \hat{X}^2. \quad (4.29)$$

Parametry  $b_0$ ,  $b_1$  i  $b_2$  których wartości optymalnych poszukuje się, powiązane są warunkiem ustalonej objętości pręta, który prowadzi do zależności:

$$b_2 = 3 - 3b_0 - \frac{3}{2}b_1. \quad (4.30)$$

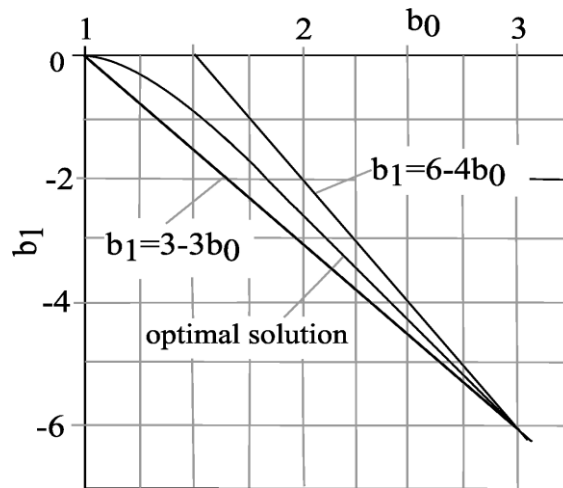
Zakres przeszukiwania parametrów swobodnych  $b_0$  i  $b_1$  w celu znalezienia optimum można ograniczyć, gdyż można się spodziewać iż powierzchnia przekroju  $A(\hat{X})$  powinna być funkcją monotonicznie malejącą co prowadzi do ograniczenia:

$$b_1 = 3(1 - b_0), \quad (4.31)$$

natomiast powierzchnia przekroju poprzecznego na swobodnym końcu musi być nieujemna:

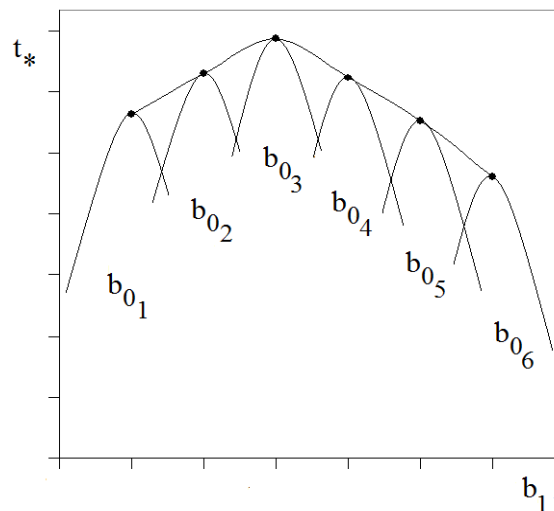
$$b_1 = 6 - 4b_0. \quad (4.32)$$

Optymalne rozwiązanie poszukiwane jest wewnątrz trójkąta, na powierzchni parametrów swobodnych, który został przedstawiony na rys. 4.7.



Rys.4.7. Zakres poszukiwań parametrów swobodnych:  $b_0$ ,  $b_1$ .

W przypadku optymalizacji dwuparametrycznej metoda przeszukiwania była szczególnie żmudna i czasochłonna. Dla założonego na wstępie parametru  $b_0$  dobierano kolejne wartości parametru  $b_1$  i badając cały proces pełzania takiego pręta ustalono jego czas zniszczenia mieszanego. W ten sposób znajdowano taki parametr  $b_1$ , który przy założonym  $b_0$  zapewniał najdłuższy czas pracy pręta. Następnie zmieniano wartość parametru  $b_1$  i w podobny sposób ustalono drugi z parametrów zapewniający maksymalny czas pracy.

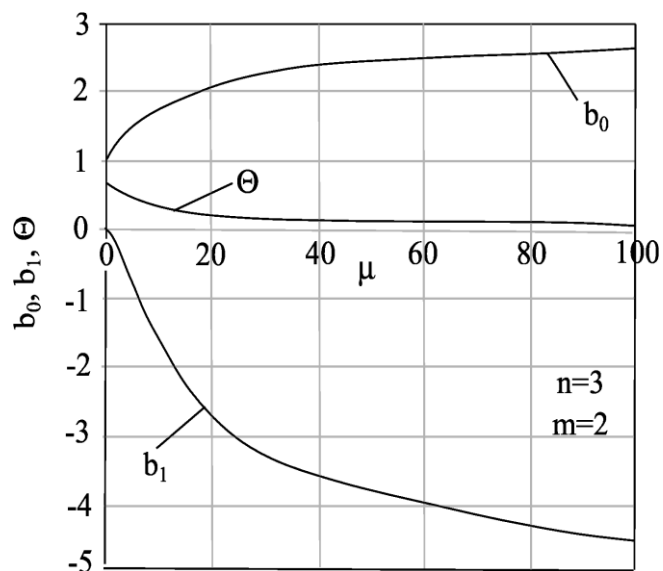


Rys. 4.8. Poszukiwanie optymalnych parametrów (maximum maximorum).

Obliczenia prowadzono do chwili, gdy kolejne maksimum cząstkowe dla parametru  $b_{0n}$  osiągało mniejszą wartość w stosunku do poprzedniego  $b_{0(n-1)}$  (rys. 4.8). Konstrukcja wspólnej obwiedni dla wszystkich maksymalnych wartości pozwalała na znalezienie „maximum maximorum”, które określało optymalne parametry kształtu i odpowiedni maksymalny czas pracy.

Tak więc, znalezienie jednego optymalnego rozwiązania wymagało przebadania całego procesu pełzania (od początku do chwili zniszczenia) czasem dla kilkudziesięciu różnych początkowych geometrii pręta.

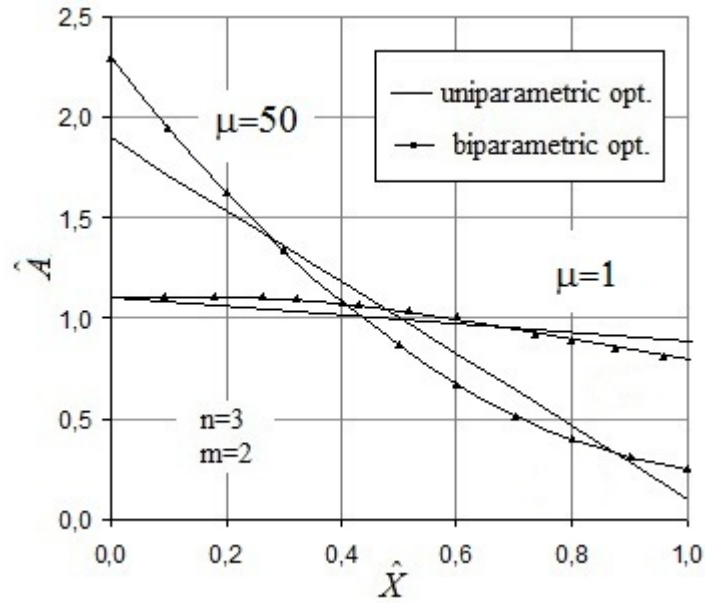
Na rys. 4.9 przedstawiono wyniki optymalizacji dwuparametrycznej: optymalne wartości parametrów  $b_1$ ,  $b_0$  w funkcji parametru  $\mu$ , dla różnych wartości parametru  $\Theta$ .



Rys. 4.9. Zależność parametrów  $b_1$ ,  $b_0$  i  $\Theta$  w funkcji parametru  $\mu$ .

Optymalizacja dwuparametryczna prowadzi do dłuższego czasu pracy w przypadku prętów, dla których stosunek masy własnej do masy skupionej na ich krawędzi ( wyższych wartości parametru  $\mu$  ). W przypadku niewielkiej masy własnej pręta ( $\mu \ll 1$ ), optymalizacja jedno- i dwuparametryczna dają podobne wyniki. Wynik ten skłania do zastosowania prętów płaskozbieżnych we wszystkich tych przypadkach. Jest to uzasadnione mniejszym nakładem pracy przy kształtowaniu konstrukcji prętowej.

Dla porównania zmiany optymalnych powierzchni przekrojów prętów dla dwóch różnych wartości  $\mu$  przedstawiono na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Zmiany przekrojów poprzecznych prętów optymalnych.

Dla małych wartości parametru  $\mu = 1$  (masa własna pręta mała w stosunku do masy skupionej na jego zewnętrznej krawędzi), optymalne kształty są bliskie prętom pryzmatycznym. Przeciwnie, gdy masa na brzegu zewnętrznym pręta może być praktycznie pomijalna ( $\mu = 50$ ) zmiany pola przekroju poprzecznego wzdłuż jego osi są bardzo znaczące. W stosunku do pręta płaskobierznego, zwiększeniu ulega grubość pręta na osi wirowania i na swobodnym końcu, kosztem przewężenia w środkowej części. Dla  $\mu \rightarrow \infty$ , przekrój na swobodnym końcu pręta zmniejsza się do zera.

#### 4.2.3. Korekta kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej

Spodziewano się, że korygując kształt równomiernej wytrzymałości będzie można uzyskać zwiększenie czasu pracy do zniszczenia mieszanego.

W pręcie równomiernej wytrzymałości początkowej naprężenia w chwili  $t = 0$  będą wyrównane:

$$\sigma(t = 0) = \Sigma = \text{const}(X). \quad (4.33)$$

Warunek równowagi wewnętrznej zapisany dla pręta nie zdeformowanego, gdy  $x = X$  ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial X} (A\Sigma) + B(X, X) A = 0. \quad (4.34)$$

Powyższe równanie, uwzględniając (4.33), może posłużyć do wyznaczenia kształtu pręta równomiernej wytrzymałości początkowej:

$$A(X) = \frac{P}{\Sigma} \exp \left[ \frac{1}{\Sigma} \int_L^x B(\Xi, \Xi) d\Xi \right], \quad (4.35)$$

gdzie  $L$  oznacza początkową długość pręta, zaś  $\Xi$  jest współrzędną materialną jako zmienną całkowania, przy czym uwzględniono tu już warunek brzegowy:

$$A(L) = \frac{P}{\Sigma}, \quad (4.36)$$

w którym  $P$  oznacza siłę przyłożoną w chwili początkowej do przekroju o współrzędnej  $L$ . Kształt pręta równomiernej wytrzymałości (4.35) po ubezwymiarowaniu przybiera postać:

$$\hat{A}_0(\hat{X}) = \frac{1}{\hat{\Sigma}} \exp \left[ \frac{\mu}{2\hat{\Sigma}} (1 - \hat{X}^2) \right], \quad (4.37)$$

gdzie:  $\hat{\Sigma}$  - bezwymiarowe naprężenie początkowe ustalone z warunku stałej objętości:

$$\hat{\Sigma} = \exp \frac{\mu}{2\hat{\Sigma}} \int_0^1 \exp \left[ -\frac{\mu}{2\hat{\Sigma}} \hat{X}^2 \right] d\hat{X}. \quad (4.38)$$

Na ten kształt nałożono poprawkę, tu przyjętą w formie funkcji kwadratowej

$$\hat{A}_{dod} = b_0 + b_1 \hat{X} + b_2 \hat{X}^2. \quad (4.39)$$

Wprowadzona poprawka nie może zmieniać objętości pręta:

$$\int_0^1 \hat{A}_{dod}(\hat{X}) d\hat{X} = 0 \quad (4.40)$$

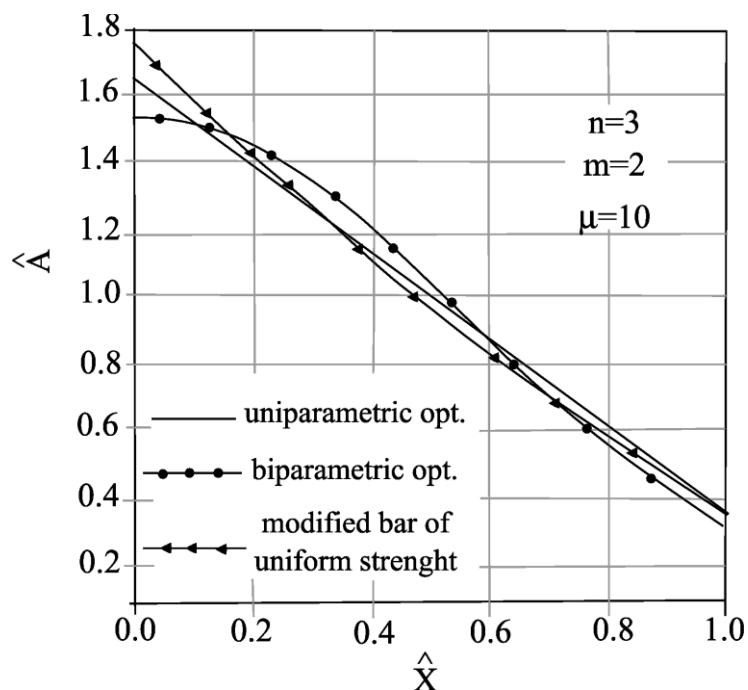
co narzuca związek między współczynnikami równania:

$$b_1 = -2b_0 - \frac{2}{3}b_2 \quad (4.41)$$

Dla różnych wartości parametrów swobodnych  $b_0$  i  $b_2$  wyznaczano początkowy kształt pręta:

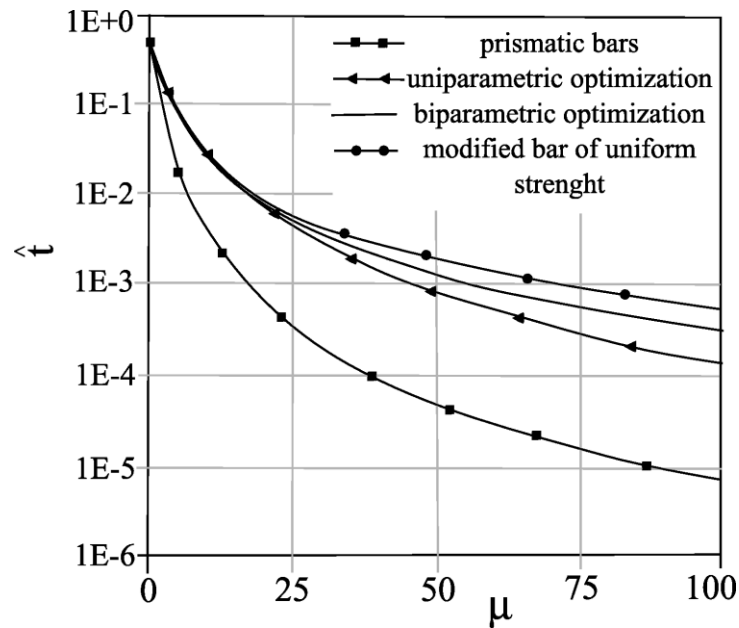
$$\hat{A}(\hat{X}) = \hat{A}_0(\hat{X}) + \hat{A}_{dod}(\hat{X}) \quad (4.42)$$

Optymalne kształty otrzymane poprzez zastosowanie optymalizacji jedno- i dwuparametrycznej, jak również poprzez korektę pręta równomiernej wytrzymałości dla ustalonego parametru  $\mu = 10$  i wykładnika  $n = 3$  przedstawiono na rys. 4.11.



Rys. 4.11. Optymalne profile prętów otrzymanych dla optymalizacji jedno- i dwuparametrycznej oraz poprzez korektę kształtu pręta równomiernej wytrzymałości.

Wykazano, że pręt równomiernej wytrzymałości nie jest prętem optymalnym z uwagi na czas zniszczenia mieszane. Korygując kształt równomiernej wytrzymałości poprzez przesunięcie części masy pręta od swobodnego końca w kierunku osi wirowania, uzyskano dłuższy czas pracy. Rys. 4.12. pokazuje również jak daleko od pręta optymalnego, przyjmując jako kryterium czas pracy do zniszczenia w funkcji parametru  $\mu$ , jest pręt przyzmatyczny.



Rys. 4.12. Czas zniszczenia w funkcji parametru  $\mu$  dla pręta pryzmatycznego oraz optymalnych kształtów pręta przy zastosowaniu optymalizacji jedno-, dwuparametrycznej, jak i korekty kształtu równomiernej wytrzymałości.

Analizując otrzymane wyniki obserwuje się zbieżność otrzymanych rozwiązań z wynikami pracy Szuwalskiego [82, 83], dotyczącej poszukiwania optymalnych kształtów pręta z uwagi na czas zniszczenia ciągłego. Otrzymane rozwiązania dla prętów z uwagi na czas zniszczenia ciągłego są porównywalne do optymalnych kształtów z uwagi na czas zniszczenia mieszanego. Powyższe wyniki skłaniają do zastosowania prętów płaskozbieżnych we wszystkich omawianych tu przypadkach. Jest to uzasadnione mniejszym nakładem pracy i materiału przy kształtowaniu konstrukcji prętowej. Pręt o przekroju pryzmatycznym, który z technologicznego punktu widzenia jest najłatwiejszy w wykonaniu jest daleki od prętów optymalnych.



---

## **5. Optymalne kształtowanie tarcz pełnych z uwagi na czas zniszczenia mieszanego**

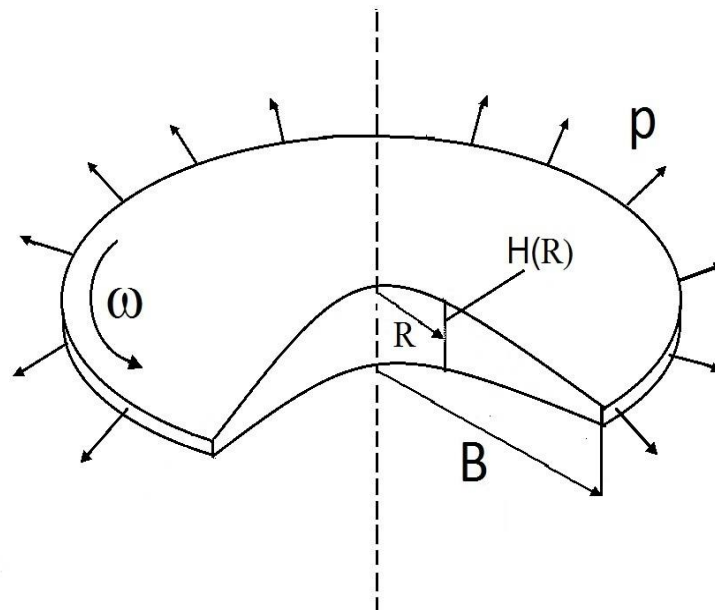
---

### **5.1. Model matematyczny pełzania tarczy pełnej z uwzględnieniem zniszczenia mieszanego**

Następnie zajęto się doбором optymalnego kształtu dla wirującej tarczy pełnej, elementu dwuwymiarowego, płaskiego. Większość prac poświęconych problematyce optymalizacji tarcz wirujących z uwagi na czas do zniszczenia opierała się na teorii kruchego pęknięcia Kachanova: Białkiewicz [9] zajmował się tarczami wirującymi o zmiennej grubości, Gunneskov [34] poszukiwał optymalnych rozwiązań dla tarcz wirujących jako kryterium przyjmując minimalną masę, Ganczarski i Skrzypek [25] poszukiwali rozwiązań dla tarcz wstępnie sprężonych. Wybrane zagadnienia optymalnego projektowania wirujących tarcz pierścieniowych zostały omówione przez Farshi i Bidabadi [23] oraz Ahmeta i Erasłana [1]. Analityczne rozwiązanie dla wirujących tarcz pierścieniowych wykonanych z materiału

sprężysto-plastycznego otrzymali Çğalloğlu, Topcu i Tarakcilar [12] Gun [33] , Orcan [63], Zennkour [104], oraz Eraslan w cyklu swoich prac poświęconych tarczom wirującym [18, 19, 20, 21]. Wirującymi tarczami sprężysto-plastycznymi ze zmienną grubością oraz zmienną gęstością wzdłuż promienia zajmowali się również Guven [35] , You [100], Vivio [102, 103], oraz Gamer [24]. Analiza wrażliwości kształtu dla tarcz, płyt oraz belek została przeprowadzona przez Demşa i Mroza [13].

W niniejszym rozdziale rozważono problem wirującej tarczy pełnej, której model przedstawiono na rysunku 5.1.



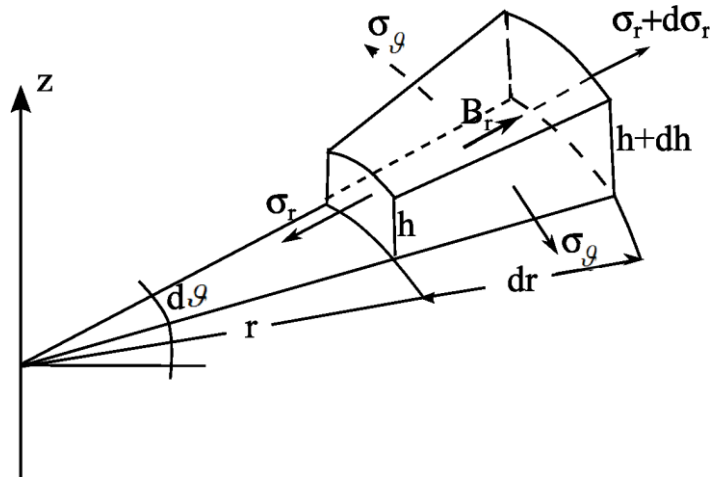
Rys. 5.1. Model wirującej tarczy pełnej.

Przy założeniu płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_z \equiv 0$ ) [27, 38], izotropowości materiału oraz osiowej symetrii poszukiwano takiego początkowego profilu tarczy  $H(R)$  przy warunku równościowym, zakładającym stałą objętość materiału  $V$ , który zapewniał najdłuższy czas pracy do zniszczenia mieszane [91, 98].

Zniszczenia mieszane rozumiane w sensie Kachanowa uwzględnia jednocześnie zmniejszenie przekroju powierzchni efektywnie przenoszącej naprężenia w wyniku rozwoju uszkodzeń jak i wpływ zmian geometrycznych układu spowodowanych pełzaniem materiału, co zmusza do rezygnacji z zasady zeszywnienia. Analizowano element tarczy już odkształconej (rys. 5.2), przy czym parametry związane ze stanem początkowym tarczy będą oznaczane dużymi literami, a ich bieżące wartości - małymi.

Opis prowadzony będzie we współrzędnych materialnych Lagrange'a, przy czym z uwagi na osiową symetrię problemu wszystkie wielkości będą funkcją dwóch zmiennych, promienia

$R$  i czasu  $t$ . Deformacja tarczy w czasie procesu pełzania opisana będzie przez zależność współrzędnej przestrzennej od materialnej  $r(R)$ .



Rys. 5.2. Element zdeformowanej tarczy.

Warunek równowagi dla tego elementu (rys. 5.2) z uwzględnieniem siły masowej wywołanej wirowaniem ze stałą prędkością kątową  $\omega$  przybiera postać:

$$\frac{1}{hr'} \frac{\partial}{\partial R} (h\sigma_r) + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0 \quad (5.1)$$

gdzie:  $\sigma_r$  oznacza bieżącą wartość naprężenia promieniowego, a  $\sigma_\phi$  - obwodowego,  $h$  - aktualną grubość tarczy,  $\gamma$  - ciężar właściwy materiału,  $g$  - przyspieszenie ziemskie. Założenie nieściśliwości materiału prowadzi do:

$$HRdR = hrdr, \quad (5.2)$$

gdzie:  $H$  - oznacza początkową grubość tarczy.

Z uwagi na duże odkształcenia zastosowano logarytmiczną miarę odkształceń:

$$\varepsilon_r = \ln \frac{\partial r}{\partial R} = \ln r',$$

$$\varepsilon_\phi = \ln \frac{r}{R}, \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_z = \ln \frac{h}{H},$$

oraz ich prędkości:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= \frac{\dot{r}'}{r'}, \\ \dot{\varepsilon}_g &= \frac{\dot{r}}{r}, \\ \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\dot{h}}{h},\end{aligned}\tag{5.4}$$

przy czym kreseczką oznaczono pochodne cząstkowe względem współrzędnej materialnej, natomiast kropką oznaczono pochodną cząstkową względem czasu.

W rozważanym przypadku wieloosiowego stanu naprężenia zastosowano prawo podobieństwa dewiatorów prędkości odkształceń logarytmicznych i naprężeń rzeczywistych. Przy założonej nieściśliwości materiału, dla kierunków głównych, można je zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \phi_c \left[ \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right], \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \phi_c \left[ \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \right], \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \phi_c \left[ \sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right].\end{aligned}\tag{5.5}$$

Moduł pełzania  $\phi_c$  wyznaczono z ogólnej zależności pomiędzy naprężeniem zredukowanym, a prędkością odkształcenia zredukowanego:

$$\dot{\varepsilon}_{red} = \phi_c (\sigma_{red}) \sigma_{red}.\tag{5.6}$$

Posługiwano się prawem potęgowym Nortona, uogólnionym na stan przestrzenny:

$$\dot{\varepsilon}_{red} = k \sigma_{red}^n,\tag{5.7}$$

które w najczęściej stosowanym przypadku hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)},\tag{5.8}$$

sprowadzi się do:

$$\dot{\varepsilon}_e = k \sigma_e^n.\tag{5.9}$$

Moduł pełzania będzie wówczas równy:

$$\phi_c = k \sigma_e^{n-1}.\tag{5.10}$$

Ostatecznie związki między naprężeniami rzeczywistymi i odkształceniami logarytmicznymi można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{3}{2}k\sigma_e^{n-1}(\sigma_1 - \sigma_m), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{3}{2}k\sigma_e^{n-1}(\sigma_2 - \sigma_m), \\ \dot{\varepsilon}_3 &= \frac{3}{2}k\sigma_e^{n-1}(\sigma_3 - \sigma_m),\end{aligned}\tag{5.11}$$

gdzie:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),\tag{5.12}$$

oznacza naprężenie średnie.

Na podstawie definicji odkształceń logarytmicznych (5.3), dwie pierwsze zależności można wyrazić przez przemieszczenia  $u$  (związki geometryczne dla których zachodzi zależność  $r = R + u$ ):

$$\varepsilon_r = \ln \frac{\partial r}{\partial R} = \ln \frac{\partial(R+u)}{\partial R} = \ln \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right),\tag{5.13}$$

$$\varepsilon_g = \ln \frac{r}{R} = \ln \frac{R+u}{R}.\tag{5.14}$$

Następnie przez eliminację funkcji  $u$ :

$$1 + \frac{\partial u}{\partial R} = \frac{R+u}{R} \frac{R \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)}{R+u},\tag{5.15}$$

otrzymano warunek nierozdzielności dla odkształceń logarytmicznych:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_g + \ln \left( 1 + R \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial R} \right)\tag{5.16}$$

Aby wyrugować z dalszych obliczeń odkształcenia, zróżniczkowano powyższe równanie po czasie:

$$\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_g = \frac{R \frac{\partial \dot{\varepsilon}_g}{\partial R}}{1 + R \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial R}}.\tag{5.17}$$

Poniżej przedstawiono pochodne po odpowiednich zmiennych:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{2}k(\sigma_r^2 + \sigma_g^2 - \sigma_r\sigma_g)^{\frac{n-1}{2}}(2\sigma_r - \sigma_g),$$

$$\dot{\varepsilon}_g = \frac{1}{2}k(\sigma_r^2 + \sigma_g^2 - \sigma_r\sigma_g)^{\frac{n-1}{2}}(2\sigma_g - \sigma_r), \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_g}{\partial R} = \frac{r'}{r} - \frac{1}{R},$$

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}_g}{\partial R} = \frac{1}{2} \left\{ k \frac{n-1}{2} (\sigma_r^2 + \sigma_g^2 - \sigma_r\sigma_g)^{\frac{n-3}{2}} [\sigma_r'(2\sigma_r - \sigma_g) + \sigma_g'(2\sigma_g - \sigma_r)](2\sigma_g - \sigma_r) + \right. \\ \left. + (2\sigma_g' - \sigma_r')(\sigma_r^2 + \sigma_g^2 - \sigma_r\sigma_g)^{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

które to następnie podstawiono do równania (5.17).

W konsekwencji otrzymano warunek nierozdzielności w formie związków między naprężeniami:

$$\sigma_r'[(n-1)(2\sigma_r - \sigma_g)(2\sigma_g - \sigma_r) - 2\sigma_e^2] + \sigma_g'[(n-1)(2\sigma_g - \sigma_r)^2 + 4\sigma_e^4] = \\ = 6\sigma_e^2 \frac{r'}{r} (\sigma_r - \sigma_g). \quad (5.19)$$

Biorąc pod uwagę drugie z równań (5.18) wraz z drugim ze związków między naprężeniami rzeczywistymi i odkształceniami logarytmicznymi (5.3), prawo zmiany postaci uogólnione dla naprężeń rzeczywistych i prędkości odkształceń logarytmicznych przyjmuje postać:

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1}{2}k\sigma_e^{n-1}(2\sigma_g - \sigma_r). \quad (5.20)$$

W celu określenia zniszczenia mieszanego dodatkowo wprowadzono równanie ewolucji Kachanova dla złożonego stanu naprężenia:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -D \left[ \frac{\sigma_e}{\Psi} \right]^m, \quad (5.21)$$

gdzie:  $\Psi$  oznacza skalarną funkcję ciągłości,  $D$  i  $m$  stałe materiałowe, natomiast naprężenie efektywne  $\sigma_e$  wyrażone jest zależnością:

$$\sigma_e = (\sigma_r^2 + \sigma_g^2 - \sigma_r\sigma_g)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.22)$$

Skalarna funkcja ciągłości  $\Psi$  występująca w równaniu ewolucji Kachanova charakteryzuje stopień uszkodzenia materiału:

$$\Psi = \frac{a_{ef}}{a}, \quad (5.23)$$

zdefiniowana jest poprzez stosunek powierzchni efektywnie przenoszącej naprężenia do aktualnej powierzchni przekroju. W chwili początkowej procesu:  $\Psi=1$ , maleje wraz z rozwojem uszkodzeń w materiale, aż do wartości  $\Psi=0$ , jest to moment, który określa zniszczenia materiału.

Warunek równowagi wewnętrznej (5.1) warunek nieściśliwości (5.2), warunek nierozdzielności, zapisany w formie związków między naprężeniami (5.19), prawo zmiany postaci (5.20) oraz równanie ewolucji Kachanowa (5.21) tworzą układ pięciu równań pozwalających na określenie pięciu niewiadomych rzeczywistych: naprężeń  $\sigma_r$  promieniowego i  $\sigma_g$  obwodowego, parametrów określających deformację tarczy: współrzędnej przestrzennej  $r$  i bieżącej grubości  $h$ , oraz funkcję ciągłości  $\Psi$ .

$$\frac{1}{hr'} \frac{\partial}{\partial R} (h\sigma_r) + \frac{\sigma_r - \sigma_g}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0,$$

$$\sigma'_g = \frac{6\sigma_e^2 (\sigma_r - \sigma_g) \frac{r'}{r} - \sigma'_r [(n-1)(2\sigma_r + \sigma_g)(2\sigma_g + \sigma_r) - 2\sigma_e^2]}{[(n-1)(2\sigma_g - \sigma_r)^2 + 4\sigma_e^2]}, \quad (5.24)$$

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1}{2} k \sigma_e^{n-1} (2\sigma_g - \sigma_r),$$

$$HRdR = hrdr,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -D \left[ \frac{\sigma_e}{\Psi} \right]^m.$$

W chwili początkowej tarcza pozostaje nieodkształcona, dlatego warunki początkowe przyjmują postać:

$$r(R,0) = R; \quad h(R,0) = H(R). \quad (5.25)$$

Warunki brzegowe na osi tarczy mają następującą postać:

$$r(0,t) = 0; \quad \dot{r}(0,t) = 0, \quad (5.26)$$

$$\sigma_r(0,t) = \sigma_g(0,t). \quad (5.27)$$

Założono, że obciążenie na brzegu zewnętrznym wirującej tarczy jest wynikiem zamocowania na tym brzegu stałej masy  $M$ , przy czym będzie się ona rozkładała równomiernie. Całkowita siła promieniowa na obwodzie zewnętrznym będzie równa:

$$N_r(R_0) = M\omega^2 r(R_0,t) \quad (5.28)$$

Naprężenie promieniowe na brzegu zewnętrznym, równe ciśnieniu rozciągającemu  $p$  w tym miejscu:

$$\sigma_r(R_0) = p = \frac{N_r(R_0)}{2\pi r(R_0)h(R_0)} = \frac{M\omega^2}{2\pi h(R_0)} \quad (5.29)$$

Układ pięciu równań (5.24) pozwala na określenie czasu zniszczenia mieszanego. Będzie to czas po którym choć w jednym miejscu spełnione będzie kryterium zniszczenia przyjęte w następującej postaci:

$$\exists R : (R \in \langle 0, l \rangle \wedge \Psi \in \langle 1, 0 \rangle \wedge \Psi(\sigma) \Big|_{t_*^{(m)}} \rightarrow 0) \quad (5.30)$$

przy założonej jednorodności poprzecznej materiału.

Z uwagi na stopień komplikacji problemu, zdecydowano się na optymalizację parametryczną. Kryterium optymalizacji parametrycznej przyjęto w następującej postaci :

$$(\exists! H(R) \in f) \Big|_{t_*^{(m)}} \xrightarrow{V=const.} \max, \quad (5.31)$$

gdzie funkcja  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $R \rightarrow b_0 + b_1R + b_2R^2 + \dots + b_nR^n$ , dla wszystkich argumentów  $R \in \langle A, B \rangle$ , gdzie  $n \in \mathbf{N} \subset \{0\}$  ( $n$  jest nieujemną liczbą całkowitą),  $b_i \in \mathbf{R}$  są stałymi współczynnikami, gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , i  $b_n \neq 0$ .

Dla zadanej, ustalonej objętości konstrukcji  $V$ , która jest ograniczeniem, poszukiwano takiego pierwotnego profilu tarczy pełnej w klasie funkcji wielomianowych, który przy ustalonych parametrach obciążenia i ustalonym zewnętrznym promieniu początkowym  $R_0$  zagwarantuje najdłuższy możliwy czas pracy do chwili zniszczenia mieszanego.

## 5.2. Obliczenia numeryczne

Aby przeprowadzić obliczenia numeryczne, należy wprowadzić wielkości bezwymiarowe, tutaj oznaczane daszkami. Współrzędna materialna jak i przestrzenna, będą odnoszone do początkowego promienia zewnętrznego  $R_0$ :

$$\hat{R} = \frac{R}{R_0}, \quad \hat{r} = \frac{r}{R_0}. \quad (5.32)$$

Grubość tarczy będzie odnoszona do grubości średniej  $h_m$ , płaskiej tarczy pełnej o objętości  $V$  i promieniu  $R_0$ :



$$h_m = \frac{V}{\pi R_0^2} . \quad (5.33)$$

Bezwymiarowe grubości tarczy początkowa i bieżąca, odnoszone do grubości średniej  $h_m$ , będą wynosiły odpowiednio:

$$\hat{H} = \frac{\pi R_0^2}{V} \cdot H ; \quad \hat{h} = \frac{\pi R_0^2}{V} \cdot h . \quad (5.34)$$

Bezwymiarowe naprężenia rzeczywiste będą odnoszone do naprężenia  $s$  w płaskiej tarczy pełnej w spoczynku, rozciąganej równomiernym ciśnieniem  $p$  (5.29), obliczonym przy zachowaniu zasady zeszywnienia:

$$s = \frac{M\omega^2}{2\pi h_m} = \frac{M\omega^2 R_0^2}{2V} . \quad (5.35)$$

Zatem:

$$\hat{\sigma}_i = \frac{2V}{M\omega^2 R_0^2} \cdot \sigma_i ; \quad i = r, \vartheta . \quad (5.36)$$

Bezwymiarowy czas odniesiono do czasu zniszczenia ciągłego pełnej płaskiej tarczy, wirującej z prędkością  $\omega$  obciążoną równomiernie na obwodzie zewnętrznym masą  $M$ , przy pominięciu masy własnej tarczy:

$$\hat{t} = \frac{t}{t_0^{(d)}} . \quad (5.37)$$

Czas zniszczenia ciągłego  $t_0^{(d)}$  pełnej płaskiej tarczy wyznaczono ze związku pomiędzy naprężeniami rzeczywistymi i odkształceniami logarytmicznymi:

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\dot{h}}{h} = \frac{3}{2} k \sigma_e^{n-1} (\sigma_z - \sigma_m) \quad (5.38)$$

przy czym intensywność naprężeń w pełnej tarczy będzie równa:

$$\sigma_e = \sigma_r = \sigma_\vartheta = p , \quad (5.39)$$

natomiast naprężenie średnie, przy założeniu płaskiego stanu naprężenia ( $\sigma_z \equiv 0$ ) wynosi:

$$\sigma_m = \frac{2}{3} p \quad (5.40)$$

Wykonanie tych podstawień do (5.38) prowadzi do równania:

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = -k \left( \frac{M\omega^2}{2\pi h} \right)^n \quad (5.41)$$

Przy odpowiednim warunku początkowym:

$$t = 0; \quad h = h_m, \quad (5.42)$$

z warunku zniszczenia ciągłego:

$$h \rightarrow 0, \quad (5.43)$$

wyznaczono czas  $t_0^{(d)}$ :

$$t_0^{(d)} = \frac{1}{nk \left( \frac{M\omega^2}{2\pi h_m} \right)^n} = \frac{1}{nks^n}. \quad (5.44)$$

Ostatecznie czas bezwymiarowy będzie wynosił:

$$\hat{t} = nks^n t \quad (5.45)$$

Układ pięciu równań różniczkowych cząstkowych w postaci bezwymiarowej, opisuje proces pełzania tarczy wirującej z uwagi na czas zniszczenia mieszanego:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}'_r &= \frac{\hat{r}'}{\hat{r}} (\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_g) - 2 \cdot \hat{r}' \hat{r}' \mu - \frac{\hat{h}'}{\hat{h}} \hat{\sigma}_r \\ \hat{\sigma}'_g &= \frac{6\hat{\sigma}_e^2 (\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_g) \frac{\hat{r}'}{\hat{r}} - \hat{\sigma}'_r \left[ (n-1) (5\hat{\sigma}_r \hat{\sigma}_g - 2\hat{\sigma}_r^2 - 2\hat{\sigma}_g^2) - 2\hat{\sigma}_e^2 \right]}{(n-1)(2\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_r)^2 + 4\hat{\sigma}_e^2} \\ \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} &= \frac{\hat{r}}{2 \cdot n} \left( \hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}_g^2 - \hat{\sigma}_r \hat{\sigma}_g \right)^{\frac{n-1}{2}} (2\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_r) \\ \hat{h} &= \frac{\hat{H}\hat{R}}{\hat{r}'\hat{r}} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{t}} &= \frac{-1}{(m+1)\Theta} \left[ \frac{\hat{\sigma}_e}{\Psi} \right]^m, \end{aligned} \quad (5.46)$$

gdzie  $\mu$  jest stosunkiem masy własnej tarczy do masy umieszczonej na jej zewnętrznym obwodzie:

$$\mu = \frac{\gamma V}{gM}. \quad (5.47)$$

W celu zredukowania dużej liczby stałych materiałowych w obliczeniach numerycznych wprowadzamy nowy parametr wprowadzono parametr  $\Theta$ , który wyrażono tutaj poprzez stosunek czasu zniszczenia kruchego do czasu zniszczenia ciągłego pryzmatycznego pręta z pominięciem jego masy własnej, rozciągane naprężeniem równym naprężeniu  $s$  (5.35) w płaskiej tarczy pełnej w spoczynku:

$$\Theta = \frac{t_{pr}^{(b)}}{t_{pr}^{(d)}} = \frac{nk s^n}{(m+1)D s^n}. \quad (5.48)$$

Układ ten został zapisany w dogodnej postaci do całkowania numerycznego.

Warunki początkowe w bezwymiarowej formie przyjmują postać:

$$\hat{r}(\hat{R}, 0) = \hat{R}, \quad \hat{h}(\hat{R}, 0) = \hat{H}(\hat{R}). \quad (5.49)$$

Warunki brzegowe na osi tarczy w postaci bezwymiarowej można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \hat{r}(0, \hat{t}) &= 0, \quad \dot{\hat{r}}(0, \hat{t}) = 0, \\ \hat{\sigma}_r(0, \hat{t}) &= \hat{\sigma}_g(0, \hat{t}). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Zaś warunek na brzegu zewnętrznym, gdzie znajduje się rozłożona równomiernie masa  $M$ , wynika z wprowadzenia wielkości bezwymiarowych do równania (5.29), co w konsekwencji prowadzi do zależności:

$$\hat{\sigma}_r(1, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{h}(1, \hat{t})}. \quad (5.51)$$

Aby rozwiązać układ równań (5.46) opisujący proces pełzania tarczy w celu określenia czasu zniszczenia mieszanego konieczna jest znajomość funkcji opisującej początkowy profil tarczy  $\hat{H}(\hat{R})$ . Funkcja ta występuje zarówno w czwartym równaniu układu (5.46) jak i w drugim równaniu określającym warunki początkowe układu (5.49). Ponieważ początkowy profil tarczy  $\hat{H}(\hat{R})$  jest funkcją poszukiwaną w procesie optymalizacji, zastosowano optymalizację parametryczną. Poszukiwany jest taki początkowy profil tarczy  $\hat{H}(\hat{R})$  w klasie funkcji wielomianowych, dla którego czas pracy tarczy przy zniszczeniu mieszanym będzie najdłuższy.

W celu przeprowadzenia procedury optymalizacyjnej, do modelu matematycznego wprowadzono kryterium zniszczenia (5.30) i optymalizacji (5.31). Zaproponowano algorytm numeryczny (rys.5.3.) dla złożonego stanu naprężeń. W celu ustalenia czasu zniszczenia mieszanego dla zadanej geometrii konieczne jest prześledzenie całego procesu pełzania tarczy z uwzględnieniem zmian geometrycznych zachodzących w trakcie tego procesu, aż do momenty spełnienia kryterium zniszczenia.

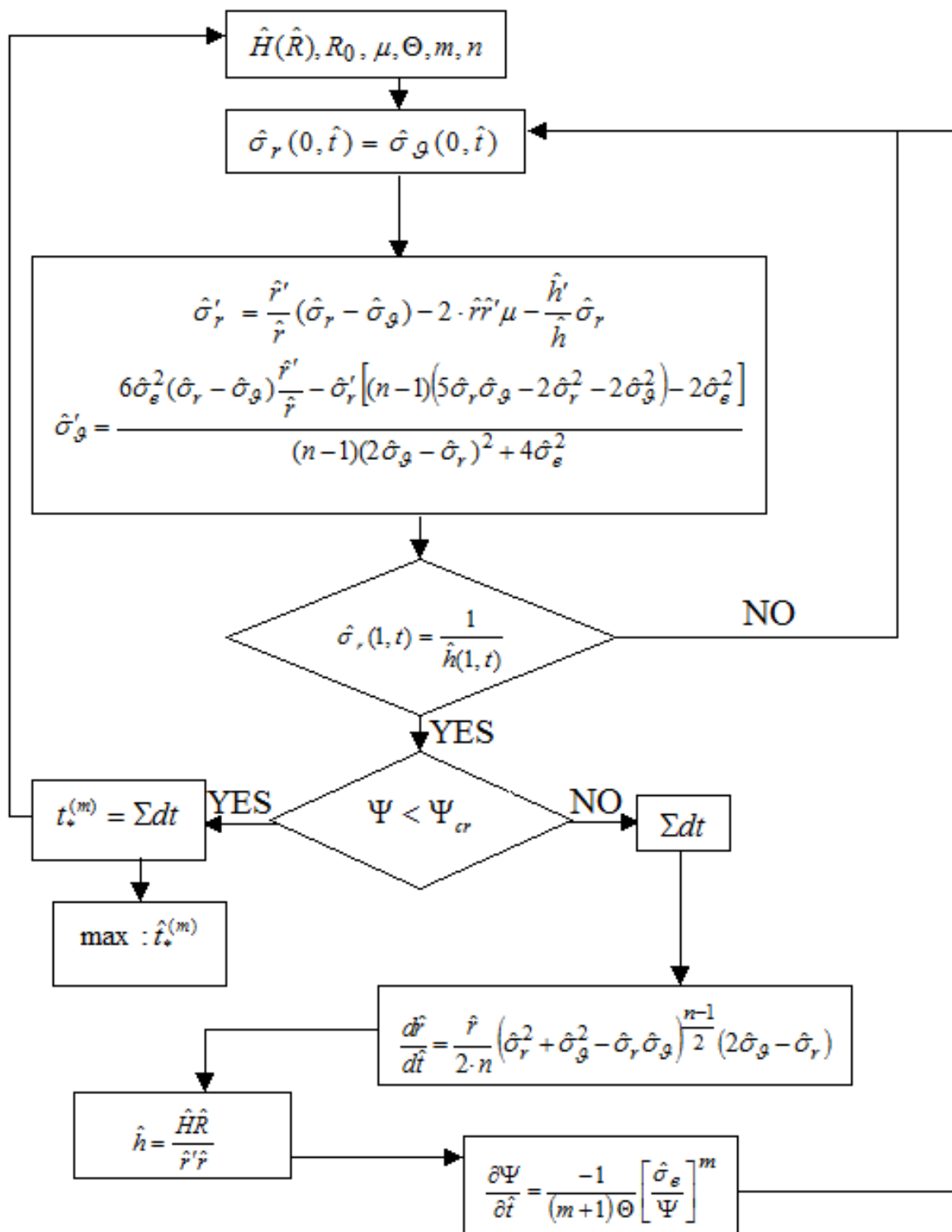
Algorytm numeryczny składa się z dwóch bloków kolejno aktywowanych.

Konieczne jest zdefiniowanie geometrii początkowej, stałych materiałowych oraz warunków brzegowych dla naprężeń (5.50). W pierwszym bloku algorytmu, dla zadanej geometrii zostaje

określony rozkład naprężeń rzeczywistych w tarczy poprzez jednoczesne całkowanie metodą Rungego-Kutty IV dwóch pierwszych równań układu (5.46) względem współrzędnej przestrzennej  $\hat{R}$ . Ponieważ wartości naprężeń w środku tarczy nie są znane, pierwotnie przyjmowane są dowolne ich wartości, po czym są one korygowane poprzez wywołanie procedury numerycznej, który zapewnia taki dobór wartości naprężeń w środku tarczy, aby spełniały one warunek brzegowy na jej zewnętrznej krawędzi (5.51).

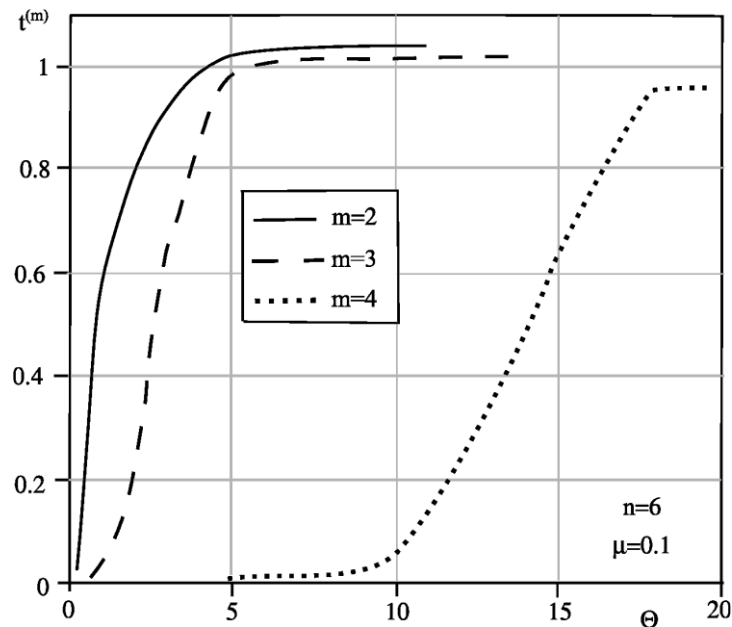
Dla wyznaczonego rozkładu naprężeń rzeczywistych możliwe jest określenie zmiany geometrii tarczy (drugi blok algorytmu) poprzez całkowanie względem czasu trzeciego z równań układu (5.46) metodą Eulera. Rozwiązania zależne od czasu mają wysoką wrażliwość na wielkość przyjętego w obliczeniach numerycznych kroku czasowego. Z tego względu, w zależności od aktualnej prędkości pełzania, całkowanie równań względem czasu odbywa się ze zmiennym krokiem czasowym. Dla zadanego przyrostu promienia w ostatnim punkcie węzłowym obliczano krok czasowy, który przyjmowano do całkowania. W ten sposób oblicza się nowe współrzędne przestrzenne dla punktów węzłowych. Ostatecznie, warunek nieściśliwości materiału (czwarte równanie układu (5.46)) pozwala wyznaczyć aktualną grubość tarczy w tych punktach.

Dla tarczy o zmienionej w wyniku pełzania geometrii, wyznacza się rozkład naprężeń, powtarzając procedurę z pierwszego bloku algorytmu. Każdorazowe przejście do drugiego bloku (wykonanie kolejnego kroku czasowego) w celu obliczenia dalszych zmian geometrii jest poprzedzane sprawdzaniem kryterium zniszczenia. Służy temu obliczenie wartości funkcji  $\Psi$  z ostatniego równania (5.46).



Rys.5.3. Algorytm obliczeń numerycznych.

Dla wybranej przykładowej geometrii:  $\hat{H}(\hat{R}) = 0.8 - \hat{R} + 2.1\hat{R}^2$ , zbadano wpływ parametrów  $m$  i  $\Theta$  przy ustalonych parametrach  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$  na czas zniszczenia mieszanego  $t^{(m)}$ , w celu zdefiniowania w jakim zakresie wartości tych parametrów,  $\Theta$  ma istotny wpływ na rozwiązanie.



Rys. 5.4. Wpływ parametrów  $m$  i  $\Theta$  na czas zniszczenia mieszanego  $t^{(m)}$ .

Parametr  $\Theta$  (5.48) charakteryzuje wrażliwość materiału na typ zniszczenia. Wraz z jego wzrostem zmniejsza się wrażliwość materiału na pęknięcie, natomiast większą rolę przy zniszczeniu odgrywają zmiany geometryczne aż do momentu, w którym materiał ulega zniszczeniu na skutek zachodzących w trakcie procesu pełzania zmian geometrycznych i czas do zniszczenia staje się równy czasowi do zniszczenia ciągłego. Moment ten charakteryzuje graniczna wartość parametru  $\Theta$ , różna dla różnych wartości parametru  $m$  w równaniu Kachanova (rys. 5.4), powyżej której parametr  $\Theta$  nie wpływa na czas zniszczenia, jest stały i równy czasowi zniszczenia ciągłego.

Na podstawie przeprowadzonej analizy (rys. 5.4) do obliczeń numerycznych dla parametru  $m = 2$  wybrano trzy wartości parametru  $\Theta = 0.4$ ,  $\Theta = 0.8$ ,  $\Theta = 3$  w taki sposób, aby wartości tego parametru mieściły się w zakresie, w którym na zniszczenie elementu ma wpływ zarówno zmniejszanie jego przekroju poprzecznego jak i wzrost mikropustek charakteryzowany poprzez wartość funkcji ciągłości.

### 5.2.1. Optymalizacja jednoparametryczna

Poszukiwano optymalnego rozwiązania, prowadzącego do najdłuższego czasu do zniszczenia mieszanego początkowo pośród tarcz stożkowych, dla których równanie określające początkowy kształt ma postać liniową:

$$\hat{H}(\hat{R}; u_0, u_1) = u_0 + u_1 \hat{R} \quad (5.52)$$

Parametry  $u_0$  i  $u_1$ , których wartości optymalnych poszukiwano, powiązane są warunkiem ustalonej objętości tarczy  $V$  :

$$\hat{V} = \int_0^1 2\pi \hat{H}(\hat{R}) \hat{R} d\hat{R} = \pi \quad (5.53)$$

który prowadzi do zależności:

$$u_1 = \frac{3}{2}(1 - u_0) \quad (5.54)$$

Jako parametr swobodny, sterujący przyjęto  $u_0$ , oznaczający grubość tarczy w środku ( $\hat{R} = 0$ ). Można spodziewać się, że tarcza optymalna powinna zmniejszać swoją grubość od środka ku brzegowi zewnętrznemu. Wiadomo zatem, że  $u_0 \geq 1$ . Aby grubość tarczy na pierścieniu zewnętrznym była dodatnia wprowadzono ograniczenie:

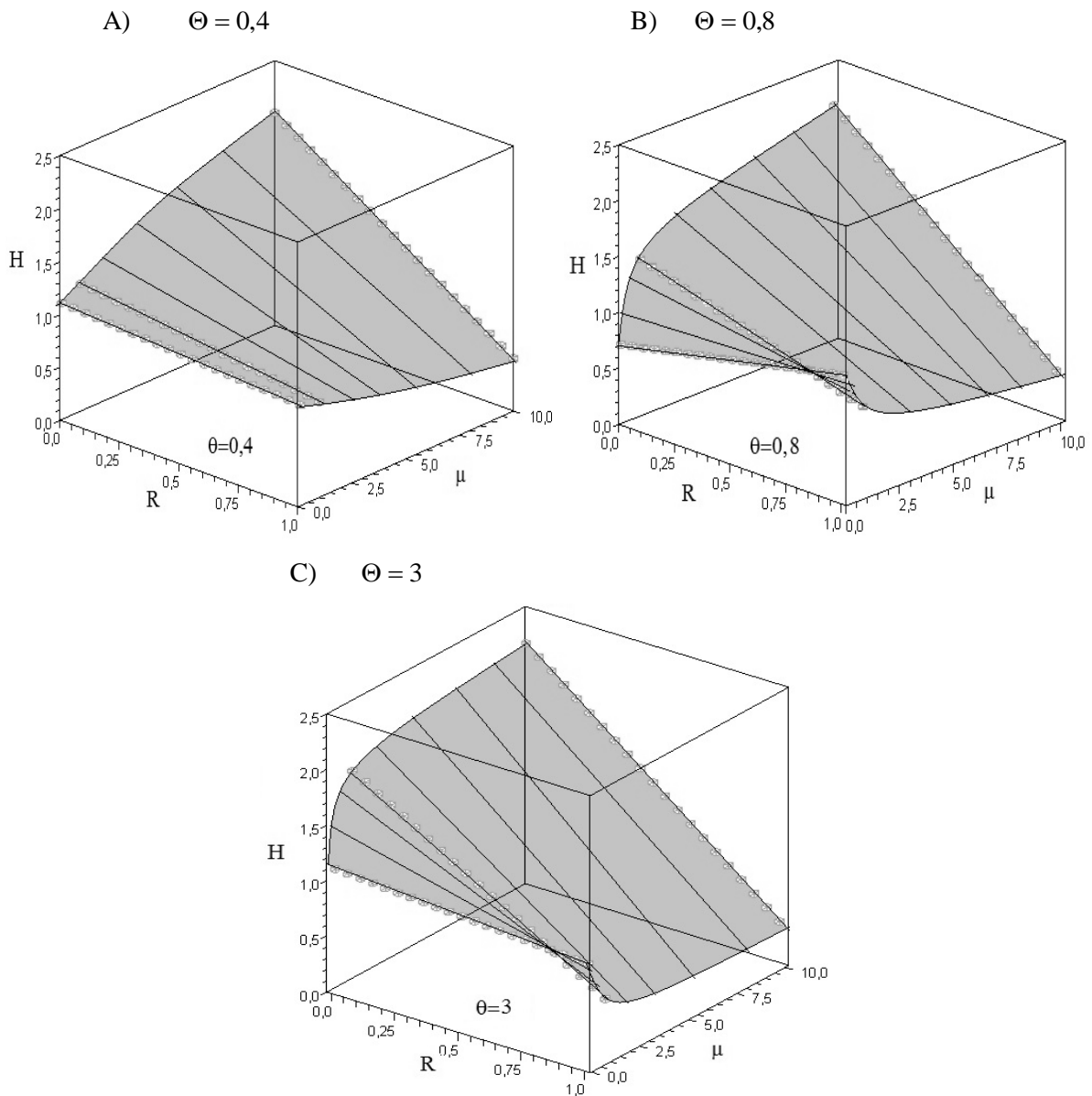
$$\hat{H}(1) > 0 \Rightarrow (1 \leq u_0 \leq 3) \quad (5.55)$$

Badano wpływ parametrów:  $\mu$  - wyrażającego stosunek masy własnej tarczy do masy rozłożonej równomiernie na krawędzi zewnętrznej, oraz  $\Theta$ . W przypadku optymalizacji jednoparametrycznej należy znaleźć maximum uzyskanej krzywej zależności parametru  $u_1$  od  $u_0$ . Optymalny kształt tarczy dla  $n = 3$  i  $m = 2$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$  i  $\mu$  przedstawiono w tabeli nr 5.1.

	$\Theta = 0.4$	$\Theta = 0.8$	$\Theta = 3$
$\mu = 0.1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.12 - 0.15\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 0.69 + 0.45\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.09 - 0.15\hat{R}$
$\mu = 1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.21 - 0.33\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.42 - 0.61\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.91 - 1.35\hat{R}$
$\mu = 10$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.01 - 1.52\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.09 - 1.65\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.1 - 1.65\hat{R}$

Tab. 5.1. Optymalny kształt tarczy dla  $n = 3$  i  $m = 2$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$  i  $\mu$ .

Optymalne profile tarcz stożkowych w funkcji parametru  $\mu$ , dla trzech różnych wartości parametru  $\Theta$  pokazano również na rysunku 5.5.



Rys. 5.5. Optymalne kształty tarcz stożkowych dla trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Uzyskane rozwiązania w dużym stopniu zależą od parametrów zarówno  $\mu$  jak i  $\Theta$ . Kiedy masa własna tarczy pełnej  $M$  jest stosunkowo mała w porównaniu z masą przyłożoną na jej zewnętrznym obwodzie (małe wartości parametru  $\mu$ ) optymalne tarcze są zbliżone do tarcz płaskich. W przypadku większych wartości parametru  $\mu$  (zaniedbany wpływ masy rozłożonej na obwodzie), masa tarczy jest przesunięta w kierunku osi obrotu. Dla zwiększających się wartości parametru  $\Theta$ , grubość tarcz optymalnych w pobliżu zewnętrznej krawędzi rośnie.



## 5.2.2. Optymalizacja dwuparametryczna

Spodziewano się, że lepsze wyniki optymalnego kształtowania tarcz pełnych otrzyma się poszerzając klasę funkcji o funkcje paraboliczne:

$$\hat{H}(\hat{R}; b_0, b_1, b_2) = b_0 + b_1 \hat{R} + b_2 \hat{R}^2 \quad (5.56)$$

Spośród trzech parametrów funkcji, tylko dwa mogą być traktowane jako parametry swobodne, trzeci wynika z warunku ustalonej objętości:

$$b_2 = 2 - 2b_0 - \frac{4}{3}b_1 \quad (5.57)$$

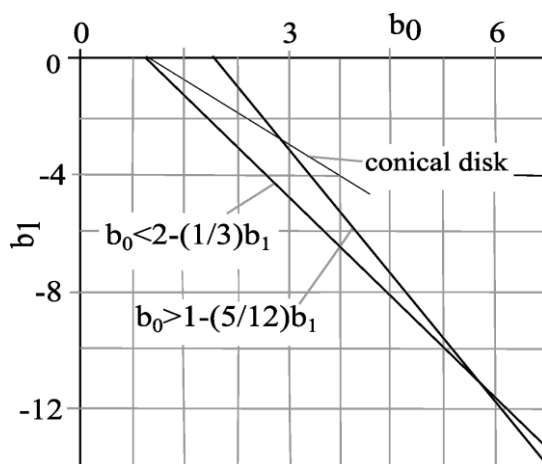
W procesie optymalizacji poszukiwane są wartości parametrów  $b_0$  i  $b_1$  dla których czas pracy tarczy przy zniszczeniu mieszanym będzie najdłuższy. Zakres poszukiwań parametrów swobodnych można ograniczyć poprzez nałożenie na nich pewnych ograniczeń. Można się spodziewać, że grubość tarczy powinna być funkcją monotonicznie malejącą. Prowadzi to do następującej zależności:

$$\frac{d\hat{H}(\hat{R})}{d\hat{R}} \leq 0 \rightarrow b_0 \leq 2 - \frac{1}{3}b_1. \quad (5.58)$$

Warunkiem oczywistym jest fakt, że grubość tarczy na brzegu zewnętrznym nie może być ujemna:

$$\hat{H}(1) > 0 \rightarrow b_0 \geq 1 - \frac{5}{12}b_1 \quad (5.59)$$

Jak pokazano na rys 5.6. zakres poszukiwań parametrów swobodnych przy tak zadanych ograniczeniach zawęża się do trójkąta.



Rys 5.6. Obszar poszukiwań parametrów swobodnych.

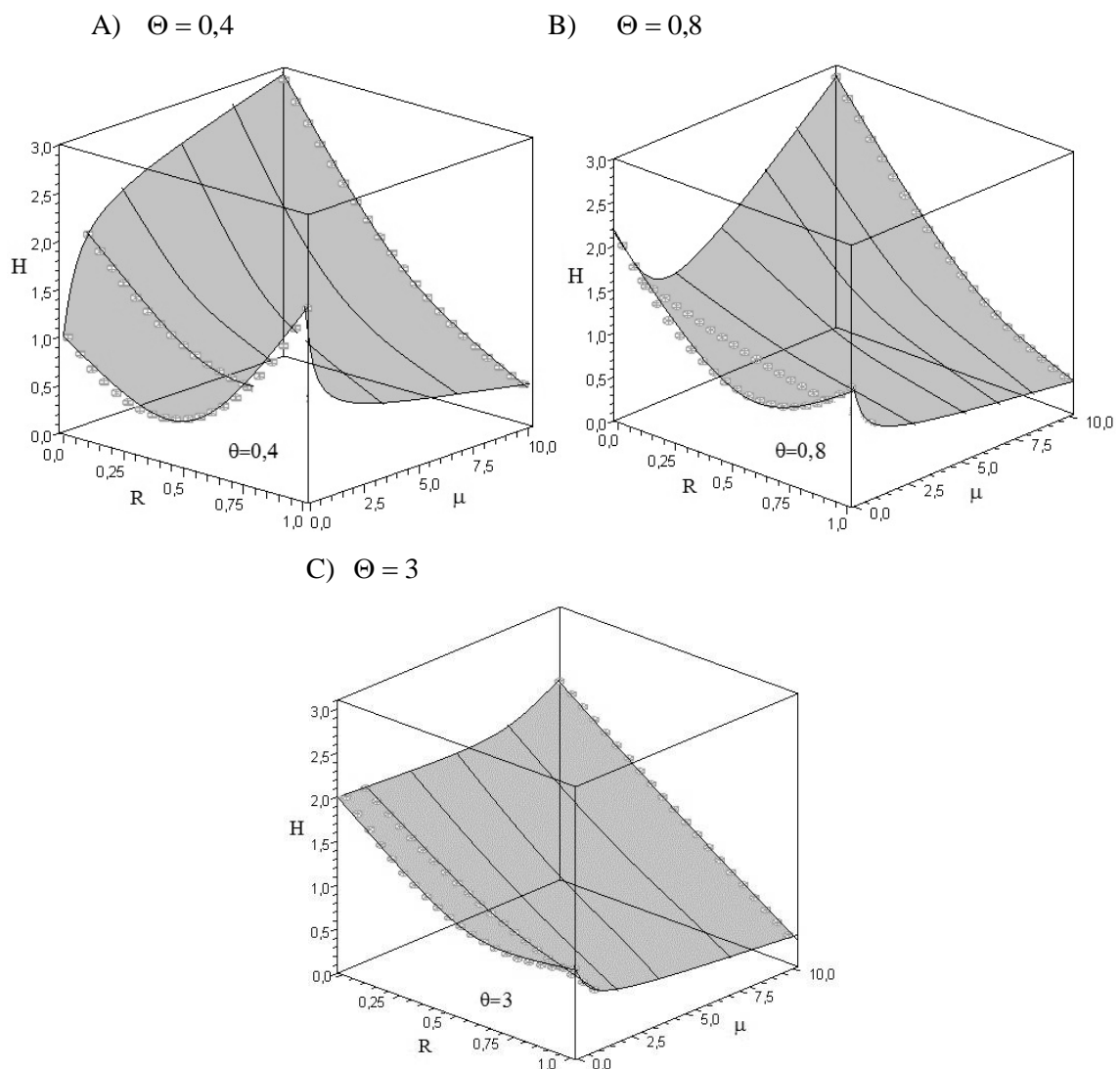
W przypadku optymalizacji dwuparametrycznej należy, w podobny sposób jak to było pokazane dla przypadku prętów, znaleźć maximum maximum uzyskanych krzywych zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 4.8. W ten sposób wyznaczone zostaje

rozwiązanie optymalne. Optymalny kształt tarczy parabolicznych dla  $n = 3$  i  $m = 2$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$  i  $\mu$  przedstawiono w tabeli nr 5.2.

	$\Theta = 0.4$	$\Theta = 0.8$	$\Theta = 3$
$\mu = 0.1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.02 - 3.01\hat{R} + 4.03\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.01 - 4\hat{R} + 2.33\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.01 - 3.02\hat{R} + 2\hat{R}^2$
$\mu = 1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.01 - 3\hat{R} + 2.01\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.53 - \hat{R} + 0.33\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2 - 2.03\hat{R} + 0.67\hat{R}^2$
$\mu = 10$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.92 - 4.01\hat{R} + 1.53\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.91 - 4.02\hat{R} + 1.53\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 2.41 - 2.02\hat{R} + 0.11\hat{R}^2$

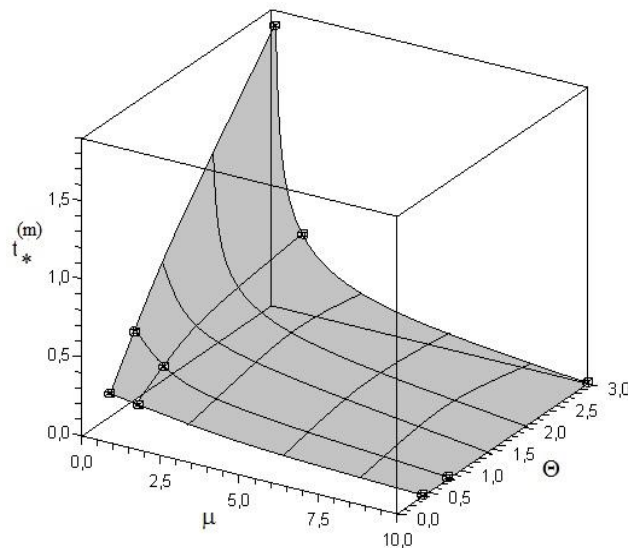
Tab. 5.2. Optymalny kształt tarczy dla  $n = 3$  i  $m = 2$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$  i  $\mu$ .

Optymalne profile dla tarcz parabolicznych przedstawiono również na rysunku 5.7.



Rys. 5.7. Optymalne kształty dla tarcz parabolicznych.

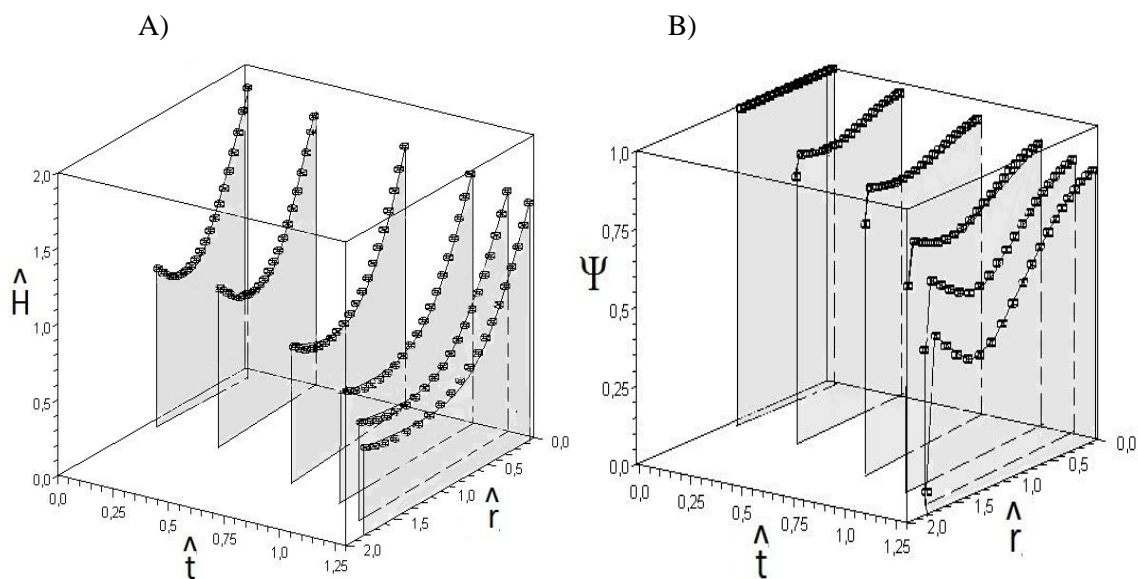
Dla mniejszych wartości parametrów  $\mu$ , kiedy udział masy własnej tarczy w stosunku do masy przyłożonej na brzegu zewnętrznym jest niemalże zaniedbany, zaobserwowano wzrost grubości na zewnętrznej krawędzi. Optymalne profile w klasie funkcji parabolicznych charakteryzuje wówczas występowanie minimum funkcji wewnątrz szerokości dysku. Zwiększona grubość na zewnętrznej krawędzi działa jako swego rodzaju wzmocnienie utrudniające rozszerzanie się tarczy i dzięki temu czas do zniszczenia może być dłuższy. W przypadku wyższych wartości parametrów  $\Theta$  kiedy to odkształcenia geometryczne tarczy zwiększają się, obserwowany efekt wzmocnienia brzegu zewnętrznego jest mniejszy. Czas zniszczenia mieszane dla optymalnych profili parabolicznych w funkcji parametrów  $\mu$  i  $\Theta$  przedstawiono na rys. 5.8.



Rys.5.8. Czas do zniszczenia mieszane optymalnych profili tarcz parabolicznych w funkcji parametrów  $\mu$  i  $\Theta$ .

Najdłuższy czas pracy przy zniszczeniu mieszanym dla tarcz optymalnych obserwuje się w przypadku wyższych wartości parametrów  $\Theta$ , kiedy i niższych wartości parametrów  $\mu$  (masa własna tarczy prawie zaniedbana). Wraz ze wzrostem parametru  $\mu$ , dla wszystkich rodzajów materiałów z uwagi na typ zniszczenia czas pracy tarczy do zniszczenia mieszane maleje.

Dla przykładu, proces pełzania tarczy, dla początkowej optymalnej geometrii opisanej równaniem:  $H(R) = 2 - 3R + 2R^2$  jest pokazany na rys. 5.9.



Rys. 5.9. Proces pełzania tarczy dla  $\mu = 0.1$ ,  $n = 3$ ,  $m = 2$ ,  $\Theta = 3$ .

Na rysunku 5.9. zostały przedstawione „przekroje czasowe” optymalnego profilu tarczy (rys. 5.9. A)) oraz funkcji ciągłości (rys. 5.8. B)) przy zadanych parametrach:  $\mu = 0.1$ ,  $n = 3$ ,  $m = 2$ ,  $\Theta = 3$ . Zaobserwowano, iż pomimo wzmocnienia brzegu zewnętrznego tarczy, kryterium zniszczenia materiału nałożone na funkcje ciągłości  $\Psi$  jest spełnione dokładnie na brzegu zewnętrznym tarczy, natomiast wartości funkcji ciągłości  $\Psi$  wewnątrz tarczy są dość duże i ciągle dalekie od wartości przyjętej za kryterium zniszczenia. Efekt ten jest spowodowany ograniczeniem nałożonym na początkowe profile tarcz, które mają się zawierać w klasie funkcji parabolicznych.

### 5.2.3. Korekta kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej

Należało oczekiwać, iż tarcze równomiernej wytrzymałości początkowej, w której naprężenia promieniowe i obwodowe są sobie równe i niezależne od promienia będą bliskie profilom optymalnym z uwagi na czas zniszczenia mieszanego.

Dla materiału jednorodnego w tarczy równomiernej wytrzymałości początkowej naprężenia promieniowe i obwodowe będą w chwili  $t = 0$  takie same:

$$\Sigma_r = \Sigma_\theta = \Sigma = \text{const}(R), \quad (5.60)$$

natomiast naprężenie skierowane prostopadle do powierzchni środkowej tarczy jest przyjmowane przez cały czas trwania procesu pełzania za równe zero ( $\sigma_z \equiv 0$ ).

Z warunku równowagi wewnętrznej dla nieodkształconej tarczy:

$$\frac{1}{H} \frac{d}{dR} (H \Sigma_r) + \frac{\Sigma_r - \Sigma_g}{R} + B_r(R, R) = 0, \quad (5.61)$$

w którym  $B_r$  oznacza początkową wartość promieniowej siły masowej, po wykorzystaniu (5.60), wyznaczono profil tarczy, zapewniający równomierną wytrzymałość:

$$H(R) = C \exp \left[ -\frac{1}{\Sigma} \int B(R, R) dR \right]. \quad (5.62)$$

Stałą całkowania wyznaczono z warunku brzegowego:

$$H(R_0) = H_0, \quad (5.63)$$

gdzie  $H_0$  oznacza grubość tarczy na promieniu zewnętrznym  $R_0$ , zależną od wielkości siły promieniowej na obwodzie zewnętrznym:

$$H_0 = \frac{N_r(R_0)}{2\pi R_0 \Sigma}. \quad (5.64)$$

Po wykorzystaniu tego warunku brzegowego otrzymano ostatecznie równanie postaci:

$$H(R) = H_0 \exp \left[ -\frac{1}{\Sigma} \int_{R_0}^R B(\rho, \rho) d\rho \right], \quad (5.65)$$

przy czym  $\rho$  jest formalną zmienną całkowania.

Kształt tarczy równomiernej wytrzymałości wyrażony w wielkościach bezwymiarowych opisuje równanie:

$$\hat{H}_{us}(\hat{R}) = \frac{1}{\hat{\Sigma}} \exp \left[ \frac{\mu}{\hat{\Sigma}} (1 - \hat{R}^2) \right], \quad (5.66)$$

gdzie:  $\hat{\Sigma}$  - wartość naprężenia początkowego zależy od objętości materiału, co daje:

$$\hat{\Sigma} = \frac{\mu}{\ln(1 + \mu)}, \quad (5.67)$$

Taka tarcza byłaby optymalna z uwagi na czas zniszczenia kruchego. Przy zniszczeniu mieszanym tak na ogół nie będzie.

Na ten kształt zostanie zatem nałożona poprawka przyjęta tutaj w postaci funkcji trzeciego stopnia z pominięciem wyrazu liniowego:

$$\hat{H}_{cor} = p_0 + p_2 \hat{R}^2 + p_3 \hat{R}^3, \quad (5.68)$$

tak aby pochodna grubości tarczy w środku, podobnie jak dla tarczy równomiernej wytrzymałości, była równa zero.

Poprawka ta nie może zmienić objętości tarczy, co pozwala z warunku ustalonej objętości wyrazić jeden ze współczynników równania (5.68) przez dwa pozostałe:

$$p_3 = -\frac{5}{2}p_0 - \frac{5}{4}p_2, \quad (5.69)$$

które będą traktowane jako parametry swobodne.

Wartości tych parametrów wyznaczają początkowy profil tarczy:

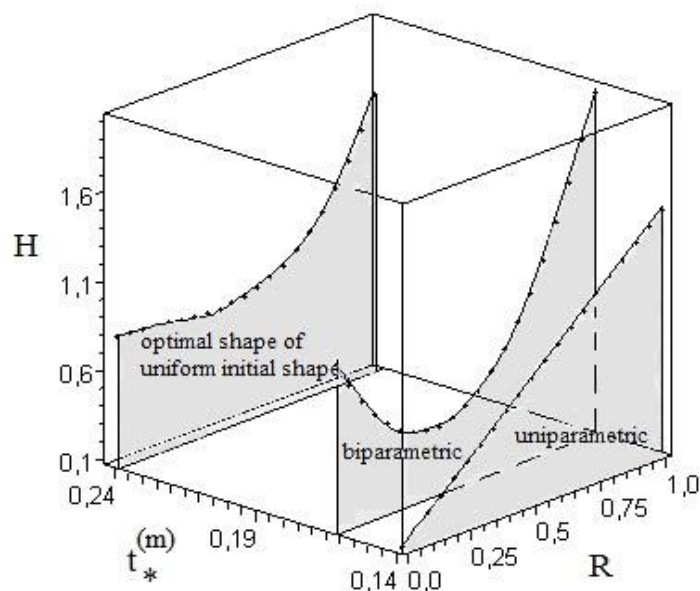
$$\hat{H}(\hat{R}) = \hat{H}_{us}(\hat{R}) + \hat{H}_{cor}(\hat{R}), \quad (5.70)$$

który następnie zostanie wprowadzony do układu równań 5.46.

Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone dla parametrów:  $\mu = 0.1$ ,  $\Theta = 3$ , oraz wykładników: w prawie Nortona  $n = 3$ , w prawie Kachanova  $m = 2$ . Metodą przeszukiwania ustalono optymalne wartości parametrów dla funkcji opisującej poprawkę nałożoną na kształt równomiernej wytrzymałości początkowej tarczy:

$$\hat{H}_{cor} = -0.6 - 0.08\hat{R}^2 + 1.6\hat{R}^3. \quad (5.71)$$

Optymalne profile tarcz uzyskane w wyniku korekty kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej optymalizacji jedno- i dwuparametrycznej, umieszczone na osi czasu w punktach odpowiadających odpowiednio uzyskanej wartości czasu pracy do zniszczenia mieszanego przedstawiono na rys. 5.10.



Rys. 5.10. Optymalne profile tarcz uzyskane w wyniku korekty kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej, optymalizacji jedno- i dwuparametrycznej w funkcji czasu.

Zgodnie z oczekiwaniami, skorygowany profil równomiernej wytrzymałości zapewnia najdłuższy czas do zniszczenia mieszanego. Wprowadzenie optymalizacji dwuparametrycznej

w stosunku do jednoparametrycznej zwiększa czas pracy tarczy o ok. 14%, natomiast dla skorygowanego profilu równomiernej wytrzymałości różnica ta wynosi ok. 70 %.

Analizując otrzymane wyniki obserwuje się analogię otrzymanych rozwiązań z wynikami pracy Szuwalskiego [86, 83], dotyczącej poszukiwania optymalnych kształtów tarcz pełnych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego. Otrzymane rozwiązania również w pracach Szuwalskiego wskazują, że przy znacznym udziale masy własnej tarczy (duże wartości parametru  $\mu$ ) tarcza płaska jest bardzo niekorzystnym rozwiązaniem konstrukcyjnym. Zmiana klasy funkcji przy optymalizacji parametrycznej w podobny sposób prowadziła do poprawy uzyskanych wyników. Dla tarcz pełnych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego zaobserwowano, że wzmocnienie brzegu zewnętrznego poprzez zwiększenie grubości wydłuża czas do zniszczenia, analogiczne wyniki uzyskano przy zniszczeniu mieszanym.

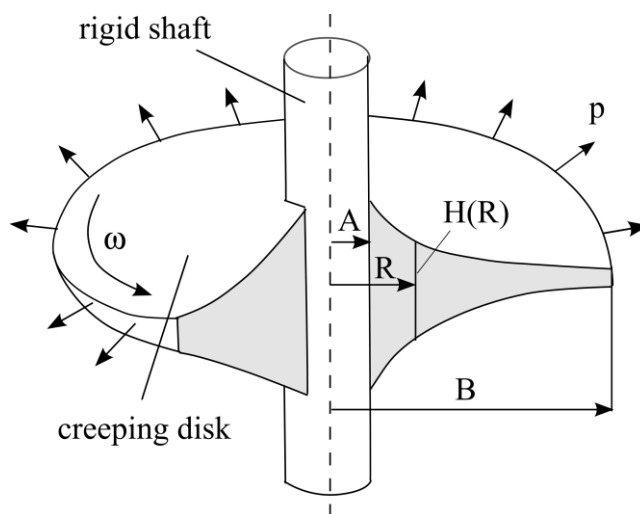
---

## 6. Optymalne kształtowanie tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia mieszanego

---

### 6.1. Model matematyczny pełzania tarczy pierścieniowej z uwzględnieniem zniszczenia mieszanego

Kolejnym rozważanym problemem jest dobór optymalnego profilu dla wirujących tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia mieszanego. Wybrane zagadnienia optymalnego kształtowania wirujących tarcz pierścieniowych zostały omówione w pracach Farshi i Bidabadi [23, 22], Ahmet i Eraslan [1, 3], Gunneskova [34] oraz Reddy i Srinath [75].



Rys. 6. 1. Model wirującej tarczy pierścieniowej.



Analityczne rozwiązanie dla sprężysto-plastycznych tarcz wirujących pierścieniowych otrzymali Çğallioğlu, Topcu i Tarakçilar [12] i Gun [33]. Proces pełzania wirującej ze stałą prędkością tarczy pierścieniowej, której model został przedstawiony na rys. 6.1, z uwzględnieniem zniszczenia mieszanego [97] opisuje ten sam zestaw równań różniczkowych cząstkowych co dla tarcz pełnych, podany w formie (5.46):

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}'_r &= \frac{\hat{r}'}{\hat{r}}(\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_g) - 2 \cdot \hat{r}'\mu - \frac{\hat{h}'}{\hat{h}}\hat{\sigma}_r \\ \hat{\sigma}'_g &= \frac{6\hat{\sigma}_e^2(\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_g)\frac{\hat{r}'}{\hat{r}} - \hat{\sigma}'_r \left[ (n-1)(5\hat{\sigma}_r\hat{\sigma}_g - 2\hat{\sigma}_r^2 - 2\hat{\sigma}_g^2) - 2\hat{\sigma}_e^2 \right]}{(n-1)(2\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_r)^2 + 4\hat{\sigma}_e^2} \\ \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} &= \frac{\hat{r}}{2 \cdot n} \left( \hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}_g^2 - \hat{\sigma}_r\hat{\sigma}_g \right)^{\frac{n-1}{2}} (2\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_r)\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \frac{\hat{H}\hat{R}}{\hat{r}'\hat{r}} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{t}} &= \frac{-1}{(m+1)\Theta} \left[ \frac{\hat{\sigma}_e}{\Psi} \right]^m.\end{aligned}$$

W równaniach dla tarcz pierścieniowych wykorzystano dodatkowo parametr:

$$\beta = \frac{A}{B},\tag{6.2}$$

gdzie:  $\beta$  jest stosunkiem początkowego promienia wewnętrznego do zewnętrznego.

Pojawiająca się w bezwymiarowych równaniach wielkość:

$$\mu = \frac{\gamma \cdot V}{M},\tag{6.3}$$

jest stosunkiem masy krążka do masy rozłożonej na zewnętrznym promieniu.

Kryterium zniszczenia oraz kryterium optymalizacji dla tarczy pierścieniowej przyjęto w tej samej formie co dla tarcz pełnych:

$$\exists R : (R \in \langle 0, l \rangle \wedge \Psi \in \langle 1, 0 \rangle \wedge \Psi(\sigma) \Big|_{t_*^{(m)}} \rightarrow 0),\tag{6.4}$$

$$(\exists! H(R) \in f) \quad t_*^{(m)} \xrightarrow{V=const.} \max ,\tag{6.5}$$

gdzie funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \rightarrow b_0 + b_1R + b_2R^2 + \dots + b_nR^n$ , dla wszystkich argumentów  $R \in \langle A, B \rangle$ , gdzie  $n \in \mathbb{N} \subset \{0\}$  ( $n$  jest nieujemną liczbą całkowitą),  $b_i \in \mathbb{R}$  są stałymi współczynnikami, gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , i  $b_n \neq 0$ .

Zniszczenie mieszane będzie nadal definiowane, zgodnie z teorią zniszczenia mieszanego Kachanova, jako zmniejszenie się wartości funkcji ciągłości  $\Psi$  w co najmniej jednym miejscu tarczy do zera.

W ostatnim z układu równań (6.1) występuje funkcja  $\hat{H}(\hat{R})$ , określająca pierwotny profil tarczy. Znajomość tej funkcji jest konieczna do rozwiązania układu (6.1). Ponieważ problem optymalizacji sprowadza się właśnie do znalezienia tej funkcji, zdecydowano się na optymalizację parametryczną. Początkowy kształt tarczy jest zdefiniowany w klasie funkcji wielomianowych. Najlepszych rozwiązań poszukiwano wśród tarcz stożkowych (funkcja liniowa) oraz parabolicznych (funkcja drugiego stopnia).

## 6.2. Wpływ warunków brzegowych

Proces pełzania wirującej tarczy pierścieniowej rozważano dla trzech różnych warunków brzegowych na brzegu wewnętrznym tarczy. We wszystkich trzech przypadkach warunki początkowe wyglądają jednakowo:

$$\hat{r}(\hat{R}, 0) = \hat{R}; \quad \hat{h}(\hat{R}, 0) = \hat{H}(\hat{R}). \quad (6.6)$$

### 6.2.1. Tarcza utwierdzona na sztywnym wale

Jako pierwsza analizowana będzie tarcza utwierdzona na sztywnym wale w sposób uniemożliwiający w tym miejscu nie tylko przemieszczenia promieniowe, ale również zmianę grubości (np. połączenie spawane). Warunki brzegowe na promieniu wewnętrznym można wtedy zapisać:

$$\hat{h}(\beta, \hat{t}) = \hat{H}(\beta, 0); \quad \hat{r}(\beta, \hat{t}) = \beta \quad (6.7)$$

Ponieważ w trakcie obliczeń musi być określony rozkład naprężeń w tarczy, warunek brzegowy na wewnętrznej krawędzi zapisano w postaci:

$$\hat{r}'(\beta, \hat{t}) = 0, \quad (6.8)$$

Wykorzystując trzecie równanie układu (6.1) otrzymano zależność pomiędzy naprężeniami na promieniu wewnętrznym A:

$$\hat{\sigma}_r(\beta, \hat{t}) = 2\hat{\sigma}_g(\beta, \hat{t}). \quad (6.9)$$

Wykorzystując warunek przyjęty na brzegu zewnętrznym tarczy, wynikający z założenia, że obciążenie na brzegu zewnętrznym wirującej tarczy jest wynikiem zamocowania

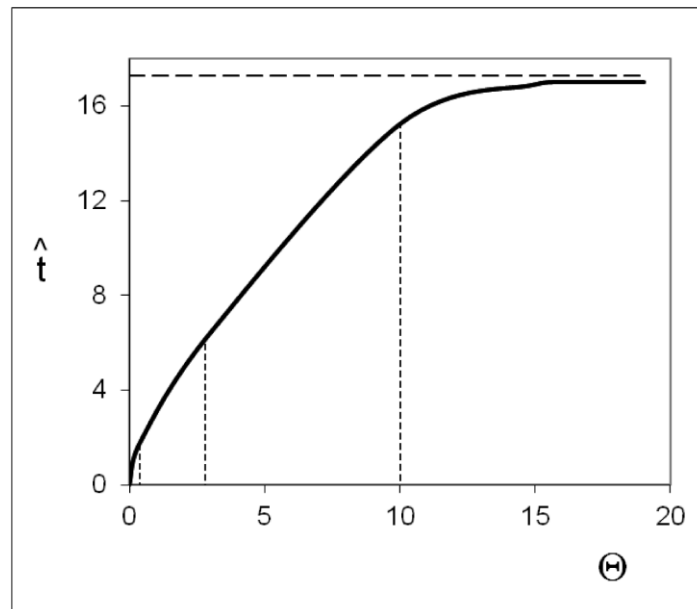
na tym brzegu równomiernie rozłożonej stałej masy  $M$  :

$$\sigma_r(b) = p = \frac{M\omega^2}{2\pi h(B)}, \quad (6.10)$$

poprzez wprowadzenie wielkości bezwymiarowych do powyższego równania, otrzymano warunek na zewnętrznym promieniu tarczy w następującej postaci:

$$\hat{\sigma}_r(1, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{h}(1, \hat{t})}. \quad (6.11)$$

W celu określenia, w jakim zakresie wartości parametru  $\Theta$ , który jest tutaj definiowany w identyczny sposób jak dla tarcz pełnych (5.48), ma on istotny wpływ na rozwiązanie. Badano wpływ tego parametru na czas zniszczenia mieszane przykładowej tarczy pierścieniowej opisanej równaniem:  $\hat{H}(\hat{R}) = 0.8 - \hat{R} + 2.1\hat{R}^2$ . Wyniki przedstawiono na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Wpływ parametru  $\Theta$  na czas zniszczenia tarczy utwierdzonej na sztywnym wale.

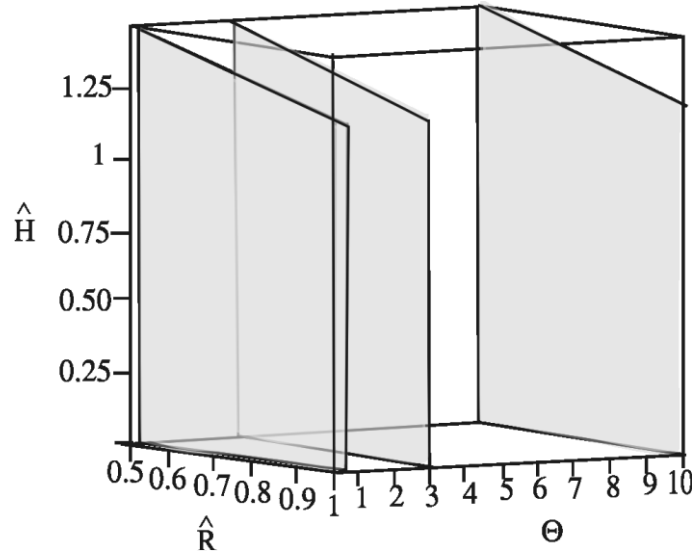
Wraz ze wzrostem parametru  $\Theta$ , czas do zniszczenia tarczy utwierdzonej na sztywnym wale rośnie, aż do momentu, w którym wartość parametru  $\Theta$  osiąga wartość bliską 11. Wówczas wpływ zniszczenia kruche w stosunku do zniszczenia ciągłego staje się na tyle mały, że zniszczenie materiału następuje na skutek zmian geometrycznych elementu i czas do zniszczenia mieszane dla  $\Theta \geq 11$ , staje się równy czasowi do zniszczenia ciągłego. Do obliczeń numerycznych przyjęto trzy wartości parametru:  $\Theta = 0.4$ ,  $\Theta = 3$  i  $\Theta = 10$ .

Optymalne profile tarcz pierścieniowych dla optymalizacji jednoparametrycznej przedstawiono na rys. 6.3 dla  $\mu = 0.1$ ,  $\beta = 0.5$  i trzech wybranych wartości parametru  $\Theta$ .

Przeprowadzona analiza numeryczna problemu wykazała brak wpływu parametru  $\Theta$  na optymalny profil tarczy. Dla trzech rozpatrywanych wartości parametru  $\Theta$  optymalne kształty tarcz opisane są tym samym równaniem:

$$\hat{H}(\hat{R}) = 1.7 - 0.47\hat{R} \quad (6.12)$$

Rozwiązanie takie podyktowane jest przyjętą wartością parametru  $\beta = 0.5$  (stosunkowo wąska tarcza), promień zewnętrznym jest dwa razy większy od wewnętrznego.



Rys. 6.3. Optymalne kształty tarcz stożkowych utwierdzonych na sztywnym wale,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

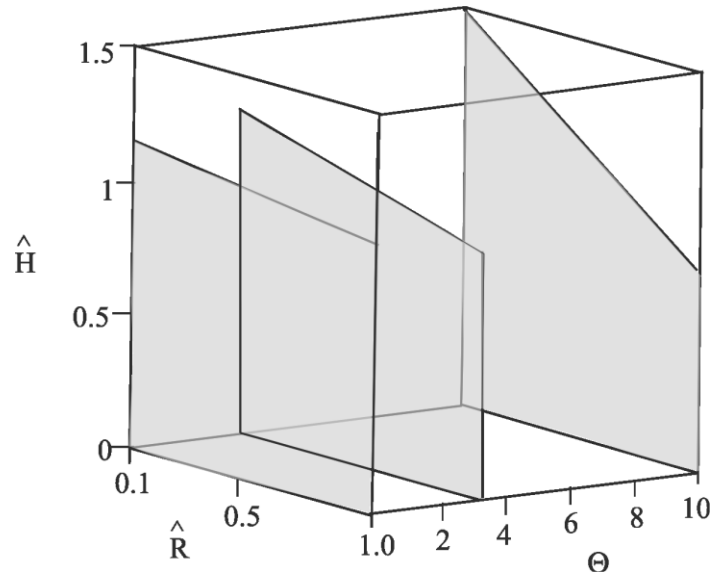
Dla parametru  $\mu = 0.1$  (masa własna tarczy jest stosunkowo mała w porównaniu z masą przyłożoną na jej zewnętrznym brzegu), kształty optymalne tarcz stożkowych charakteryzuje przesunięcie części masy tarczy ku jej brzegowi wewnętrznemu.

W celu zbadania wpływu parametru  $\Theta$  na optymalny profil tarczy, przeprowadzono dodatkową analizę, dla tarcz znacznie szerszych, przyjmując parametr  $\beta = 0.1$  (promień zewnętrzny 10 razy większy od wewnętrznego). Równania opisujące optymalne kształty tarcz dla trzech wartości parametru  $\Theta = 0.4$ ,  $\Theta = 0.8$ ,  $\Theta = 3$ , przedstawiono w tabeli nr 6.1.

	$\Theta = 0.4$	$\Theta = 0.8$	$\Theta = 10$
$\mu = 0.1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.21 - 0.28\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.29 - 0.43\hat{R}$	$\hat{H}(\hat{R}) = 1.5 - 0.73\hat{R}$

Tab. 6.1. Optymalny kształt tarczy dla  $n = 6$  i  $m = 2$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Optymalne profile tarcz stożkowych dla  $\beta = 0.1$  i  $\mu = 0.1$  przedstawiono dodatkowo na rysunku 6.4.



Rys. 6.4. Optymalne kształty tarcz stożkowych utwierdzonych na sztywnym wale,  $\beta = 0.1$ ,  $\mu = 0.1$ .

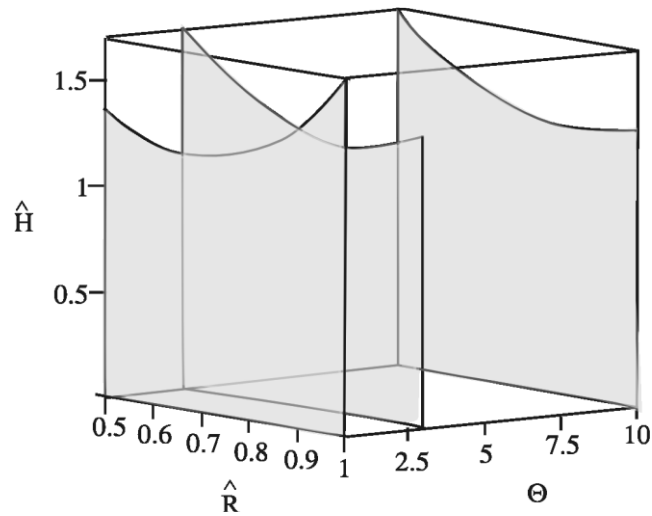
Dla  $\Theta = 0.4$  optymalnym profilem w klasie tarcz stożkowych staje się tarcza niemal płaska. Dla wyższych wartości parametru  $\Theta$ , zmieniający się wraz z nim kąt nachylenia optymalnego profilu tarczy, doprowadza do przesunięcia masy tarczy w kierunku brzegu wewnętrznego.

Oczekiwano, że powyższe wyniki można poprawić poszerzając klasę funkcji  $\hat{H}(\hat{R})$ , w której poszukuje się rozwiązań optymalnych. W następnym kroku zastosowano optymalizację dwuparametryczną. Wykorzystano opisaną wcześniej procedurę poszukiwania maximum maximum (rys.4.8). Równania opisujące optymalne profile tarcz dla trzech wartości parametru  $\Theta$  przedstawiono w tabeli nr 6.2.

	$\Theta = 0.4$	$\Theta = 3$	$\Theta = 10$
$\mu = 0.1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 3.59 - 7.01\hat{R} + 5.09\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 3.51 - 5\hat{R} + 2.76\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 3.09 - 4.01\hat{R} + 2.15\hat{R}^2$

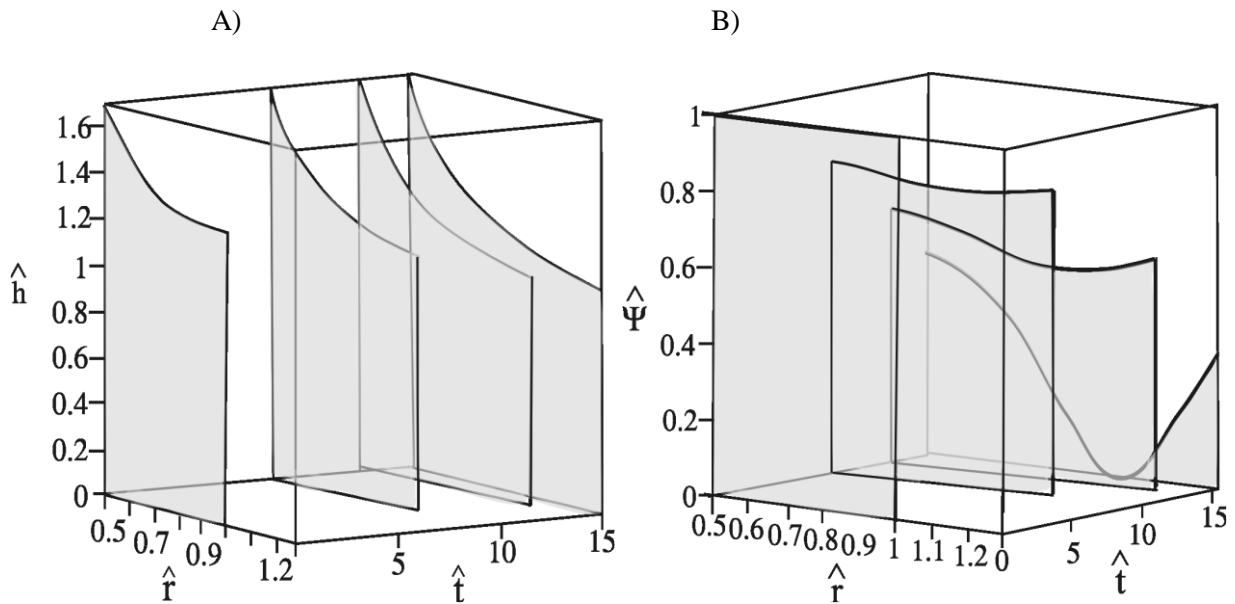
Tab. 6.2. Optymalny kształt tarczy dla  $n = 6$ ,  $m = 2$ ,  $\beta = 0.5$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Optymalne kształty dla tarcz parabolicznych przedstawiono na rys. 6.5.



Rys. 6.5. Optymalne kształty tarcz parabolicznych utwierdzonych na sztywnym,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

Dla  $\Theta = 0.4$  optymalny kształt tarczy charakteryzuje duże wzmocnienie brzegu zewnętrznemu, którego brak przy wyższych wartościach parametru:  $\Theta = 3$  i  $\Theta = 10$ .



Rys. 6.6. „Przekroje czasowe” optymalnego profilu tarczy oraz funkcji ciągłości,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $\Theta = 3$ .

Rys. 6.6. przedstawia dla parametru  $\Theta = 3$  „przekroje czasowe” optymalnego profilu tarczy pierścieniowej (rys. 6.6. A)) oraz funkcji ciągłości (rys. 6.6. B)). Kryterium zniszczenia materiału przyjęte w formie zmniejszania się do zera wartości funkcje ciągłości  $\Psi$  w co najmniej w jednym punkcie węzłowym, jest spełnione wewnątrz tarczy, natomiast wartości funkcji ciągłości  $\Psi$  na brzegach tarczy są dość duże i ciągle dalekie od wartości przyjętej za

kryterium zniszczenia. Efekt ten jest spowodowany ograniczeniem nałożonym na początkowe profile tarcz, które mają się zawierać w klasie funkcji parabolicznych.

Przez analogię do problemu tarcz pełnych oczekiwano, iż profile tarcz zadane w klasie funkcji wielomianowych nie będą tarczami optymalnymi z uwagi na czas zniszczenia mieszanego.

Podjęto próbę uzyskania lepszego rozwiązania przez modyfikację profilu tarczy, który w rozdziale 5.5 został wyprowadzony jako kształt równomiernej wytrzymałości początkowej dla tarczy pełnej.

Kształt tarczy równomiernej wytrzymałości dla tarczy pełnej został już wcześniej określony równaniem:

$$\hat{H}_{us}(\hat{R}) = \frac{1}{\hat{\Sigma}} \exp\left[\frac{\mu}{\hat{\Sigma}}(1 - \hat{R}^2)\right], \quad (6.13)$$

gdzie:  $\hat{\Sigma}$  - wartość naprężenia początkowego zależy od objętości materiału, co daje:

$$\hat{\Sigma} = \frac{\mu}{\ln(1 + \mu)}, \quad (6.14)$$

Na ten kształt, przeniesiony na przypadek tarcz pierścieniowych, zostanie nałożona poprawka przyjęta tutaj w postaci funkcji trzeciego stopnia z pominięciem wyrazu liniowego:

$$\hat{H}_{cor} = p_0 + p_2 \hat{R}^2 + p_3 \hat{R}^3. \quad (6.15)$$

Początkowy profil tarczy opisany jest więc równaniem:

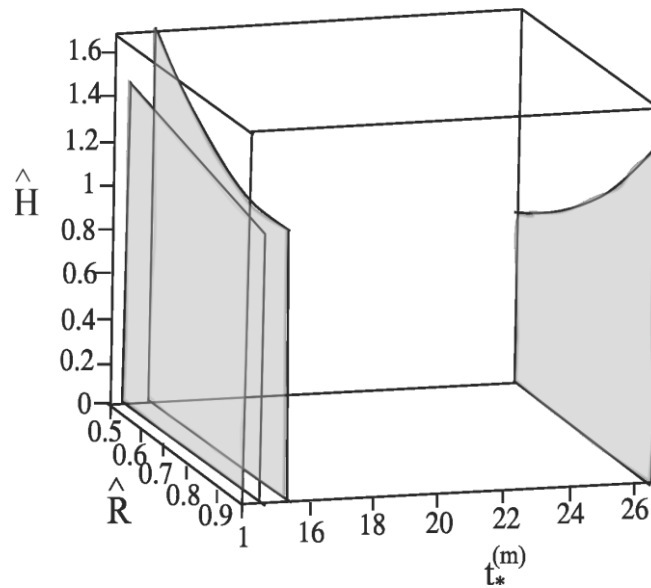
$$\hat{H}(\hat{R}) = \hat{H}_{us}(\hat{R}) + \hat{H}_{cor}(\hat{R}). \quad (6.16)$$

Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone analogicznie jak w przypadku tarcz pełnych, dla ustalonych parametrów:  $\mu = 0.1$ ,  $\Theta = 3$ , oraz wykładników: w prawie Nortona  $n = 6$ , w prawie Kachanova  $m = 2$ .

Optymalne wartości parametrów opisujących równanie, przyjęte w formie korekty nałożonej na tarczę kształt tarczy równomiernej wytrzymałości, przyjmują wartości:

$$\hat{H}_{cor} = -0.3 - 0.04 \hat{R}^2 + 9.47 \hat{R}^3. \quad (6.17)$$

Optymalny profil skorygowanego kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej w porównaniu z profilami optymalnymi uzyskanymi z optymalizacji parametrycznej przedstawiono na rys. 6.7.



Rys. 6.7. Optymalny profil kształtu równomiernej wytrzymałości początkowej w porównaniu z profilami optymalnymi uzyskanymi z optymalizacji jedno- i dwuparametrycznej w funkcji czasu.

Skorygowany profil równomiernej wytrzymałości zapewnia najdłuższy czas do zniszczenia mieszanej tarczy. Charakteryzuje się on znacznym wzmocnieniem środkowej i zewnętrznej części tarczy, co wydaje się być bardzo uzasadnione mając na uwadze profile czasowe funkcji ciągłości przedstawione na rys. 6.6.

### 6.2.2. Tarcza osadzona na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym

Rozpatrzona będzie tarcza osadzona na sztywnym wale w sposób uniemożliwiający przemieszczanie promieniowe, natomiast dopuszczający możliwość zmiany grubości w tym miejscu (np. połączenie wielowpustowe).

Warunek brzegowy na wewnętrznym promieniu może być zapisany w postaci:

$$\hat{r}(\beta, \hat{t}) = \beta, \quad (6.18)$$

co prowadzi do zależności pomiędzy naprężeniami na wewnętrznym brzegu tarczy:

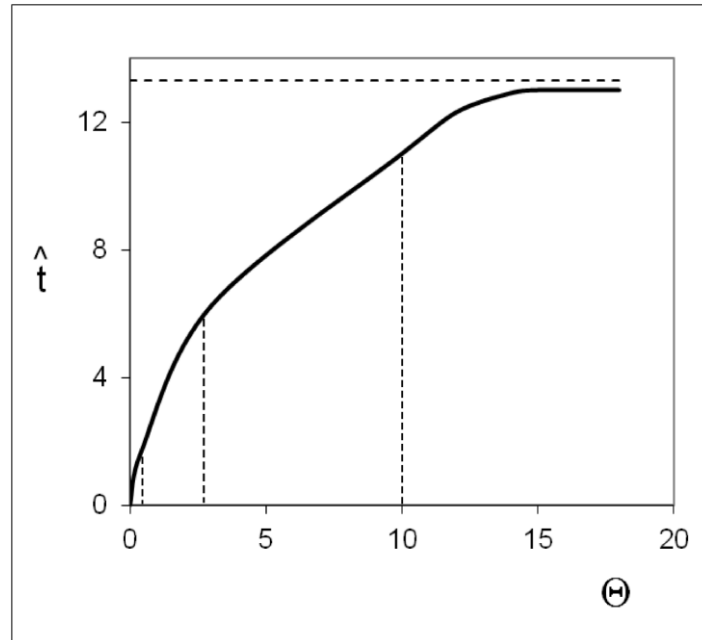
$$\hat{\sigma}_r(\beta, \hat{t}) = 2\hat{\sigma}_g(\beta, \hat{t}). \quad (6.19)$$

Natomiast warunek na zewnętrznym promieniu tarczy, wynikający z zamocowania na tym brzegu stałej masy  $M$  przyjmuje, jak w poprzednim przypadku postać:

$$\hat{\sigma}_r(1, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{h}(1, \hat{t})}. \quad (6.20)$$



Zbadano wpływ parametru  $\Theta$  na czas życia przykładowej tarczy pierścieniowej, opisanej równaniem:  $\hat{H}(\hat{R}) = 0.8 - \hat{R} + 2.1\hat{R}^2$ , osadzonej na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym. Wyniki przedstawiono na rys. 6.8.

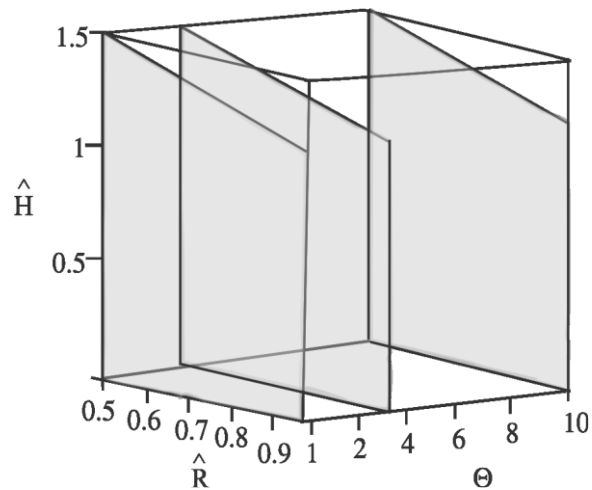


Rys. 6.8. Wpływ parametru  $\Theta$  na czas zniszczenia tarczy osadzonej na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym.

Na podstawie uzyskanych wyników do obliczeń numerycznych przyjęto trzy wartości parametru:  $\Theta = 0.4$ ,  $\Theta = 3$  i  $\Theta = 10$ . Dla zdefiniowanych warunków początkowych optymalne profile dla tarcz stożkowych przedstawiono na rys. 6.9, dla trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Stwierdzono, podobnie jak w przypadku tarcz utwierdzonych na sztywnym wale brak wpływu parametru  $\Theta$  na optymalny profil tarcz stożkowych. Dla trzech rozpatrywanych wartości parametru  $\Theta$  optymalne kształty tarcz opisane są tym samym równaniem:

$$\hat{H}(\hat{R}) = 1.87 - 0.74\hat{R}. \quad (6.21)$$



Rys. 6.9. Optymalne kształty tarcz stożkowych osadzonych na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

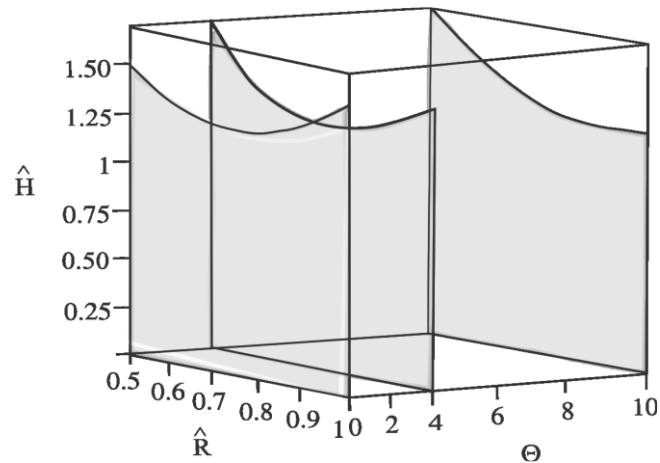
W przypadku tarcz wąskich optymalne kształty tarcz stożkowych charakteryzują się natomiast większym, niż w przypadku tarcz utwierdzonych na sztywnym wale, przesunięciem masy tarczy w kierunku brzegu wewnętrznego, przy zadanych stałych parametrach  $\beta = 0.5$  i  $\mu = 0.1$ .

W celu uzyskania lepszych wyników zastosowano dalej optymalizację dwuparametryczną. Optymalnych rozwiązań poszukiwano stosując procedurę poszukiwania maximum maximorum (rys. 4.8). W tabeli nr 6.3. przedstawiono równania opisujące optymalne profile tarcz parabolicznych.

	$\Theta = 0.4$	$\Theta = 3$	$\Theta = 10$
$\mu = 0.1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 3.51 - 6.02\hat{R} + 4.01\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 4.39 - 8\hat{R} + 5.05\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 3.51 - 5.02\hat{R} + 2.76\hat{R}^2$

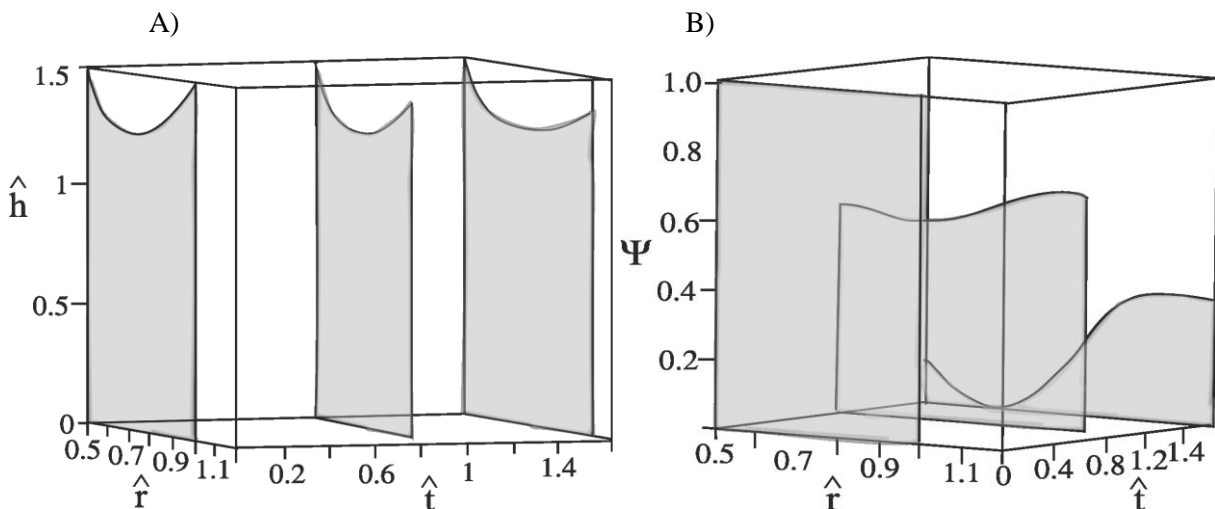
Tab. 6.3. Optymalny kształt tarczy dla  $n = 6$ ,  $m = 2$ ,  $\beta = 0.5$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Optymalne profile dla tarcz parabolicznych przedstawiono na rys. 6.10.



Rys. 6.10. Optymalne kształty tarcz parabolicznych osadzonych na sztywnym z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

Dla  $\Theta = 0.4$  oraz  $\Theta = 3$  optymalne kształty tarczy charakteryzuje wzmocnienie brzegu zewnętrznego, którego brak dla  $\Theta = 10$ .



Rys. 6.11. „Przekroje czasowe” optymalnego profilu tarczy oraz funkcji ciągłości,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\Theta = 3$ .

Powyższy rysunek przedstawia dla parametru  $\Theta = 3$  „przekroje czasowe” optymalnego profilu tarczy pierścieniowej (rys. 6.11. A)) oraz funkcji ciągłości (rys. 6.11. B)). Zmiany geometryczne profilu w trakcie procesu pełzania, przy zadanych parametrach nie są znaczące. Z uwagi na niewielką szerokość tarczy zmiana grubości w miejscu utwierdzenia, chociaż dopuszczona nie jest zbyt wielka. Bezwzględnie następuje rozwój uszkodzeń, prowadzący do zniszczenia materiału.

### 6.2.3. Tarcza ze swobodnym brzegiem wewnętrznym

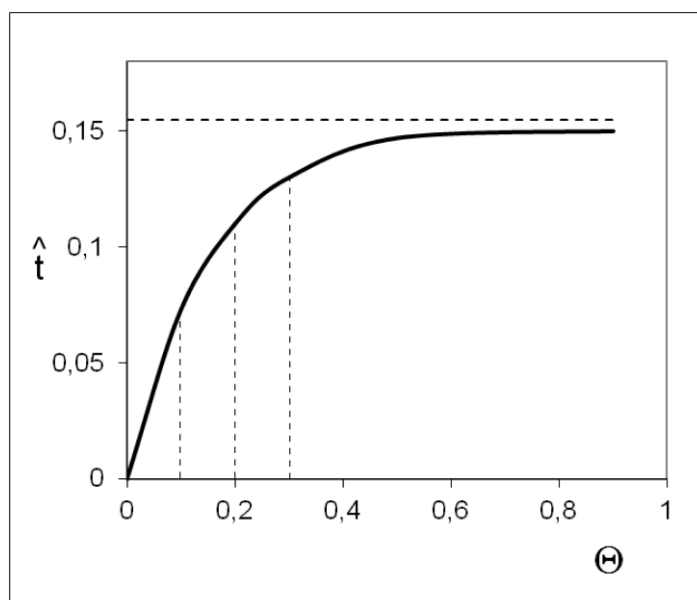
Warunek brzegowy na wewnętrznym promieniu tym razem będzie zapisany w postaci:

$$\hat{\sigma}_r(\beta, \hat{t}) = 0, \quad (6.22)$$

zaś na zewnętrznym promieniu przyjmuje znaną postać:

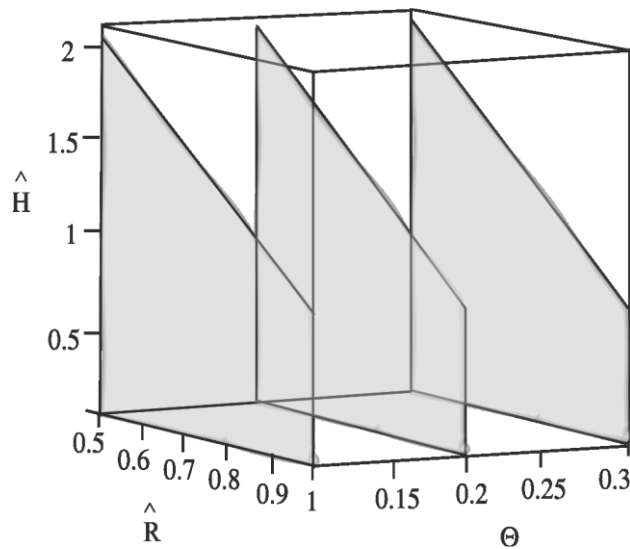
$$\hat{\sigma}_r(1, \hat{t}) = \frac{1}{\hat{h}(1, \hat{t})}. \quad (6.23)$$

W celu ustalenia zakresu zmian parametru  $\Theta$  na czas zniszczenia tarczy, zbadano wpływ tego parametru na czas życia przykładowej tarczy, ze swobodnym brzegiem wewnętrznym, opisaney równaniem:  $\hat{H}(\hat{R}) = 0.8 - \hat{R} + 2.1\hat{R}^2$ . Wyniki przedstawiono na rys. 6.12.



Rys. 6.12. Wpływ parametru  $\Theta$  na czas zniszczenia tarczy ze swobodnym brzegiem wewnętrznym.

Zakres zmian parametru  $\Theta$  w przypadku tarcz swobodnych, w porównaniu do tarcz utwierdzonych na sztywnym wale lub tarcz ze zwolnioną grubością na brzegu wewnętrznym, jest znacząco różny. Już przy wartości  $\Theta = 0.5$  czas zniszczenia tarczy swobodnej osiąga wartość czasu zniszczenia ciągłego. W następstwie przeprowadzonej analizy do obliczeń numerycznych przyjęto trzy różne wartości parametru:  $\Theta = 0.1$ ,  $\Theta = 0.2$  i  $\Theta = 0.3$ . Dla zdefiniowanych warunków początkowych optymalne profile dla tarcz stożkowych przedstawiono na rys. 6.13, dla trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .



Rys. 6.13. Optymalne kształty stożkowych tarcz swobodnych,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

Przeprowadzona analiza wyników numerycznych wykazała brak wpływu parametru  $\Theta$  na optymalny profil tarczy w przypadku tarcz wąskich ( $\beta = 0.5$ ). Optymalny kształt tarczy opisany jest równaniem:

$$\hat{H}(\hat{R}) = 3.99 - 2.66\hat{R}. \quad (6.24)$$

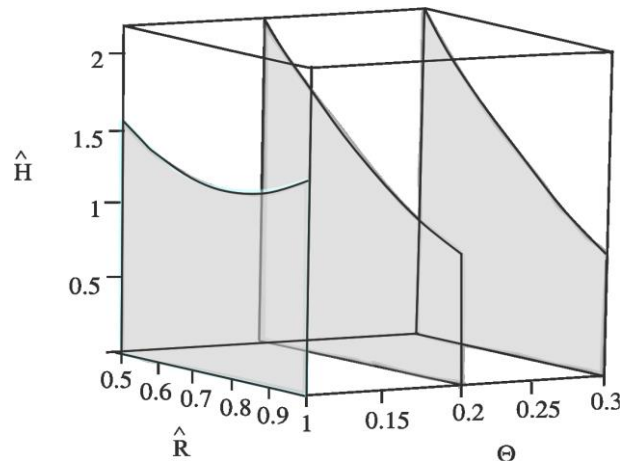
Optymalne kształty swobodnych tarcz stożkowych charakteryzują się jeszcze większym, niż w przypadku tarcz utwierdzonych na sztywnym wale, czy tarcz ze zwolnioną grubością na brzegu, wewnętrznym przesunięciem masy ku brzegowi wewnętrznemu tarczy, co wpływa na zmniejszenie sił masowych na zewnętrznym brzegu tarczy.

Wpływ parametru  $\Theta$  na kształt optymalny staje się znaczący w przypadku optymalizacji dwuparametrycznej. Po zastosowaniu procedury „maximum maximorum” ustalono optymalne profile tarcz. Tabela nr 6.4. przedstawia równania opisujące optymalne profile tarcz parabolicznych.

	$\Theta = 0.1$	$\Theta = 0.2$	$\Theta = 0.3$
$\mu = 0.1$	$\hat{H}(\hat{R}) = 3.59 - 6.01\hat{R} + 3.84\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 4.09 - 5.01\hat{R} + 1.79\hat{R}^2$	$\hat{H}(\hat{R}) = 4.3 - 5.02\hat{R} + 1.48\hat{R}^2$

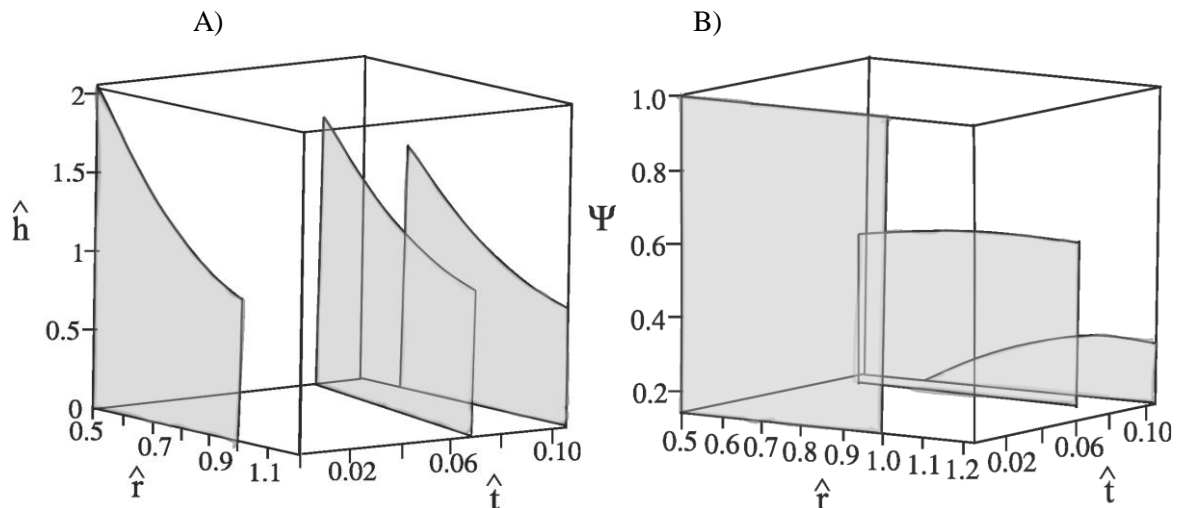
Tab. 6.4. Optymalny kształt tarczy dla  $n = 6$  i  $m = 2$  oraz trzech różnych wartości parametru  $\Theta$ .

Optymalne kształty tarcz parabolicznych przedstawiono na rysunku 6.14.



Rys. 6.14. Optymalne kształty swobodnych tarcz parabolicznych,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

Wzmocnienie brzegu zewnętrznego wykazują tarcze przy  $\Theta = 0.1$ . Dla  $\Theta = 0.2$  oraz  $\Theta = 0.3$  optymalne kształty charakteryzują się zmniejszaniem grubości tarczy ku zewnętrznemu promieniowi.



Rys. 6.15. „Przekroje czasowe” optymalnego profilu tarczy oraz funkcji ciągłości,  $\Theta = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

Rysunek 6.15. przedstawia dla parametru  $\Theta = 0.2$  „przekroje czasowe” optymalnego profilu swobodnej tarczy pierścieniowej (rys. 6.15. A)) oraz funkcji ciągłości (rys. 6.15. B)). Z uwagi na przyjęte warunki brzegowe, zmiany geometryczne profilu tarczy dotyczą również promienia wewnętrznego, który ulega przesunięciu. Czasowe przekroje funkcji ciągłości wskazują, że zniszczenie tarczy następuję na wewnętrznym jej brzegu, pomimo wyraźnego wzmocnienia w tym miejscu.

---

## **7. Optymalne kształtowanie tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego**

---

### **7.1. Model matematyczny pełzania tarczy pierścieniowej z uwzględnieniem zniszczenia ciągłego**

W dotychczasowych rozważaniach wyniki jakościowe otrzymane zarówno dla prętów jak i tarcz pełnych były porównywane z wynikami optymalnego kształtowania wymienionych elementów konstrukcyjnych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego. W przeprowadzonych badaniach literaturowych brak jest wyników dotyczących optymalnego kształtowania tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego [36, 37, 40, 41, 42, 57, 76]. Z tego względu w pracy podjęto dodatkowo ten problem [99]. Podobny problem wpływu warunków brzegowych na optymalne kształty analizował w swoich pracach Pedersen [64, 65]. Ten sam autor zajmował się również optymalizacją drgań płyt [67], oraz optymalizacją kształtu z uwagi na minimalną koncentrację naprężeń [68].

Zniszczenie ciągłe, charakteryzujące się znacznym przewężeniem rozciąganej próbki, jest poprzedzone dużymi odkształceniami, co zmusza do rezygnacji z zasady zeszywnienia [61]. Analizowano element tarczy już odkształconej, przy czym parametry związane ze stanem początkowym tarczy będą oznaczane dużymi literami, a ich bieżące wartości-małymi. Opis prowadzony będzie we współrzędnych materialnych Lagrange'a, przy czym wszystkie wielkości będą funkcją dwóch zmiennych, promienia  $R$  i czasu  $t$ . Deformacja tarczy w czasie procesu pełzania opisana będzie przez zależność współrzędnej przestrzennej od materialnej  $r(R)$ . Wielkości bezwymiarowe wprowadzono do równań opisujących proces pełzania analogicznie jak w przypadku tarcz pełnych z uwagi na czas zniszczenia mieszanego. Ostatecznie, proces pełzania tarczy z uwagi na czas zniszczenia ciągłego opisuje ten sam zestaw równań różniczkowych cząstkowych co dla tarcz pełnych z uwagi na czas zniszczenia mieszanego podany w formie (5.46), z wyłączeniem równania piątego równania ewolucji:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}'_r &= \frac{\hat{r}'}{\hat{r}}(\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_g) - 2 \cdot \hat{r}'\mu - \frac{\hat{h}'}{\hat{h}}\hat{\sigma}_r \\ \hat{\sigma}'_g &= \frac{6\hat{\sigma}_e^2(\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_g)\frac{\hat{r}'}{\hat{r}} - \hat{\sigma}'_r[(n-1)(5\hat{\sigma}_r\hat{\sigma}_g - 2\hat{\sigma}_r^2 - 2\hat{\sigma}_g^2) - 2\hat{\sigma}_e^2]}{(n-1)(2\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_r)^2 + 4\hat{\sigma}_e^2}\end{aligned}\quad (7.1)$$

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} = \frac{\hat{r}}{2 \cdot n} \left( \hat{\sigma}_r^2 + \hat{\sigma}_g^2 - \hat{\sigma}_r\hat{\sigma}_g \right)^{\frac{n-1}{2}} (2\hat{\sigma}_g - \hat{\sigma}_r)$$

$$\hat{h} = \frac{\hat{H}\hat{R}}{\hat{r}'\hat{r}}$$

Kryterium zniszczenia dla tarczy pierścieniowej przyjęto zgodnie z teorią Hoffa w postaci:

$$\exists R : (R \in \langle A, B \rangle \wedge h(R, t_*^{(d)}) \rightarrow 0), \quad (7.2)$$

i związane ono będzie ze zmniejszeniem wymiarów poprzecznych przynajmniej w jednym miejscu do zera. Będzie to zatem odpowiadało jednoczesnemu zmierzaniu do nieskończoności największego z odkształceń. Definicja zniszczenia wg Hoffa - zmniejszenie przekroju poprzecznego do zera, może powodować pewne wątpliwości. Wykazano jednak, że wyniki analiz przeprowadzonych w oparciu o teorię Hoffa są w dobrej zgodności z danymi doświadczalnymi (Golub i Teteruk [29, 28], Golub, Romanov, Romanova [30] i Mentl [56]).



Kryterium optymalizacji sformułowano następująco, dla zadanej, ustalonej objętości konstrukcji  $V$  i początkowych wartościach promieni  $A$  i  $B$ , która jest ograniczeniem, poszukiwano takiego pierwotnego kształtu, który przy ustalonych parametrach obciążenia zagwarantuje najdłuższy możliwy czas pracy do chwili zniszczenia ciągłego:

$$(\exists! H(R) \in f) \quad t_*^{(d)} \xrightarrow[V=const.]{\quad} \max, \quad (7.3)$$

gdzie funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \rightarrow b_0 + b_1 R + b_2 R^2 + \dots + b_n R^n$ , dla wszystkich argumentów  $R \in \langle A, B \rangle$ , gdzie  $n \in \mathbb{N} \subset \{0\}$  ( $n$  jest nieujemną liczbą całkowitą),  $b_i \in \mathbb{R}$  są stałymi współczynnikami, gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , i  $b_n \neq 0$ .

Analogicznie, najlepszych rozwiązań poszukiwano wśród tarcz stożkowych [88], (optymalizacja jednoparametryczna):

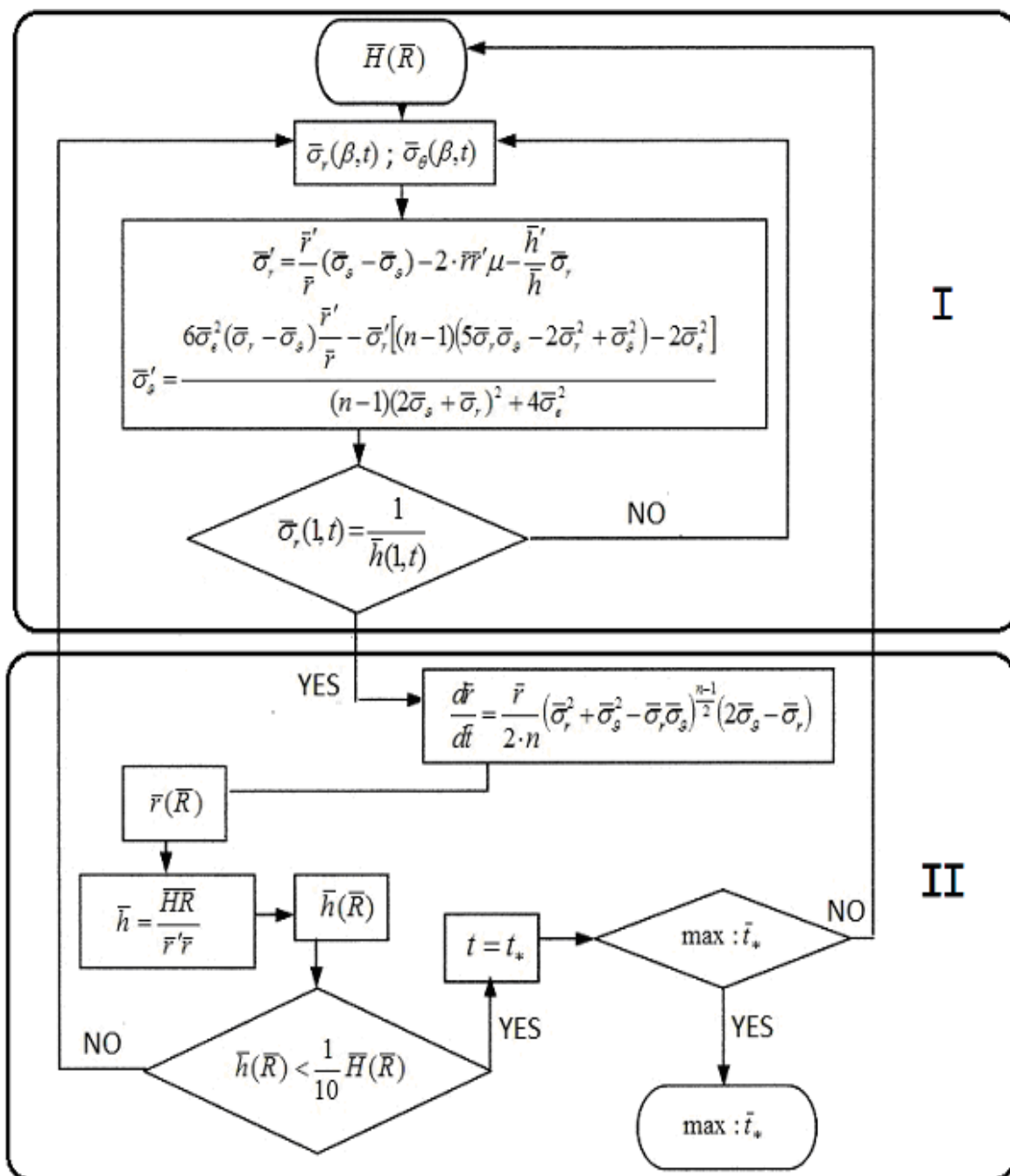
$$\hat{H}(\hat{R}; u_0, u_1) = u_0 + u_1 \hat{R}. \quad (7.4)$$

W podobny sposób jak przy zniszczeniu mieszanym, wprowadzono optymalizację dwuparametryczną:

$$\hat{H}(\hat{R}; b_0, b_1, b_2) = b_0 + b_1 \hat{R} + b_2 \hat{R}^2 \quad (7.5)$$

W procesie optymalizacji, poszukiwano takich wartości parametru  $b_0$  i  $b_1$ , dla których czas zniszczenia ciągłego będzie najdłuższy [94].

Obliczenia numeryczne było przeprowadzone zgodnie z algorytmem [95] przedstawionym na rys. 7.1. Dla zadanej początkowej geometrii tarczy  $\hat{H}(\hat{R})$ , na podstawie dwóch pierwszych równań układu (7.1.) zostaje wyznaczony rozkład naprężeń w tarczy metodą Runge – Kutty IV rzędu, w taki sposób aby pełniony został warunek brzegowy na jej brzegu zewnętrznym.

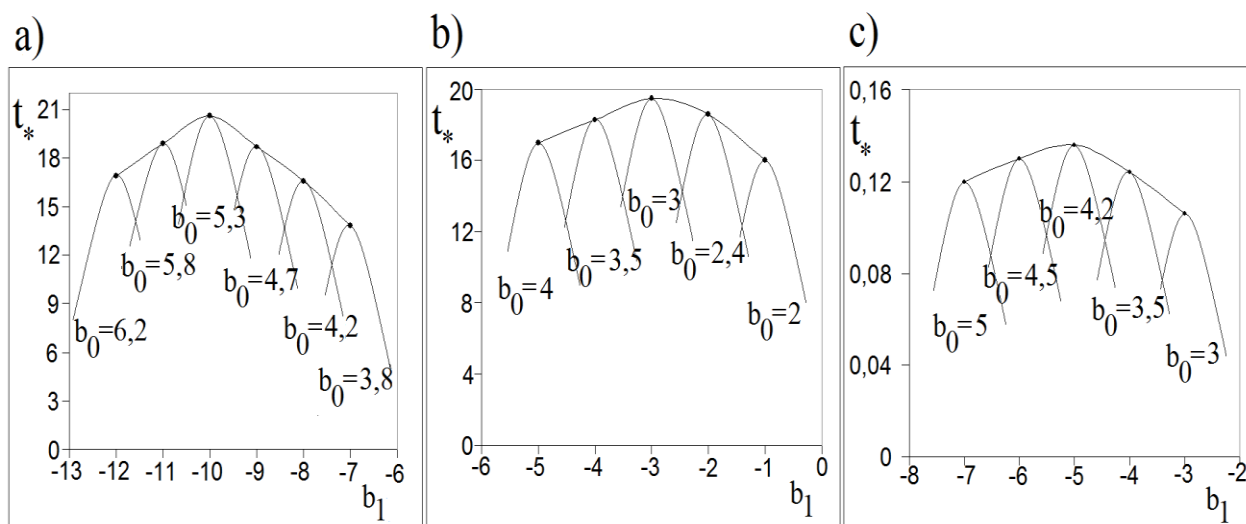


Rys.7.1. Algorytm numeryczny.

Dla znanego rozkładu naprężeń, doliczane są zmiany geometrii tarczy. Trzecie równanie układu (7.1.) całkowane jest względem czasu, ze zmiennym krokiem czasowym, metodą Eulera. W ten sposób obliczany jest przyrost wartości promienia w poszczególnych węzłach tarczy. Korzystając z równania czwartego układu równań (7.1.) doliczane są zmiany grubości tarczy w zadanych węzłach. Powtarzanie tych obliczeń, aż do momentu, kiedy przyjęte kryterium zniszczenia zostanie spełnione, pozwala określić czas do zniszczenia ciągłego tarczy pierścieniowej.

Konsekwentnie, tej samej wartości parametru  $b_0$ , przypisuje się nieco zmienioną wartość parametru  $b_1$ , pełny cykl obliczeń jest powtarzany i czas zniszczenia ciągłego dla następnej geometrii początkowej zostaje wyznaczony, aż do momentu w którym zostaną dobrane takie wartości parametrów  $b_0$  i  $b_1$ , które zapewnią najdłuższy czas pracy tarczy do zniszczenia ciągłego.

W przypadku optymalizacji dwuparametrycznej należy znaleźć maximum maximum uzyskanych krzywych. W ten sposób wyznaczone zostaje rozwiązanie optymalne. Wyniki uzyskanych krzywych przedstawiono na rys. 7.2. dla  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$  również uwzględniając trzy różne warunki brzegowe dla tarczy pierścieniowej .



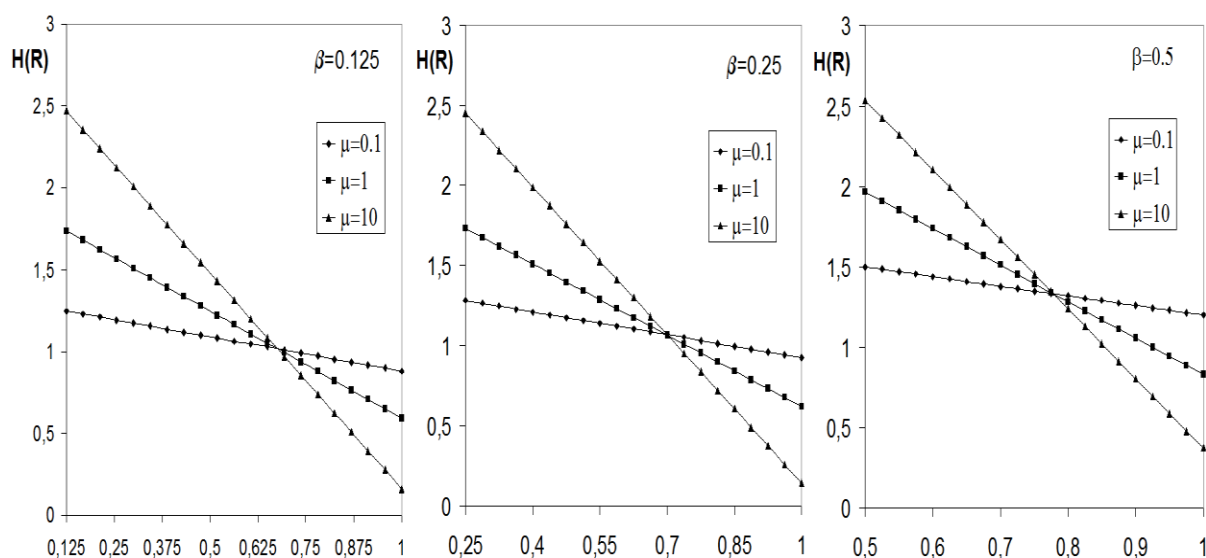
Rys. 7. 2. Poszukiwanie optymalnych parametrów (maximum maximum uzyskanych krzywych).  
a) tarcza utwierdzona na sztywnym wale,  
b) tarcza osadzona na sztywnym wale, z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym,  
c) tarcza ze swobodnym brzegiem wewnętrznym.

## 7.2. Wpływ warunków brzegowych

### 7.2.1. Tarcza utwierdzona na sztywnym wale

Warunki początkowe oraz brzegowe dla przypadku tarczy utwierdzonej na sztywnym wale [90, 69] opisują równania 6.7 – 6.11.

Optymalne profile tarcz pierścieniowych dla optymalizacji jednoparametrycznej przedstawiono na rys. 7.3. dla trzech różnych wartości parametru  $\mu$  i  $\beta$ .



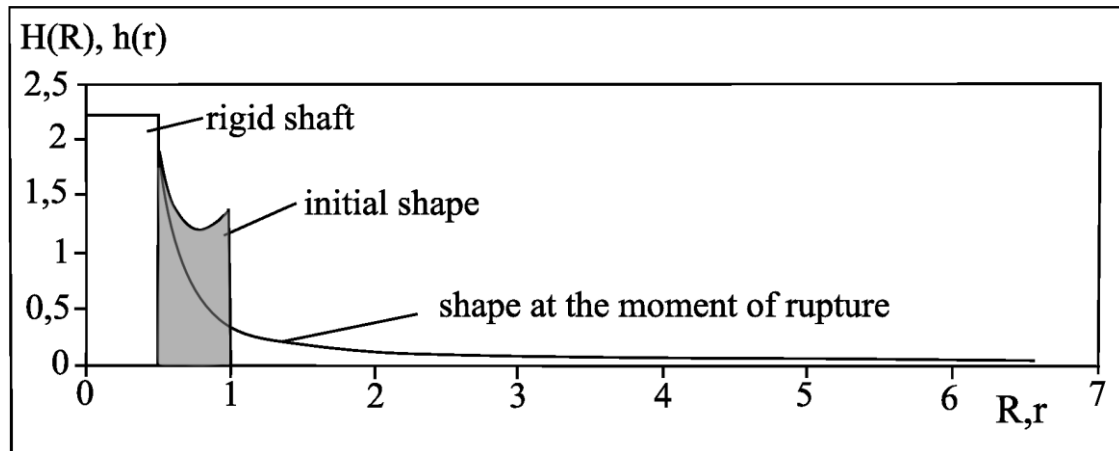
Rys. 7.3. Optymalne kształty tarcz utwierdzonych na sztywnym wale dla optymalizacji jednoparametrycznej.

Uzyskane rozwiązania w dużym stopniu zależą od parametru  $\mu$ , który to określa stosunek masy własnej tarczy do masy rozłożonej na zewnętrznej krawędzi tarczy. Dla przypadków, w których udział masy własnej tarczy jest znacznie większy w stosunku do masy na krawędzi tarczy (duże wartości parametru  $\mu$ ), optymalne profile są zbliżone do tarcz płaskich. Dla małych wartości parametru  $\mu$ , kiedy znacznie mniej znaczący jest udział masy własnej tarczy, masa własna tarczy pozostaje skupiona jest na jej brzegu wewnętrznym.

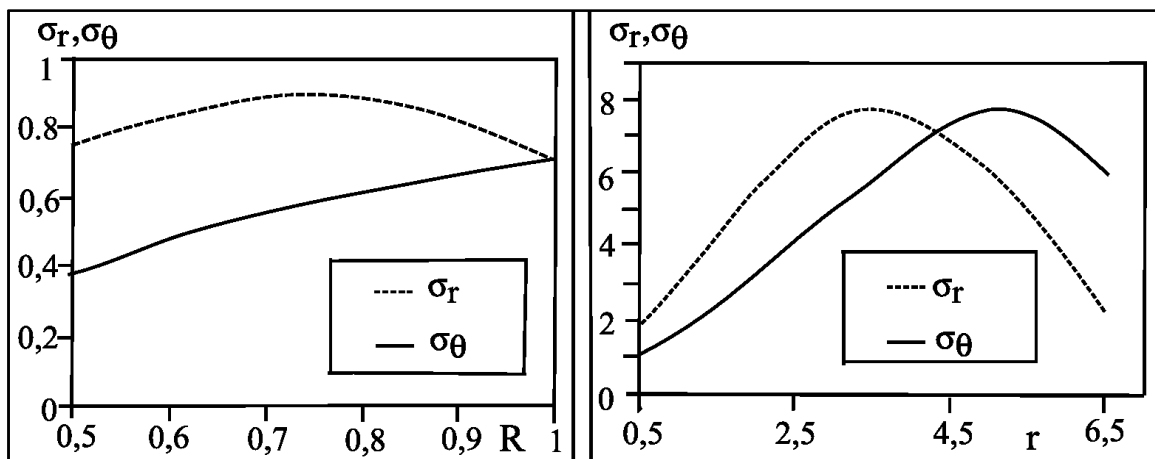
Natomiast optymalne rozwiązanie uzyskane przy optymalizacji dwuparametrycznej, dla wybranych wartości parametrów:  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$  przyjmuje postać:

$$\hat{H}(\hat{R}) = 5.3 - 10\hat{R} + 6.1\hat{R}^2. \quad (7.6)$$

Początkowy profil parabolicznej tarczy optymalnej oraz jej kształt w chwili zniszczenia pokazano na rys. 7.4. Lokalny wzrost grubości optymalnego profilu na brzegu zewnętrznym działa jak swego rodzaju wzmocnienie i prowadzi do wydłużenia czasu pracy tarczy.



Rys. 7.4. Porównanie początkowego profilu tarczy optymalnej utwierdzonej na sztywnym wale oraz jej profilu w chwili zniszczenia ciągłego.  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .



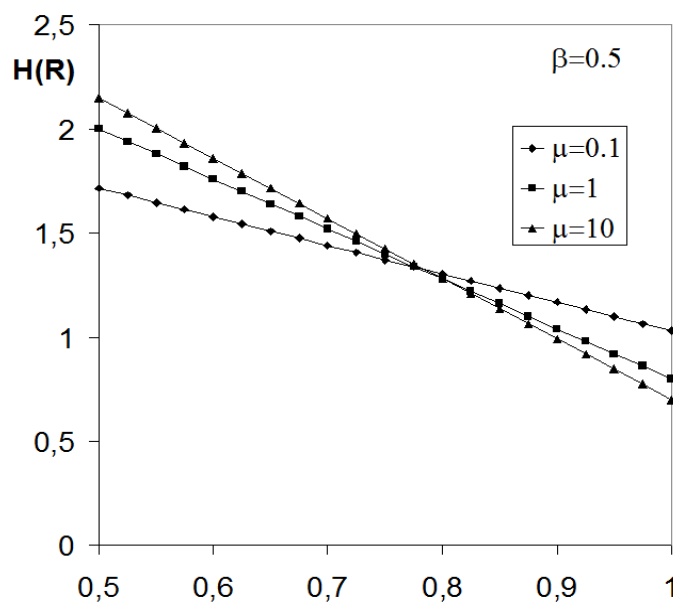
Rys. 7.5. Rozkład naprężeń dla początkowego profilu tarczy optymalnej utwierdzonej na sztywnym wale oraz dla profilu w chwili zniszczenia.  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .

Chociaż wzmocnienie brzegu zewnętrznego tarczy zwiększa siły odśrodkowe, to działa jak swego rodzaju wzmacniający pierścień wokół tarczy, który zapobiega rozplywaniu się masy. W przypadku tarcz, w których udział masy własnej jest większy, efekt ten nie jest obserwowany. W chwili zniszczenia (przekrój poprzeczny tarczy zmniejsza się do zera co najmniej w jednym punkcie węzłowym), promień zewnętrzny zwiększa się ponad sześciokrotnie, naprężenia w tarczy (rys. 7.5) zwiększają się prawie dziesięciokrotnie w stosunku do wartości początkowych.

### 7.2.2. Tarcza osadzona na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym

Jako następny rozważono problem tarczy osadzonej na sztywnym wale [90], ale z możliwością zmiany grubości na jej wewnętrznym brzegu. Warunki początkowe opisuje równanie 6.6 oraz brzegowe dla tego przypadku opisują równania 6.18 – 6.20.

Optymalne profile dla tarcz stożkowych przedstawiono na rys. 7.6. dla trzech różnych wartości parametru  $\mu$ .

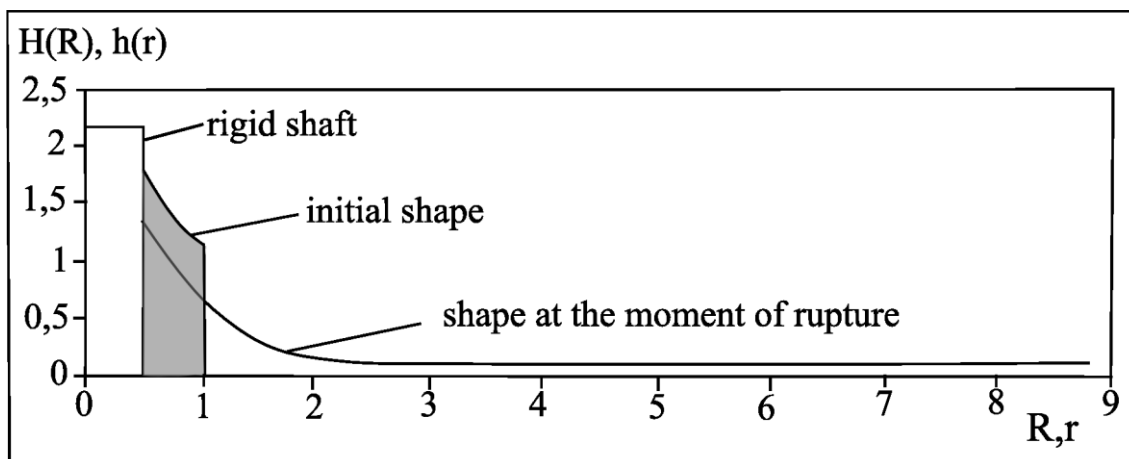


Rys. 7.6. Optymalne profile tarcz stożkowych osadzonych na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym.

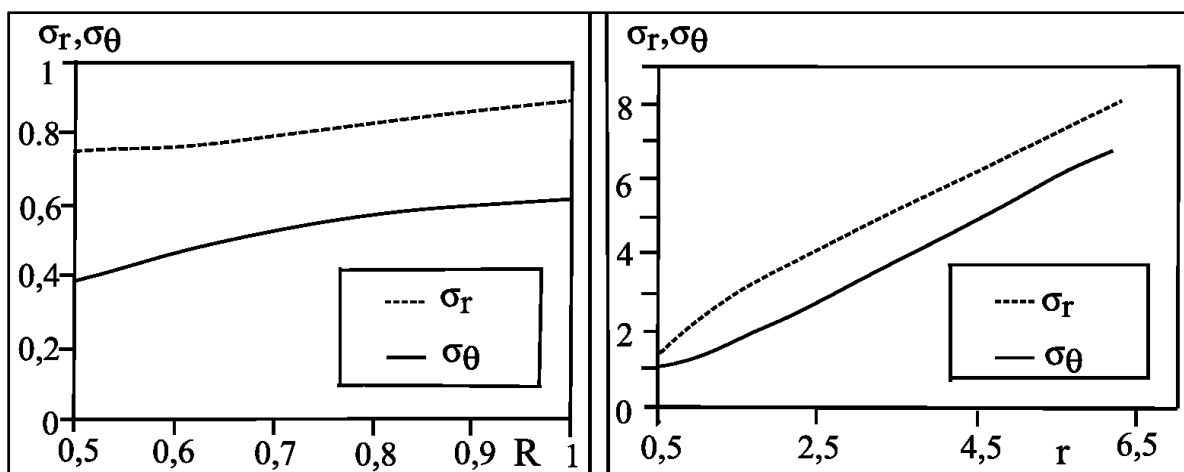
Dla mniejszych wartości parametru  $\mu$  (masa własna tarczy zaniedbana), optymalne profile tarcz, jak można się było spodziewać, są zbliżone do tarcz o stałej grubości. W przeciwnym przypadku, gdy decydujący jest udział masy własnej tarczy, grubość tarcz optymalnych na zewnętrznej krawędzi dąży do zera.

Optymalny profil tarczy, spośród tarcz parabolicznych, dla ustalonych parametrów  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$  opisany jest równaniem:

$$\hat{H}(\hat{R}) = 3 - 3\hat{R} + 1.07\hat{R}^2. \quad (7.7)$$



Rys. 7.7. Porównanie początkowego profilu tarczy parabolicznej, optymalnej, z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym oraz jej profilu w chwili zniszczenia ciągłego.  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .

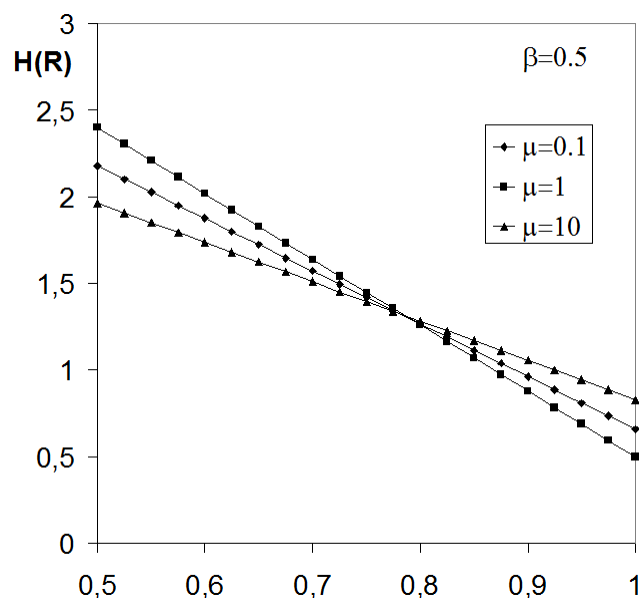


Rys. 7.8. Rozkład naprężeń dla początkowego profilu tarczy parabolicznej, optymalnej, z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym oraz dla profilu w chwili zniszczenia.  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .

Optymalny początkowy profil tarczy (rys.7.7) jest opisany funkcją monotonicznie malejącą, brak jest wzmocnienie brzegu zewnętrznego, charakterystycznego dla tarcz utwierdzonych na sztywnym wale bez możliwości zmiany grubości na brzegu wewnętrznym. Możliwość zmiany grubości w miejscu styku ze sztywnym walem, pozwala na dłuższą pracę tarczy, czas do zniszczenia jest dłuższy, tarcza podlega też większym odkształceniom (rys.7.7). Rozkłady naprężeń (rys.7.8) są reprezentowane przez funkcje monotonicznie rosnące, w przybliżeniu równoległe do siebie. W chwili pęknięcia, promień zewnętrzny jest niemal dziesięciokrotnie większy od początkowego.

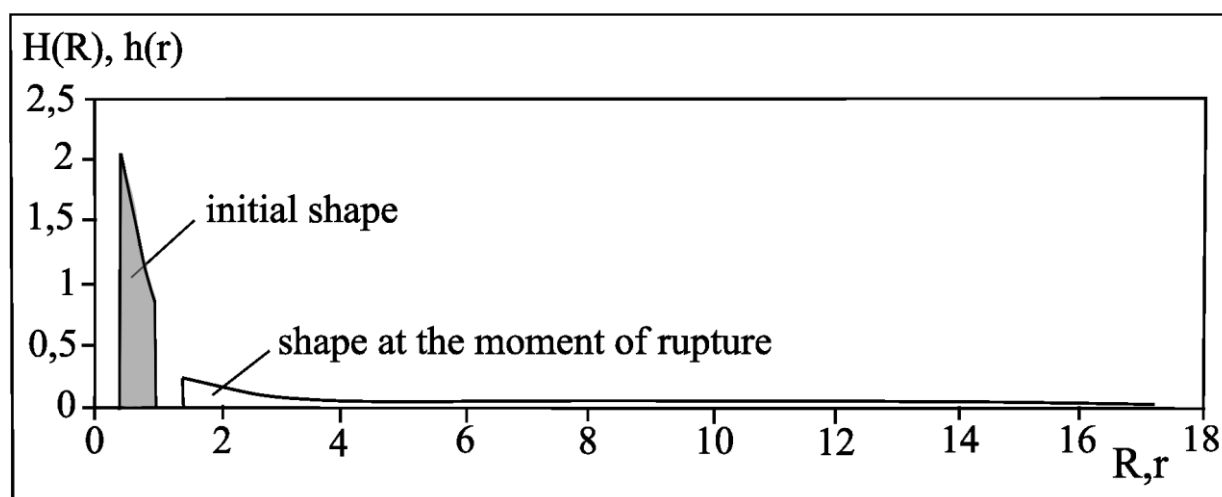
### 7.2.3. Tarcza ze swobodnym brzegiem wewnętrznym

Jako ostatni przypadek rozważono tarcze ze swobodnym brzegiem wewnętrznym [90]. Dla tej tarczy warunki początkowe oraz brzegowe sformułowano w równaniach 6.6 oraz 6.22.-6.23. Optymalne profile tarcz ze swobodnym brzegiem wewnętrznym dla optymalizacji jednoparametrycznej dla trzech różnych wartości parametru  $\mu$  przedstawiono na rys. 7.9.



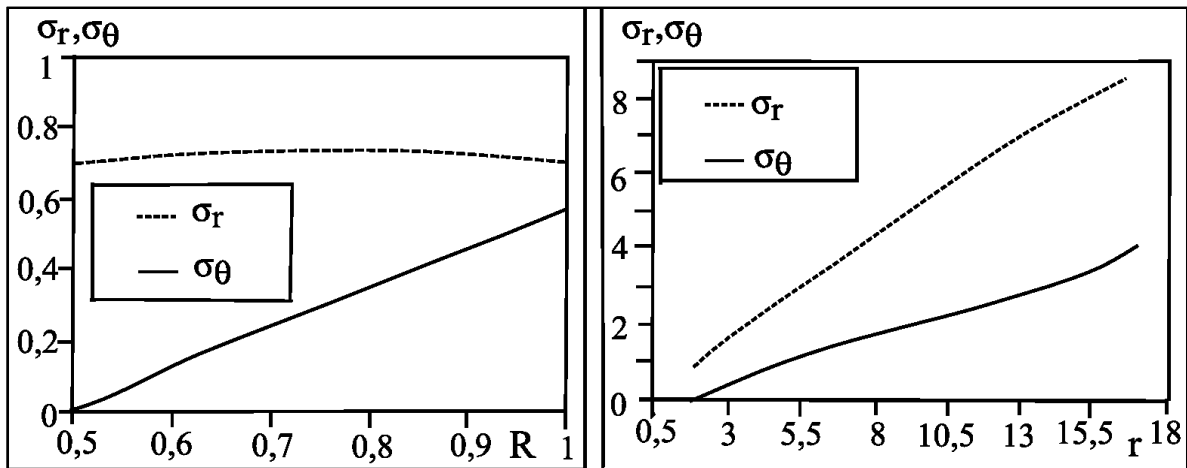
Rys. 7.9. Optymalne profile tarcz stożkowych ze swobodnym brzegiem wewnętrznym dla optymalizacji jednoparametrycznej.

Porównanie optymalnego profilu początkowego i w chwili zniszczenia tarczy ze swobodnym brzegiem wewnętrznym dla optymalizacji dwuparametrycznej przedstawiono na rys. 7.10.



Rys. 7.10. Porównanie początkowego profilu tarczy parabolicznych ze swobodnym brzegiem wewnętrznym oraz jej profilu w chwili zniszczenia ciągłego.  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .

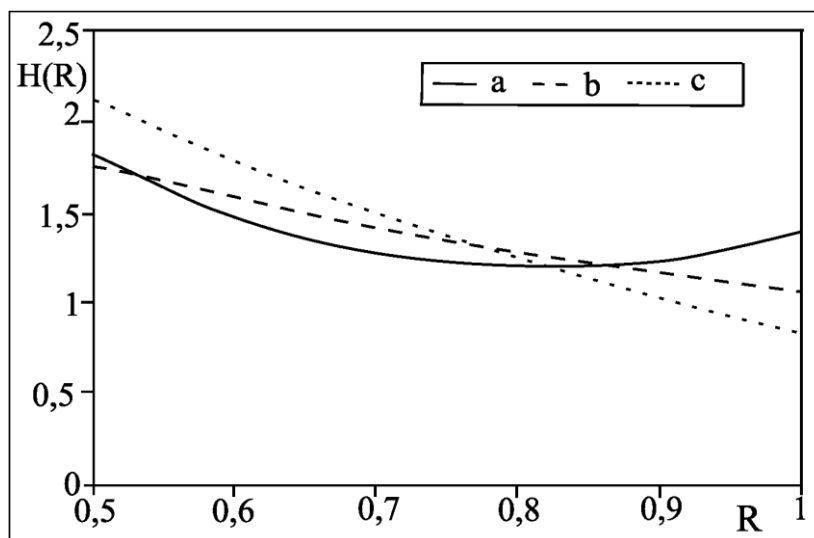




Rys. 7.11. Rozkład naprężeń dla początkowego profilu tarczy parabolicznej ze swobodnym brzegiem wewnętrznym oraz dla profilu w chwili zniszczenia.  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .

W chwili zniszczenia wewnętrzny promień tarczy zwiększa się trzykrotnie, ale grubość w tym miejscu zmniejsza się siedmiokrotnie (rys.7.10). Tarcza staje się niemal płaska, z wyjątkiem wewnętrznej krawędzi. Natomiast wartości naprężeń w momencie zniszczenia są czterokrotnie wyższe (rys.7.11), w stosunku do wartości naprężeń w tarczy, w chwili zniszczenia, utwierdzonej na sztywnym wale lub tarczy z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym.

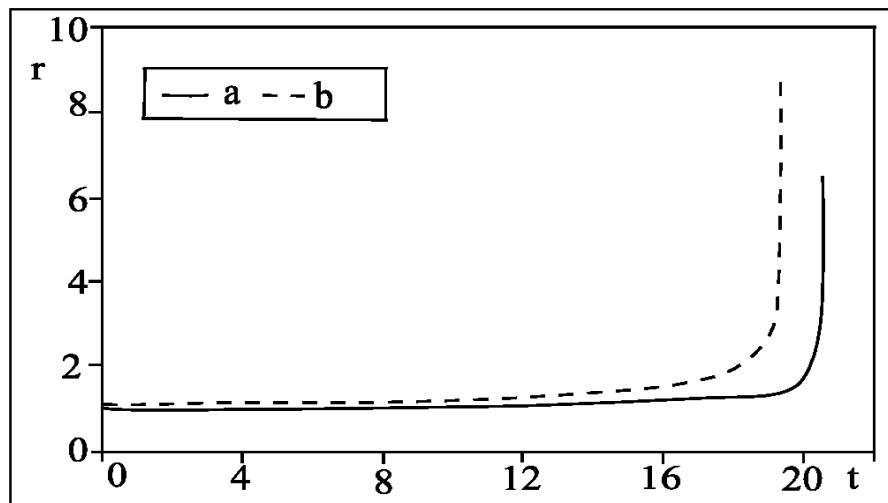
Wykazano silną zależność, pomiędzy optymalnym profilem tarczy a warunkami brzegowymi nałożonymi na początkowy profil. Na rysunku 7.12 zestawiono optymalne kształty tarcz pierścieniowych dla trzech rozważanych warunków brzegowych dla  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$  i  $n = 6$ .



Rys. 7.12. Optymalny kształt dla:  
 a) tarczy usztywnionej na sztywnym wale,  
 b) tarczy osadzonej na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym,  
 c) tarczy ze swobodnym brzegiem wewnętrznym.

Charakterystyczny optymalny profil tarczy ze wzmocnieniem brzegu zewnętrznego, otrzymuje się dla tarcz utwierdzonych na sztywnym wale. Kiedy zmiana grubości jest już dozwolona i przepływ masy wzdłuż osi tarczy staje się możliwy, zjawisko wzmocnienia na brzegu nie występuje, co więcej masa tarczy zostaje skupiona na brzegu wewnętrznym optymalnego profilu.

Przyrost promienia zewnętrznego optymalnych kształtów tarcz pierścieniowych, dla rozpatrywanych warunków brzegowych został przedstawiony na rys. 7.13.



Rys. 7.13. Przyrost promienia zewnętrznego:

- a) tarczy utwierdzonej na sztywnym wale,
- b) tarczy osadzonej na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym.

Tarcza ze swobodnym brzegiem wewnętrznym powoduje znacznie lepsze wykorzystanie materiału chwili zniszczenia, niż w pozostałych przypadkach. W chwili zniszczenia grubość tarczy ze swobodnym brzegiem jest bardzo mała i niemal stała wzdłuż całej osi tarczy. Z drugiej strony, z powodu znaczne zwiększenie średnicy tarczy, powoduje wzrost sił odśrodkowych, a czas do zniszczenia tarczy jest wtedy bardzo krótki, równy 0,14. Z tego powodu nie uwzględniona ona została na rys. 7.13. Proces pełzania dla tarczy ze swobodnym brzegiem wewnętrznym, w porównaniu z tarczami osadzonymi na wale, przebiega bardzo szybko.

---

## 8. Podsumowanie i perspektywy rozwoju tematyki pracy

---

Teoria zniszczenia mieszanego Kachanova ujmuje całość zagadnienia procesu pełzania, zarówno teorię zniszczenia ciągłego wg Hoffa, jak i teorię kruchego pęknięcia Kachanova. Problem jest wyjątkowo skomplikowany ze względu na nieliniowość fizyczną oraz geometryczną, jak również czynnik czasu powodujący wystąpienie dodatkowego wymiaru, w konsekwencji równania stanu stają się równaniami cząstkowymi. Dodatkową trudnością jest duża różnorodność sposobu sformułowania tych równań stanu, co nierzadko ma również wpływ na rozwiązanie optymalne.

W niniejszym opracowaniu teoria zniszczenia mieszanego Kachanova została po raz pierwszy zastosowana do problematyki optymalizacji kształtu. Sformułowano i wykazano kilka ogólnych twierdzeń dotyczących konstrukcji optymalnych.

W pracy zaproponowano teoretyczny model pełzania, które uwzględnia jednocześnie zmniejszenie przekroju powierzchni efektywnie przenoszącej naprężenia w wyniku rozwoju uszkodzeń jak i wpływ zmian geometrycznych układu spowodowanych pełzaniem materiału. Rozwiązania przeprowadzono głównie dla prawa Nortona-Baileya, uogólnionego dla naprężeń rzeczywistych i odkształceń logarytmicznych.

Wprowadzenie równania ewolucji Kachanowa do matematycznego modelu opisującego proces pełzania zrodziło pewne komplikacje w uniwersalności zapisanych danych. W celu sparametryzowania równania ewolucji wprowadzono parametr  $\Theta$  wyrażony poprzez stosunek czasu zniszczenia kruchego do czasu zniszczenia ciągłego przyrmatycznego pręta z pominięciem jego masy własnej:

$$\Theta = \frac{t_{pr}^{(K)}}{t_{pr}^{(H)}} = \frac{nk\sigma_{pr}^n}{(m+1)D\sigma_{pr}^m}. \quad (8.1)$$

Parametr  $\Theta$  opisuje fizyczny aspekt problemu, bez wpływu na jego geometrię rozwiązania. Wprowadzony parametr  $\Theta$  jest stałą materiałową, określającą wrażliwość materiału na typ zniszczenia. Przeprowadzono analizę numeryczną, w której wykazano, że wraz ze wzrostem parametru  $\Theta$  zmniejsza się wrażliwość materiału na pęknięcie, natomiast większą rolę przy zniszczeniu odgrywają zmiany geometryczne. Istnieje graniczna wartości parametru  $\Theta$ , przy której czas zniszczenia elementu osiąga wartość czasu zniszczenia ciągłego. Powyżej tej wartości parametr  $\Theta$  nie wpływa na czas zniszczenia elementu. Natomiast w sposób niezwykle istotny na graniczną wartość parametru  $\Theta$  wpływa sposób umocowania rozważanego elementu (warunki brzegowe), obciążenie brzegu zewnętrznego (parametr  $\mu$ ) jak również w przypadku tarczy, jej szerokość.

Rozwiązanie matematycznego układu równań, opisującego proces pełzania jest możliwe tylko dla znanej początkowej geometrii elementu konstrukcyjnego  $\aleph(\chi)$ , która to dla zadanego problemu jest zmienną optymalizacji. Z tego powodu zastosowano optymalizację parametryczną. Poszukiwano optimum w klasie funkcji wielomianowych, tak aby przez odpowiedni dobór parametrów  $b_i \in \mathbf{R}$  zmaksymalizować czas pracy do zniszczenia mieszanego:

$$(\exists! \aleph(\chi) \in f) \quad t_*^{(m)} \xrightarrow{V=const.} \max, \quad (8.2)$$

gdzie funkcja  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $X \rightarrow b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_nX^n$ , dla wszystkich argumentów  $\chi \in \langle A, B \rangle$ ,  $n \in \mathbf{N} \subset \{0\}$  ( $n$  jest nieujemną liczbą całkowitą),  $b_i \in \mathbf{R}$  są stałymi współczynnikami, gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , i  $b_n \neq 0$ .

Przeprowadzono analizę numeryczną problemu optymalnego kształtowania z uwagi na czas zniszczenia mieszanego dla prętów i tarcz pełnych.

Optymalne rozwiązania przedstawiono również dla tarcz pierścieniowych z uwzględnieniem trzech różnych warunków brzegowych:

1. tarczy utwierdzonej na sztywnym wale,
2. tarczy osadzonej na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym,
3. tarczy ze swobodnym brzegiem wewnętrznym,

zarówno z uwagi na czas zniszczenia mieszane jak i ciągłego. Początkowo optymalnych rozwiązań poszukiwano w klasie funkcji liniowych, z uwagi na prostotę wykonanie takiego profilu. Wprowadzenie optymalizacji dwuparametrycznej w stosunku do jednoparametrycznej zwiększa czas pracy elementu o ok. 10%. Spodziewano się, że uzyskane wyniki można jeszcze poprawić, tzn. zysk może być jeszcze większy jeśli poszerzy się klasę funkcji  $\mathcal{N}(\chi)$ . Wprowadzanie kolejnych stopni funkcji wielomianowych nie przyniosłoby oczekiwanych wyników. Wprowadzono korektę profilu równomiernej wytrzymałości. Zwiększyło to czas pracy elementu w stosunku do optymalizacji jedno- i dwuparametrycznej średnio o 60 %.

Optymalne profile prętów otrzymane w wyniku zastosowania zarówno optymalizacji jedno- jak i dwuparametrycznej opisane są funkcjami monotonicznie malejącymi. Otrzymane rozwiązania dla prętów z uwagi na czas zniszczenia mieszane są porównywalne do optymalnych kształtów z uwagi na czas zniszczenia ciągłego.

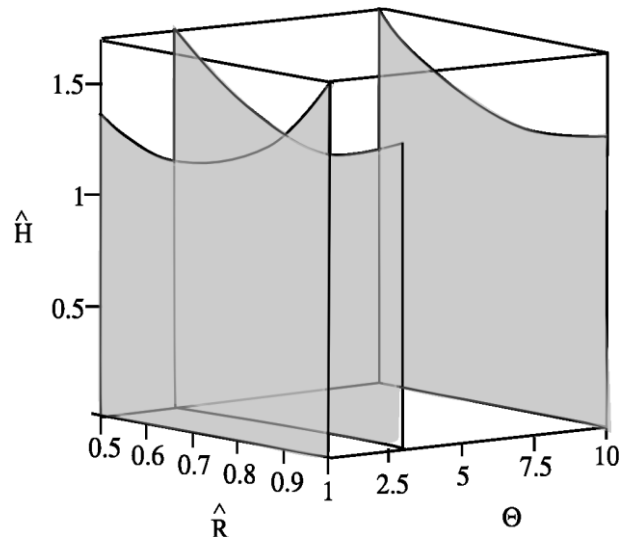
Optymalne profile tarcz w klasie funkcji parabolicznych charakteryzuje występowanie minimum funkcji wewnątrz szerokości dysku. Zwiększona grubość na zewnętrznej krawędzi działa jako swego rodzaju wzmocnienie i dzięki temu czas do zniszczenia może być dłuższy.

Wykazano silną zależność, pomiędzy optymalnym profilem tarczy a warunkami brzegowymi. Charakterystyczny optymalny profil tarczy ze wzmocnieniem brzegu zewnętrznego, otrzymuje się dla małych wartości parametru  $\Theta$ . Wraz ze wzrostem parametru  $\Theta$ , tylko w przypadku tarcz utwierdzonych na sztywnym wale, wzmocnienie brzegu zewnętrznego tarczy utrzymuje się. Natomiast w przypadku gdy zmiana grubości jest już dozwolona i przepływ masy wzdłuż osi tarczy staje się możliwy, zjawisko wzmocnienia brzegu zanika dla wyższych wartości parametru  $\Theta$ . W przypadku tarcz swobodnych, masa tarczy zostaje skupiona na brzegu wewnętrznym optymalnego profilu. Dla zwiększających się wartościach parametru  $\Theta$ , optymalne profile tarcz z uwagi na czas zniszczenia mieszane „zblizają się” do optymalnych kształtów otrzymanych przy zastosowaniu teorii zniszczenia ciągłego. Prezentowane wnioski uzasadnia fakt, że parametr  $\Theta$  określa wrażliwość materiału na typ

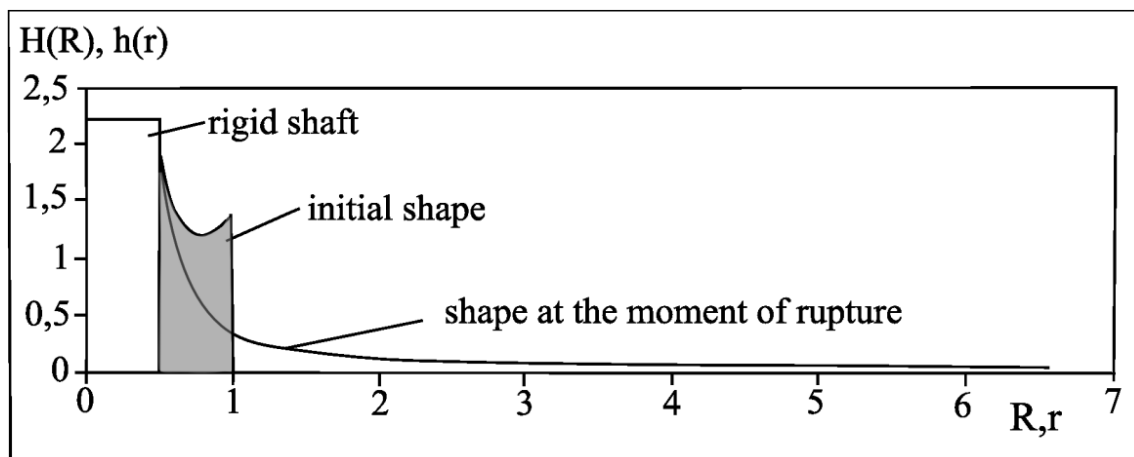
zniszczenia, co oznacza, że dla wyższych wartości parametru  $\Theta$ , to właśnie odkształcenia geometryczne stają się bardziej znaczące przy zniszczeniu.

Poniżej przedstawiono prezentowane już w pracy wyniki optymalnych kształtów dla trzech warunków brzegowych tarcz pierścieniowych dla  $\mu = 0.1$  i  $\beta = 0.5$ . W tym miejscu zestawiono optymalne kształty tarcz z uwagi na czas zniszczenia mieszanego i ciągłego w celach porównawczych (rys. 8.1., rys. 8.2., rys. 8.3.).

A)



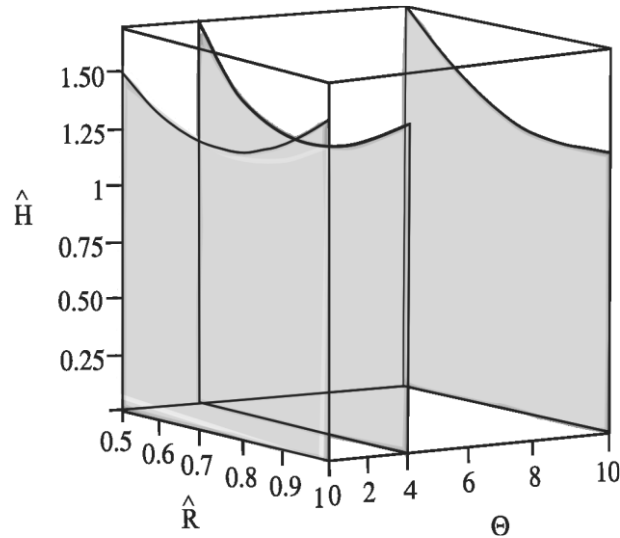
B)



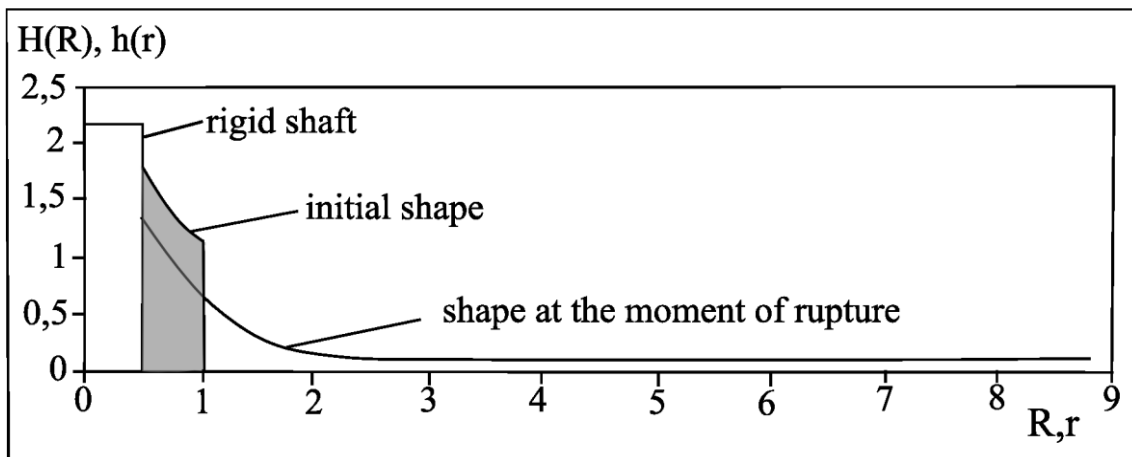
Rys. 8.1. Optymalne profile tarcz utwierdzonych na sztywnym wale:  
 A) z uwagi na czas zniszczenia mieszanego w funkcji parametru  $\Theta$ .  
 B) z uwagi na czas zniszczenia ciągłego.

Optymalne tarcze z uwagi na czas zniszczenia mieszanego (rys. 8.1. A)) zachowują wzmocnienie brzegu zewnętrznego w całym zakresie wartości parametru  $\Theta$ . Efekt wzmocnienia uzyskano także dla tarcz pierścieniowych z uwagi na czas zniszczenia ciągłego (rys. 8.1. B)).

A)



B)



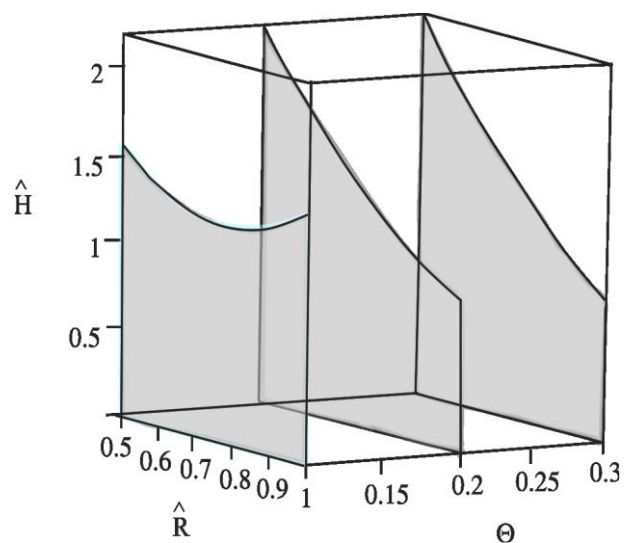
Rys. 8.2. Optymalne profile tarcz osadzonych na sztywnym wale z możliwością zmiany grubości na brzegu wewnętrznym:

A) z uwagi na czas zniszczenia mieszane w funkcji parametru  $\Theta$ .

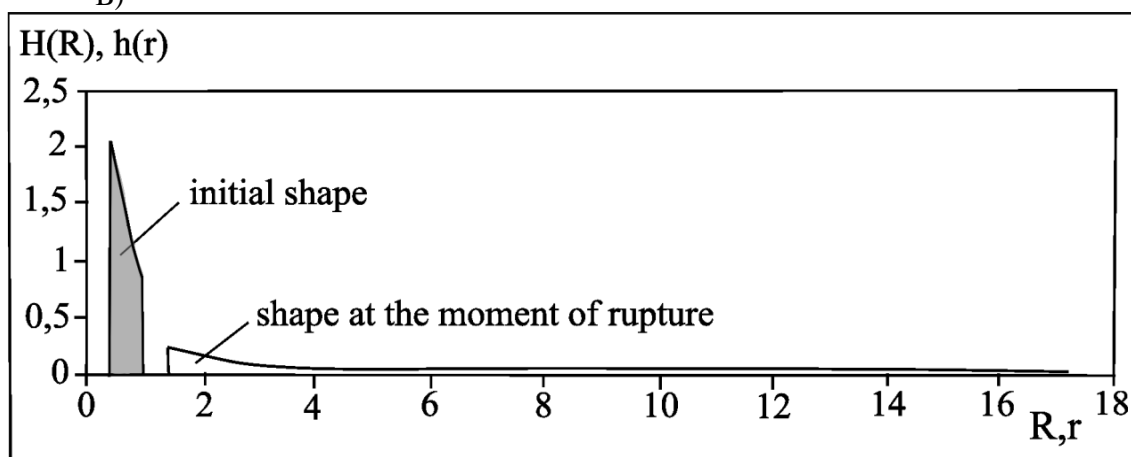
B) z uwagi na czas zniszczenia ciągłego.

Na rysunku 8.2. A) przedstawiono optymalne profile w funkcji parametru  $\Theta$  dla tarcz osadzonych na wale, ale z możliwością zmiany grubości na wewnętrznym brzegu tarczy z uwagi na czas zniszczenia mieszane. Wraz ze wzrostem parametru  $\Theta$  wzmocnienie brzegu wewnętrznego zmniejsza się i dla  $\Theta = 10$ , kiedy to odkształcenia geometryczne stają się bardziej znaczące przy zniszczeniu, nie występuje ono już wcale. Zbliżony wynik uzyskano dla optymalnego profilu tarczy z uwagi na czas zniszczenia ciągłego (rys. 8.2. B)).

A)



B)



Rys. 8.3. Optymalne profile tarcz swobodnych:  
 A) z uwagi na czas zniszczenia mieszanego w funkcji parametru  $\Theta$  ,  
 B) z uwagi na czas zniszczenia ciagliwego.

Również w przypadku tarcz swobodnych optymalny profil tarczy z uwagi na czas zniszczenia ciagliwego (rys. 8.3. B)) jest porównywalny z tym, otrzymanym z uwagi na czas zniszczenia mieszanego dla  $\Theta = 0.3$  (rys. 8.3. A)).

Wydaje się, że lepszym podejściem przy rozwiązywaniu problemów dotyczących optymalnego kształtowania, byłoby zastosowanie optymalizacji „swobodnej” polegającej na korygowaniu grubości w chwili pojawiania się pierwszych makropęknięć. Dla otrzymanych rozkładów geometrii początkowej (rys. 8.4.A) oraz odpowiadających im nierównomiernym rozkładom funkcji ciągłości w procesie pełzania, można dokonać korekty początkowej grubości (rys. 8.4.D) w obszarach, gdzie nastąpiła większa kumulacja uszkodzeń



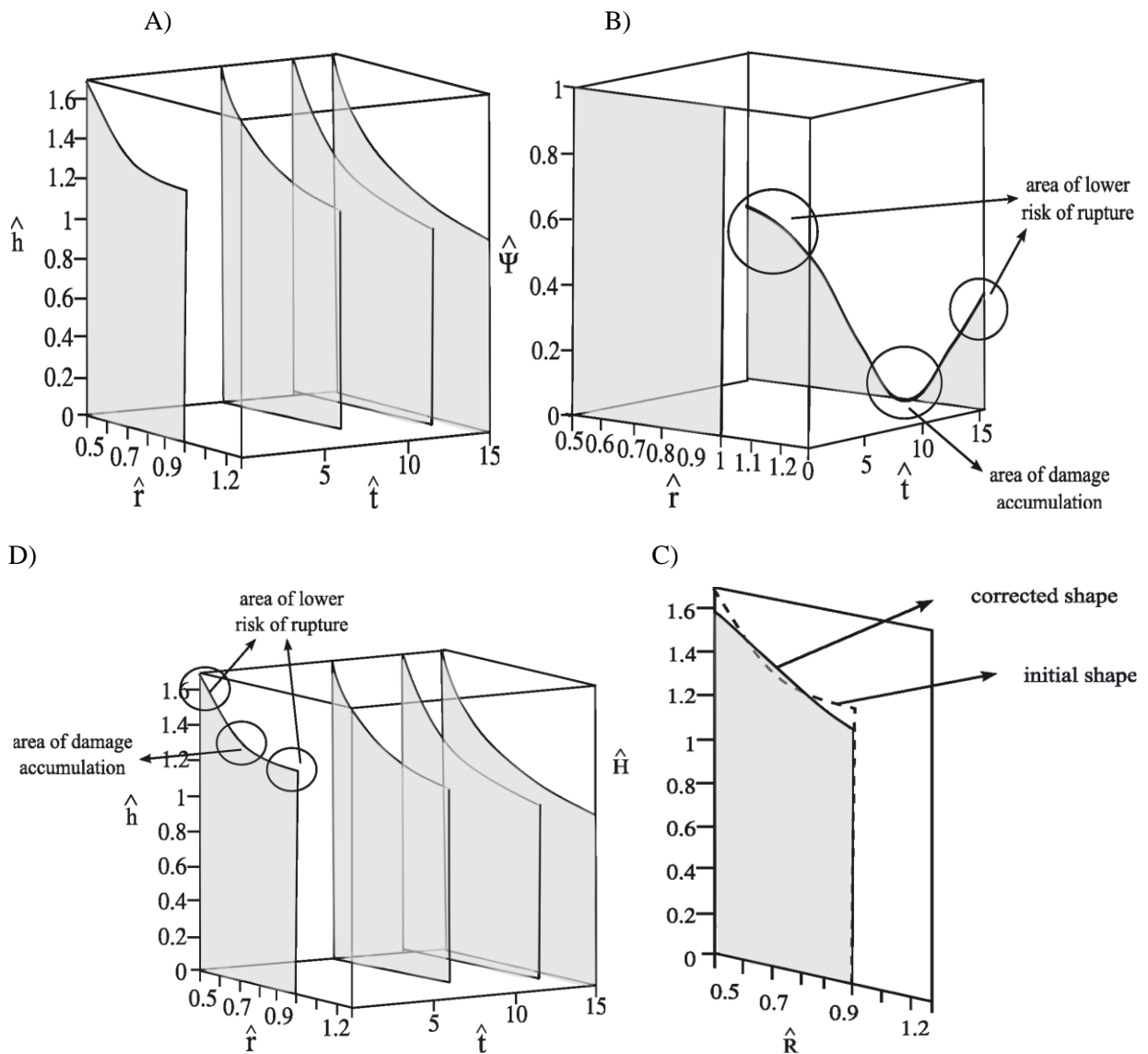
(rys. 8.4. B), kosztem grubości w strefach mniej zagrożonych pęknięciem elementu (rys.8.4.C) zgodnie z podaną formułą:

$$\hat{H}_i(\hat{R}_i) - \hat{H}_{i+1}(\hat{R}_{i+1}) \cong K \left( \frac{d\Psi_i}{d\hat{t}} - \frac{d\Psi_{i+1}}{d\hat{t}} \right), \quad (8.3)$$

gdzie K jest parametrem proporcjonalności, przy zachowaniu warunku stałej objętości:

$$\hat{V} = \int_0^1 2\pi \hat{H}(\hat{R}) \hat{R} d\hat{R} = \pi \quad (8.4)$$

Procedurę korygowania grubości schematycznie przedstawiono na rysunku 8.4, na przykładzie wyników otrzymanych dla tarcz pierścieniowych. Procedura zmierza do wyrównania poziomu uszkodzeń w elemencie konstrukcji na każdym kroku czasowym. Można tu zatem mówić o równomiernej wytrzymałości na zniszczenie w warunkach pełzania.



Rys. 8.4. Ilustracja procedury optymalizacji swobodnej,  $\beta = 0.5$ ,  $\mu = 0.1$ .

Zastosowana teoria zniszczenia mieszanego Kachanova oparta jest na pewnych uproszczeniach. Pomija wpływ uszkodzeń natychmiastowych, niezależnych od czasu, a uwzględnia jedynie uszkodzenia towarzyszące pełzaniu, zależne od czasu. Ponadto uwzględnia jednostronne sprzężenie efektów zniszczenia ciągłego i kruchego, mianowicie zmniejszenie przekroju oraz wzrost naprężeń, który uwzględnia się w równaniu ewolucji. W perspektywie możliwe byłoby wprowadzenie podwójnego sprzężenia poprzez uwzględnienie rozwoju uszkodzeń przy wyznaczaniu rozkładu naprężeń.

W prezentowanych rozważaniach aktualny stan uszkodzenia materiału był opisywany za pomocą zmiennych skalarnych  $\Psi$ . Taki opis oznacza, że uszkodzenia mają naturę izotropową, niezależną od kierunków naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . W przypadku ogólnym, skalarna miara uszkodzenia jest niewystarczająca i powinna być zastąpiona bardziej odpowiednią miarą tensorową.

Kolejnym krokiem rozwoju podjętego problemu mogłaby być próba odejścia od założonego płaskiego stanu naprężenia w tarczach i uwzględnienie trójosiowego stanu naprężenia.

W pracy pominięto wszelkie problemy zginania, wynika to głównie z trudności natury pojęciowej. Jednak warto w przyszłości podjąć problemy optymalizacji powłok cienkościennych w stanie błonowym.

Wiele możliwości otwiera także odejścia od przyjętej w analizowanych zagadnieniach stałej prędkości kątowej, rozważenie rozruchu bądź hamowania, co w konsekwencji prowadziłoby do pojawienia się naprężeń stycznych oraz przyspieszenia kątowego.

Duże perspektywy w przyszłości otwiera możliwość uzupełnienia modelu opisującego proces pełzania materiału o ewolucję micro-uszkodzeń w taki sposób, aby opis matematyczny problemu w większym stopniu wnikał w fizyczną istotę procesów rozwoju uszkodzeń w materiale. Wówczas możliwe byłoby przykładowo wprowadzenie do matematycznego modelu pełzania równania ewolucji mikropustek zaproponowanego przez Perzynę [72]:

$$\dot{\xi} = h \frac{1}{1-\xi} \text{tr}(\sigma D^P) + l J_1 + (1-\xi) \text{tr}(\Xi_0 D^P), \quad (8.5)$$

gdzie:  $\xi$  oznacza parametr określający aktualną objętość mikropustek do całkowitej objętości materiału,  $h$  i  $l$  są funkcjami materiałowymi,  $\sigma$  oznacza tensor naprężeń Cauchy'ego,  $D^P$  tensor prędkości odkształceń plastycznych,  $J_1$  pierwszy niezmiennik tensora prędkości naprężeń, zaś  $\Xi_0$  skalarną funkcję materiałową wzrostu. W tym równaniu dwa pierwsze

człony opisują enukleację mikropustek, natomiast trzeci człon jest odpowiedzialny za ich wzrost.

Natomiast do opisu ewolucji mikrouszkodzeń ewentualną propozycją mogłoby być kinetyczne prawo Lemaitre i Chaboche [52, 53]:

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \dot{p}, \quad (8.6)$$

które oznacza, że przyrost uszkodzenia  $\dot{D}$  jest kontrolowany kumulowanym odkształceniem plastycznym  $\dot{p}$ . Jest to zasadne w przypadku materiałów ciągłych, w których rozwój uszkodzeń w zakresie sprężystym jest pomijalny. W równaniu (8.6)  $Y$  - siła termodynamiczna jest wyrażona poprzez naprężenie efektywne Hubera-von Misesa  $\sigma_{eq}$  i naprężenie hydrostatyczne  $\sigma_H$ :

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]. \quad (8.7)$$

gdzie:  $E$  - moduł Younga,  $\nu$  - współczynnik Poissona.

Z całą pewnością interesującym podejściem byłoby zastosowanie bardziej nowoczesnych metod, np. dynamiki molekularnej [74] opartej na mechanice kwantowej, w której badane jest zachowanie w czasie układu oddziałujących ze sobą atomów poprzez całkowanie ich równań ruchu. Jedną z dziedzin stosowania tej metody jest mianowicie mechanika pękania [59], umożliwiająca analizę w skali atomowej procesów pękania oraz zależności od różnych parametrów materiału jak i warunków zewnętrznych, w których materiał się znajduje.

---

## 9. Bibliografia

---

- [1] Ahmet N., Eraslan., 2003. Elastic–plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions. *Int. J. of Mech. Sci.*, 45 (4) , 643-667.
- [2] Andrade E.N., Da Costa, 1910. On the viscous flow in metals and allied phenomena, *Proc. Roy. Soc.* A84, 1-12.
- [3] Ansorg M., 2001. Differentially Rotating Disks of Dust: Arbitrary Rotation Law, *General Relativity and Gravitation*, 33(2), 309-338.
- [4] Ashby M. F., Frost H. J., 1982. Deformation mechanism maps, Pergamon Press, 3-30.
- [5] Bailey R.W., 1935. The utilization of creep test data in engineering design, *Inst. Mech. Eng. Proc.*, 191.
- [6] Bayat M, Saleem M, Sahari BB, Hamouda AMS, Mahdi E., 2008. Analysis of functionally graded rotating disks with variable thickness. *Mechanics Research Communications*, 35 (5), 283-309.
- [7] Bayat, M., Saleem, M., Sahari, B.B., Hamouda, A.M.S., Mahdi, E., 2000. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads, *Int. J. Press. Vess. Pipng.*, 86 (6), 357-372.
- [8] Betten J., 2001. Mathematical modelling of materials behaviour under creep conditions. *Appl. Mech. Rev.* 54 (2), 107-132.
- [9] Białkiewicz J., 1986. Dynamic creep rupture of a rotating disk of variable thickness. *Int. J. Mech. Sci.*, 28(10), 671-681.
- [10] Cantor G. 1874. Über eine Eigenschaft des Ingebriffes aller reelen algebraischen Zahlen. „*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*“, s. 258–262.
- [11] Cantor G., 1891. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. „*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*“, 75–78.

- [12] Çğallioğlu H., Topcu M., Tarakcilar AR., 2006. Elastic-plastic stress analysis on orthotropic rotating disc. *Intl J Mech. Sci.*, 48, 985-990.
- [13] Dems K., Mróz Z., 1992. Shape sensitivity analysis and optimal design of disks and plates with strong discontinuities of kinematic fields. *Int. J Solids Struct.*, 29(4), 437-463.
- [14] Dems K., Wiśniewski J., 2009. Optimal design of fiber-reinforced composite disks, *J.Theor. Appl. Mech.*, 47(3), 515-535.
- [15] Dorn J. E., 1955. Some fundamental experiments on high temperature creep, *J. Mech. Phys. Solids*, 3, 2, 85.
- [16] Dornowski, W., Perzyna, P., 2002. Analysis of various effects in dynamic cyclic fatigue damage, *Arch. Appl. Mech*, 72, 418 – 438.
- [17] Dornowski, W., Perzyna, P., 2002. Numerical analysis of macrocrack propagation along a bimaterial interface under dynamic loading processes, *Int. J Solids Struct.*, 39, 4949-4977.
- [18] Eraslan AN. 2003. Elastic–plastic deformation of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions. *Int. J Mech. Sci.*, 45, 643–67.
- [19] Eraslan A.N., Arges, H., 2002. Limit angular velocities of variable thickness rotating disks. *Int. J. Solids Struct.* 39, 3109–3130.
- [20] Eraslan A.N., Orcan Y., 2002. Elastic–plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness. *Mech. Mat.*, 34, 423–432.
- [21] Eraslan, A.N., Orcan, Y., 2002. On the rotating elastic–plastic solid disks of variable thickness having concave profiles. *Int. J. Mech. Sci.* 44,1445–1466.
- [22] Farshi B, Jahed H, Mehrabian A., 2004. Optimum design of inhomogeneous nonuniform rotating disks. *Int. J. Comp. Struct.*, 82, 773–779.
- [23] Farshi B., Bidabadi J., 2008. Optimum design of inhomogeneous rotating discs under secondary creep. *Int. J. Press. Vess. Pipng.* 85, 507-515.
- [24] Gamer, U., 1984. Elastic–plastic deformation of the rotating solid disk. *Ingenieur-Arch.* 54, 345–354.
- [25] Ganczarski A., Skrzypek J., 1976. Optimal shape of prestressed disks in creep. *J. Struct. Mech.*, 2, 141-160.
- [26] Garofalo F., 1965. *Fundamentals of creep and creep rupture in metals*, MacMillan, New York.
- [27] Genta G., Gola M., 1981. The stress distribution in orthotropic rotating disks, *J. Appl. Mech.*, 48, 559-562.

- [28] Golub V. P. 2005. Derivation of creep long-term fracture criteria under plane state of stress, *Int. J Mech. Sci.*, 47 (12), 1807-1826,
- [29] Golub V. P., Teteruk R. G., 1994. Evaluating the time to ductile fracture under creep conditions. *Int. Appl. Mech.*, 30 (11), 898–905.
- [30] Golub V. P., Romanov, A. V., Romanova, N. V., 2008. Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension. *Int. Appl. Mech.*, 44 ( 4), 459-470.
- [31] Grabovsky Y., 2001. Optimal design problems for two-phase conducting composites with weakly discontinuous objective functionals, *Adv. Appl. Math.*, 27, 683–704.
- [32] Gracham A., Walles K.F.A., 1955. Relation between long and short time properties of a commercial alloy, *J. Iron Steel Inst.*, 179.
- [33] Gun H., 2008. Two-dimensional boundary element analysis of creep continuum damage problems with plastic effects. *Comp. Mat. Sci.*, 41 (3), 322-329.
- [34] Gunneskov O., 1976. Optimal Design of Rotating Disks in Creep, *J. Struct. Mech.*, 4(2), 141-160.
- [35] Guven U., Elastic–plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density. *Int. J. Mech. Sci.*, 1992;34(2):133–8.
- [36] Hachemi A., Weichert D., 1997. Application of shakedown theory to damaging inelastic material under mechanical and thermal loads, *Int. Mech. Sci.*, 39 (9), 1067-1076.
- [37] Hao Ma G., Miyamoto H.Y., 2001. Limit angular velocity of rotating disc with unified yield criterion. *Int. J. Mech. Sci.* 43, 1137–1153.
- [38] Hayhurst D. R., 1972. Creep rupture under multi-axial states of stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 381-390.
- [39] Hoff N.J., 1953. The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 20 105–112.
- [40] Jahed H, Farshi B, Bidabadi J., 2005. Minimumweight design of inhomogeneous rotating discs. *Int. J. Press. Vess. Pipng.*, 82, 35–41.
- [41] Jahed, H., Shirazi, R., 2001. Loading and unloading behavior of thermoplastic disk. *Int. J. Press. Vess. Pipng.* 78, 637–645.
- [42] Jain R., Ramachandra K. and Simha K. R. Y., 2000. Singularity in rotating orthotropic discs and shells, *Int. J Solids Struct.*, 37, 2035-2058.
- [43] Jiang L., 2010. Optimal Design of Equipment for Al In-situ Composites Fabricated by Reaction Synthesis, *International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation*, 2, 832-836.

- [44] Johnson A. E., Henderson J., Khan B., 1962. Complex-stress creep, relaxation, and fracture of metallic alloys, H.M.S.O. Edinburg.
- [45] Kachanov L.M., 1960. Creep theory, Fizmatgiz, Moskwa,
- [46] Kachanov L. M., 1999. Rupture time under creep conditions. *Int. Journal of Fracture*. 97, xi-xviii.
- [47] Khoroshun L. P., 2007. Principles of the micromechanics of material damage. 1. Long-term damage, *Int. App. Mech.*, 43 (2), 217-227.
- [48] Kordkheili, S.A.H., Naghdabadi, R., 2007. Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. *Compos. Struct.* 79 (4), 508–516.
- [49] Kou X.Y., Parks G.T., Tan S.T., 2012. Optimal design of functionally graded materials using a procedural model and particle swarm optimisation, *Computer-Aided Design*, 44(4), 300-310.
- [50] Kowalewski Z.L., 2005. Zjawisko pełzania metali, Wydawnictwo Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, PAN, Warszawa.
- [51] Kulagin D.A., Lokoshchenko A.M., 2005, Analysis of the influence of aggressive environment on creep and creep rupture of rod under pure bending, *Arch. Appl. Mech.*, 74 ( 8), 518 – 525.
- [52] Lemaitre J., 1996. A course on damage mechanics, Published by Springer in Berlin, New York .
- [53] Lemaitre J., Desmorat R., 2005. Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures, Springer.
- [54] Ludwik P., 1909. Elemente der technologischen Mechanik, Springer, Berlin.
- [55] Martin J.B., Leckie F.A., 1972. On the creep rupture of structures, *J. Mech. Physics of Solids*, 20, 223-238.
- [56] Mentl V., 2006. An application of a phenomenological theory of creep damage, *Materials at High Temperatures*, 23, 195-200.
- [57] Mirsalimov V. M., 2007. Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft, *J. of Machinery Manufacture and Reliability*, 36 (1), 35-38.
- [58] Nadai A., 1938. The influence of time upon creep. The hyperbolic sine creep law Stephen Timoshenko 60<sup>th</sup> anniversary volume, MacMillan.
- [59] Nishimura K. i Miyazaki N., 2004. Molecular dynamics simulation of crack growth under cyclic loading. *Computational Materials Science*, 31, 269.
- [60] Norton F. H., 1929. Creep of steel at high temperatures, McGraw-Hill, New York.

- [61] Nowacki W.K., Nowak Z., Perzyna P., Pęcherski R.B., 2010. Effect of strain rate on ductile fracture. A new methodology, *J. Theor. Appl. Mech.*, 48, 4, 1003-1026.
- [62] Odqvist F.K.G., 1966. *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Carendon Press, Oxford.
- [63] Orcan, Y., Eraslan, A.N., 2002. Elastic–plastic stresses in linearly hardening rotating solid disks of variable thickness. *Mech. Res. Commun.* 29,269–281.
- [64] Pedersen, P., 2001. On the influence of boundary conditions, Poisson’s ratio and material non-linearity on the optimal shape, *Int. J. Solids Struct.*, 38(3), 465–477.
- [65] Pedersen, P., 2000. On optimal shapes in materials and structures. *Struct. Multidisc. Optim.*, 19:169-182.
- [66] Pedersen, P., 2004. Examples of density, orientation and shape optimal design for stiffness and/or strength with orthotropic materials. *Struct. Multidisc. Optim.*, 26, 37-49.
- [67] Pedersen, P., 2005. An optimality criterion for shape optimization in eigenfrequency problems. *Struct. Multidisc. Optim.*, 29(6): 457-469.
- [68] Pedersen, P., 2008. Suggested Benchmarks in shape optimization for minimum stress concentration. *Struct. Multidisc. Optim.*, 35:273-283.
- [69] Pei, Yong-Chen, He, Ling, Wang, Ji-Xin, 2010. Rotating flexible disk under shaft temperature increment, *Journal of Sound and Vibration*, 329 (17), 3550-3564.
- [70] Penny R.K., Ellison E.G., Webster G. A., 1968. Specimen alignment and strain measurement in axial creep tests, *ASTM Mat. Res. Stans.*, 6, 76.
- [71] Penny R.K., Marriot D.L., 1971. *Design for creep*, McGraw-Hill, Maiden-Head-Berkshire, England.
- [72] Perzyna P., 1981. Stability problems for inelastic solids with defects and imperfections. *Arch. Mech. Stos.* 33, 587-602.
- [73] Piechnik S., Chrzanowski M., 1970. Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending. *Int. J Solids Struct.*, 6 (4), 453-477.
- [74] Potirniche G.P., Horstemeyer M.F., Wagner G.J., Gullett P.M., 2006. A molecular dynamics study of void growth and coalescence in single crystal nickel, *Int. J. Plasticity*, 22, 257–278.
- [75] Reddy T. Y., Srinath H., 1974. Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density, *Int. J. Mech. Sci.*, 16 (2) 85-89.
- [76] Rees D.W.A., 1999. Elastic–plastic stresses in rotating disks by von Mises and Tresca. *ZAMM* 79, 281–288.



- [77] Rysz M., 1987. Optimal design of a thick-walled pipeline cross-section against creep rupture. *Acta Mechanica* 1(4), 83-102.
- [78] Seyranian A.P., Solem F., Pedersen, P., 2000. Multi-parameter linear periodic systems: Sensitivity analysis and applications, *J. of Sound and Vibration*, 229(1), 89-111,
- [79] Shimanovskii A. V., Shalinskii V. V., 2009. Physically and geometrically nonlinear deformation of bars: numerical analytic problem-solving, *Int. Appl. Mech.*, 45 (5), 572-577.
- [80] Skoczeń B., Ustrzycka A., 2012, Degradation of material properties due to radiation, raport projektu EUROnu, 43-51, <http://pc13.mech.pk.edu.pl/EUROnu>.
- [81] Soderberg C. R., 1936. The interpretation of creep tests for machine design, *Trans. ASME*, 58, 8.
- [82] Szuwalski K., 1989. Optimal design of bars under nonuniform tension with respect to ductile creep rupture. *Mech. Struct. Mach.* 3, 303-319.
- [83] Szuwalski K., 1991. Optymalne kształtowanie elementów konstrukcji z uwagi na czas zniszczenia ciągliwego w warunkach pełzania, Monografia Politechniki Krakowskiej nr 114, Kraków.
- [84] Szuwalski K., 1994. Optimal design of Mises truss with respect to time to creep rupture, *Engng. Trans.* 42, 145–155.
- [85] Szuwalski K., 1995. Nohomogeneous bars optimal with respect to ductile creep rupture, *Eng. Opt.* 25 54–60.
- [86] Szuwalski K., 1995. Optimal design of disks with respect to ductile creep rupture time, *Struct. Opt.* 10, 13–27.
- [87] Szuwalski K., 1997. Optimal design of structures with large deformations allowed for, *Eng. Opt.* 29, 417–427.
- [88] Szuwalski K., Ustrzycka U., 2009. Optimal design of conical disk with respect to ductile creep rupture time, *Czasopismo Techniczne*, 12, 85-95.
- [89] Szuwalski K., Ustrzycka A., 2012. Optimal design of bars under nonuniform tension with respect to mixed creep rupture time, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 47, 55-60.
- [90] Szuwalski K., Ustrzycka A., 2012. The Influence of Boundary Conditions on Optimal Shape of Annular Disk With Respect to Ductile Creep Rupture Time, *European J. Mech. A/Solids*, 37, 79-85.
- [91] Szuwalski K., Ustrzycka A., 2012. Optimal Design of Full Disks With Respect to Mixed Creep Rupture Time, *Acta Mechanica*, (artykuł w recenzji).
- [92] Taylor, G. I., 1934. *Proc. Roy. Soc. A*, 145, 362.

- [93] Tvergaard V., Nielsen K., L., 2010. Relations between a micro-mechanical model and a damage model for ductile failure in shear, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(9), 1243-1252.
- [94] Ustrzycka A., 2011. Optimal design of parabolic disk with respect to ductile creep rupture time, *Czasopismo Techniczne*, 15, 123-134.
- [95] Ustrzycka A., 2012. Simulation model of creeping process for annular disks, *Engineering Transactions*, (artykuł w recenzji).
- [96] Ustrzycka A., Szuwalski K., 2011. Optimal design with respect to mixed creep rupture time of bars under nonuniform tension, 9th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June 13 - 17, 2011, Shizuoka, Japan, [CD-ROM] .
- [97] Ustrzycka A., Szuwalski K., 2012. Optimal Design of Annular Disks With Respect to Mixed Creep Rupture Time, 8th European Mechanics Conference. 9-13 July, Graz, Austria.
- [98] Ustrzycka A., Szuwalski K., 2012. Optimal design of full disks with respect to mixed creep rupture time., 20-22 June, New Forest, UK, Optimum design of structures and materials in engineering XII, 125, 83-94.
- [99] Ustrzycka A., Szuwalski K., 2010. Uni- and bi- parametric optimization of annular disk with respect to ductile creep rupture time. 37th Solid Mechanics Conference, 290-291.
- [100] You, L.H., Tang, Y.Y., Zhang, J.J., Zheng, C.Y., 2000. Numerical analysis of elastic-plastic rotating disks with arbitrary variable thickness and density. *Int. J. Solids Struct.* 37, 7809-7820.
- [101] Vicat M., 1834. On the gradual elongation of iron wire under tension, In: *Measurement of high temperature mechanical properties of materials*, angielskie tłumaczenie, Loveday M. S., Day M. F., Dyson B. F., 9-12.
- [102] Vivio F., Vullo L., 2010. Elastic-plastic analysis of rotating disks having non-linearly variable thickness: residual stresses by overspeeding and service stress state reduction, *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 1(2), 87-102.
- [103] Vivio F., Vullo V., 2007. Elastic stress analysis of rotating converging conical disks subjected to thermal load and having variable density along the radius,. *Int. J Solids Struct.*, 44 (24), 7767-7784.
- [104] Zenkour, A.M., 2007. Elastic deformation of the rotating functionally graded annular disk with rigid casing, *Journal of Materials Science*, 43(23), 9717 - 9724.

- [105] Życzkowski M., 1971. Optimal structural design in rheology. J. Appl. Mech., 38, 1, 39 - 46.
- [106] Życzkowski M., 1988. Optimal structural design under creep conditions. Appl. Mech. Rev., 12, 453 - 461.
- [107] User manual, Maplesoft, Waterloo Maple Inc, 2010.
- [108] Introductory Programming Guide, Maplesoft, Waterloo Maple Inc, 2010.
- [109] Advanced Programming Guide, Maplesoft, Waterloo Maple Inc, 2010.