

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKA AKADEMIA NAUK

ROZPRAWA DOKTORSKA

Dynamika układów wielocząstkowych opadających
grawitacyjnie w lepkim płynie

Anna Myłyk

Rozprawa doktorska wykonana pod kierunkiem
dr hab. Marii Ekiel-Jeżewskiej prof. IPPT PAN
w Pracowni Fizyki Płynów Złożonych
Zakładzie Mechaniki i Fizyki Płynów
Instytutu Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

Warszawa 2012

Streszczenie

Zrozumienie istoty ruchu mikroukładów wielocząstkowych opadających grawitacyjnie w lepkim płynie wymaga zrozumienia oddziaływań hydrodynamicznych rządzących dynamiką mikrocząstek. Dzięki oddziaływaniom hydrodynamicznym cząstki opadające grawitacyjnie mogą w pewnych warunkach przez długi czas tworzyć zwarte grupy. Grupy wielu cząstek o przypadkowych układach będziemy dalej nazywały kroplami zawiesiny. W literaturze badane były takie układy w nieograniczonym lepkim płynie. W niniejszej pracy został przebadany wpływ płaskiej pionowej ściany na ewolucję kropli zawiesiny opadającej pod wpływem siły grawitacyjnej w lepkim płynie dla liczb Reynoldsa znacznie mniejszych od jedności. Płyn wewnątrz i na zewnątrz opadającej kropli był identyczny, a cząstki początkowo były przypadkowo rozmieszczone wewnątrz sferycznej objętości. Wykonano eksperymenty i symulacje numeryczne. W doświadczeniach badana była ewolucja kropeł złożonych z cząstek szklanych w glicerynie. Do obliczeń numerycznych zastosowano model cząstek punktowych. Zostały opracowane i zastosowane własne kody numeryczne do wyznaczenia ruchu wielu cząstek zarówno w obecności ściany, jak i w nieograniczonym płynie. W eksperymentach i symulacjach, ewolucja kropli opadającej przy ścianie wyglądała jakościowo podobnie jak w nieograniczonej przestrzeni płynu: krople podczas opadania gubiły cząstki, powoli spłaszczały się i rozszerzały, a potem nagle dzieliły się na dwa lub więcej fragmentów. Jednakże, zarówno eksperymentalnie, jak i numerycznie, stwierdzono, że w obecności ściany średni czas destabilizacji \bar{T} i średnia odległość \bar{L} przebyta przez opadającą kroplę zawiesiny aż do rozpadu są tym krótsze, im mniejsza jest odległość h od środka kropli do ściany. Dla h większego od średnicy kropli D zaobserwowano liniową zależność \bar{T} i \bar{L} od D/h . Pokazano, że czas i długość destabilizacji poszczególnych kropeł znacznie różnią się od siebie, nawet o rząd wielkości, co jest związane z chaotycznością dynamiki. Przeanalizowano także ewolucję kształtu kropli. W oparciu o model cząstek punktowych pokazano, że krople

początkowo bliskie ścianie, następnie nieco się od niej oddalają. Określono też jako funkcję czasu liczbę cząstek, które pozostają wewnątrz kropli. Wyniki uzyskane w rozprawie doktorskiej są ważne ponieważ pogłębiają naszą wiedzę na temat układów wielocząstkowych.

Abstract

Understanding the motion of multi-particle micro-systems settling under gravity in a viscous fluid requires understanding of the hydrodynamic interactions that govern the dynamics of microparticles. Owing to the hydrodynamic interactions, particles settling close to each other under gravity may create a cohesive group for a long time. Such a group which consists of a large number of randomly distributed particles will be called a suspension drop. In the literature, such systems have been studied in an unbounded viscous fluid. In the present work the impact of a flat vertical wall on the evolution of a suspension drop is investigated. The drop settles under the influence of the gravitational force in a viscous fluid at the Reynolds number much smaller than unity. The fluid inside and outside the falling drop was identical, and particles were initially randomly distributed inside a spherical volume. Experiments and numerical simulations were performed. In the experiment, the evolution of droplets composed of glass particles in glycerin was studied. For the numerical calculations the point-particle model was used. Numerical codes have been developed and implemented to calculate motion of a large number of particles, both in the presence of a wall and in an unbounded fluid. In the experiments and simulations the evolution of a drop settling close to the wall looked qualitatively similar to drop settling in unbounded fluid the drops were slowly losing their particles, flattening and widening themselves, and then they suddenly divided into two or more fragments. However, it has been found both experimentally and numerically that in the presence of the wall, the average destabilization time \bar{T} and the average distance \bar{L} traveled by the settling suspension drop until its destabilization, shortened as the distance h from the drop center to the wall was decreased. For h greater than the diameter D of the droplet, linear dependence of \bar{T} and \bar{L} on D/h was observed. It was shown that the time and length of destabilization for individual drops can differ significantly from each other, even by an order of magnitude, what is associated

with chaotic dynamics. The evolution of the droplet shape was also analyzed. In the point particle simulations it was shown that the droplets initially close to the wall, move away from the wall slightly. The number of particles that remain inside the drop during its evolution was determined as a function of time. The results obtained in the dissertation are important because they deepen our understanding of the multiparticulates systems.

*Składam serdeczne podziękowania
dr hab. Marii Ekiel-Jeżewskiej, prof. IPPT PAN
za poświęcony mi czas, za opiekę merytoryczną,
okazaną cierpliwość i cenne wskazówki.*

*Dziękuję również prof. Günter Brenn oraz dr Walter Meile
za udostępnienie laboratorium oraz pomoc w badaniach eksperymentalnych.*

*Szczególne podziękowania kieruję do swoich rodziców za to,
że dali mi szansę studiowania, wyjazdu do Warszawy
i otoczyli mnie ogromnym wsparciem.*

*Pisanie pracy to długotrwała czynność wymagająca wielkiej uwagi
i pewnych poświęceń. Właśnie dlatego chciałabym podziękować
Pawłowi za cenne wsparcie, wiarę, uwagi i cierpliwość.*

*Podziękowania kieruję również do wszystkich nie wymienionych tu z nazwiska,
którzy także przyczynili się do powstania tej rozprawy.*

Warszawa, 2012

Niniejsza Rozprawa Doktorska została częściowo sfinansowana w ramach grantu promotorskiego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr N N501 049340. Część wyników powstała w ramach EU COST Action P21 "Physics of droplets" oraz grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego 45/N-COST/2007/0.

Badania doświadczalne zostały przeprowadzone w Institute of Fluid Mechanics and Heat Transfer, University of Technology w Graz w ramach stypendium im. Uwe Schaflingera.

Obliczenia numeryczne wykonano w Akademickim Centrum Komputerowym w Gdańsku oraz w Zakładzie Mechaniki i Fizyki Płynów IPPT PAN.

Warszawa, 2012

Część rezultatów przedstawionych w Rozprawie została zawarta w publikacjach:

Anna Myłyk, Maria L. Ekiel-Jeżewska, "How walls influence destabilization of a suspension drop settling under gravity in a viscous fluid?", *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, **365**, 109-111 (2010).

Anna Myłyk, Walter Meile, Günter Brenn and Maria L. Ekiel-Jeżewska, "Break-up of suspension drops sedimenting in a viscous fluid close to a wall", *Phys. Fluids*, **23**, 063302 (2011).

Spis treści

Wstęp

I. Część doświadczalna

1. Czy pionowa ściana wpływa na destabilizację kropli zawiesiny opadającej grawitacyjnie w lepkim płynie?	22
1.1. Układ eksperymentalny	23
1.2. Wyniki w obecności i nieobecności ściany	27
1.2.1. Obserwacje ogólne	27
1.2.2. Długość destabilizacji dla ustalonego położenia początkowego	28
1.2.3. Średnia długość destabilizacji	31
1.3. Podsumowanie	32
2. Systematyczne pomiary czasów i długości destabilizacji	34
2.1. Metoda wykonania doświadczenia	35
2.1.1. Układ pomiarowy	35
2.1.2. Materiały użyte podczas prowadzenia badań eksperymentalnych	35
2.2. Wyniki eksperymentu	42
2.2.1. Obserwacje ogólne ewolucji kropli	42
2.2.2. Zależność czasu i długości destabilizacji od odległości od ściany	45
2.3. Podsumowanie	48

II. Opis teoretyczny i najważniejsze wyniki

3. Metoda rozwiązania równań Stokesa	51
3.1. Model cząstek punktowych	51
3.1.1. W nieograniczonym płynie	52
3.1.2. W płynie w pobliżu pionowej ściany	54
3.2. Porównanie ruchu cząstki punktowej i sferycznej przy ścianie	59

3.3. Model kropli zawiesiny	60
4. Najważniejsze wyniki	62
4.1. Długość i czas destabilizacji kropli jako funkcja odległości od ściany	62
4.2. Podsumowanie	65

III. Porównanie teorii i eksperymentu

5. Uproszczony opis kropli zawiesiny	68
6. Porównanie wyników teorii i eksperymentu	71

IV. Szczegółowa analiza ewolucji kropli zawiesiny

7. Wpływ początkowej liczby cząstek tworzących kroplę na czas i długość jej destabilizacji	79
8. Ewolucja kropli zawiesiny	85
8.1. Prędkość kropli	85
8.2. Prędkość kropli w chwili początkowej	85
8.3. Liczba cząstek wewnątrz kropli zawiesiny i prędkość w funkcji czasu	87
8.4. Oddalanie się kropli od ściany	90

V. Wnioski końcowe

Dodatki

A. Sposób ustawienia generatora kropli oraz procedura wykonywania pomiarów w doświadczeniu I.2	97
A.1. Ustawienie generatora	97
A.2. Procedura pomiarowa	100
B. Wyznaczenie nielosowych i statystycznych błędów w doświadczeniu I.2	102
C. Program numeryczny dla modelu cząstek punktowych	104
Spis literatury	108

Wstep

Przedmiotem pracy doktorskiej jest badanie dynamiki układu składającego się z wielu cząstek opadających grawitacyjnie w lepkim płynie. Charakter dynamiki zachodzącej w takim układzie zależy od skal czasowych, które zostaną teraz opisane.

Efekty ściśliwości.

Skala ta mówi o tym jaki czas jest potrzebny fali dźwiękowej aby rozeszła się ona na charakterystyczną odległość [1]:

$$\tau_c = \frac{a}{c}, \quad (1)$$

gdzie:

a - charakterystyczna skala długości,

c - prędkość dźwięku (w wodzie $c \sim 1500m/s$, w glicerynie $c \sim 1900m/s$).

Makroskopowy ruch płynu [2].

Skala związana z ruchem płynu opisana jest przez:

$$\tau_H = \frac{a}{V}, \quad (2)$$

gdzie:

V - prędkość płynu.

W szczególności jeśli w płynie porusza się cząstka o promieniu a , to skala czasu związana z ruchem tej cząstki jest opisana zgodnie ze wzorem (2), przy czym V jest teraz prędkością cząstki w płynie.

Bezwładność cząstek [1, 2].

Skala bezwładności cząstek mówi o tym, jak szybko ruch cząstki, która porusza się w płynie jest wytłumiany przez ten płyn, czyli jak szybko dochodzi do równowagi pomiędzy działającymi na nią siłami (grawitacyjną, wyporu i hydrodynamiczną).

Skala ta, czyli czas relaksacji prędkości cząstki, określona jest jako:

$$\tau_B = \frac{M}{\zeta}. \quad (3)$$

gdzie:

M - masa cząstki,

ζ - współczynnik oporu hydrodynamicznego cząstki [2].

Czas Stokesa.

Dla czasów $t \gg t_B$ duża izolowana cząstka kulista porusza się pod wpływem siły F z prędkością V_0 daną prawem Stokesa [3]:

$$V_0 = \frac{F}{6\pi\eta a}. \quad (4)$$

Jeśli siła F jest siłą grawitacji, to:

$$V_0 = \frac{2(\rho_p - \rho)a^2g}{9\eta}, \quad (5)$$

gdzie:

ρ_p - gęstość cząstek,

ρ - gęstość płynu,

η - lepkość płynu,

g - przyspieszenie grawitacyjne.

Czas Stokesa jest to czas jaki cząstka poruszająca się z prędkością V_0 potrzebuje na przemieszczenie się w lepkim płynie na odległość równą średnicy:

$$\tau_S = \frac{2a}{V_0}. \quad (6)$$

Czas lepkiej relaksacji płynu [1].

$$\tau_V = \frac{\rho a^2}{\eta}. \quad (7)$$

Mówi jak szybko hamuje element płynu o rozmiarze a .

Czas relaksacji strukturalnej [1, 4].

Mówi o tym ile czasu potrzebuje cząstka Browna żeby jej średnie przesunięcie kwadratowe było równe kwadratowi jej promienia

$$\tau_R = \frac{a^2}{D}, \quad (8)$$

gdzie:

$$D = \frac{k_B T}{\zeta} \quad (9)$$

jest stałą dyfuzji pojedynczej cząstki: k_B jest stałą Boltzmannna $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$, natomiast ζ - współczynnik oporu hydrodynamicznego [2].

Na podstawie powyżej zdefiniowanych skal czasowych, w naturalny sposób definiuje się liczby bezwymiarowe takie jak:

Liczba Macha [5]

Za pomocą skali czasu związanej z efektami ściśliwości oraz ruchem płynu można określić:

$$Ma = \frac{\tau_c}{\tau_H} = \frac{V}{c}. \quad (10)$$

Jeśli liczba Macha jest dużo mniejsza od jedności wówczas przepływ jest nieściśliwy.

Liczba Reynoldsa

Za pomocą czasów lepkiej relaksacji i ruchu płynu można określić liczbę Reynoldsa:

$$Re = \frac{\tau_V}{\tau_H} = \frac{\rho Va}{\eta}. \quad (11)$$

Liczba Reynoldsa [5, 6] można również interpretować jako stosunek sił bezwładności do sił lepkich.

Liczba Pecleta

Aby określić wpływ ruchów Browna, które są ruchami termicznymi, wyznacza się liczbę Pecleta [2] równą:

$$Pe = \frac{\tau_R}{\tau_H} = \frac{Va}{D}. \quad (12)$$

Jeżeli czas τ_R jest bardzo duży w porównaniu do czasu τ_H czyli gdy liczba $Pe \gg 1$, to ruchy Browna nie mają istotnego wpływu na dynamikę cząstek.

Na podstawie wyżej opisanych skal i liczb bezwymiarowych, przedstawione zostaną przykładowe rzędy wielkości parametrów opisujących ruch cząstek o różnych rozmiarach poruszających się grawitacyjnie w płynie lepkim. Do obliczeń przyjęto gęstość cząstek równą 1300 kg/m^3 np. cząstki pochodzenia biologicznego, gęstość

płynu - wody 1000 kg/m^3 oraz gliceryny 1200 kg/m^3 . Lepkość wody ($T = 25^\circ\text{C}$) $0,89 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ oraz gliceryny ($T = 25^\circ\text{C}$) $934 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Obliczenie poszczególnych skal zostanie wykonane dla wody z powodu jej powszechnego zastosowania i znaczenia w życiu człowieka. Natomiast wartości skal czasowych cząstek poruszających się w glicerynie zostały tu ujęte z tego powodu, że wszystkie doświadczenia wykonane w ramach tej rozprawy zostały przeprowadzone w glicerynie. Biorąc pod

$a[\mu\text{m}]$	$\tau_c[\text{s}]$	$\tau_H[\text{s}]$	$\tau_S[\text{s}]$	$\tau_B[\text{s}]$	$\tau_V[\text{s}]$	$\tau_R[\text{s}]$	$V_0[\text{m/s}]$
Dla wody							
1	10^{-9}	1	1	10^{-7}	10^{-6}	1	10^{-6}
10	10^{-8}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-5}	10^{-4}	10^4	10^{-4}
100	10^{-7}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^6	10^{-2}
Dla gliceryny							
1	10^{-9}	10^4	10^4	10^{-10}	10^{-9}	10^4	10^{-10}
10	10^{-8}	10^3	10^3	10^{-8}	10^{-7}	10^6	10^{-8}
100	10^{-7}	10^2	10^2	10^{-6}	10^{-5}	10^9	10^{-6}

Tabela 1. Skale czasowe dla cząstki o promieniu a .

uwagę wartości umieszczone w tabeli 1 oszacowano wartości bezwymiarowych liczb opisujących ruch cząstek (patrz tabela 2).

$a[\mu\text{m}]$	Ma	Re	Pe
Dla wody			
1	10^{-9}	10^{-6}	1
10	10^{-7}	10^{-3}	10^5
100	10^{-5}	1	10^8
Dla gliceryny			
1	10^{-12}	10^{-13}	1
10	10^{-10}	10^{-10}	10^4
100	10^{-8}	10^{-7}	10^8

Tabela 2. Przykładowe wartości liczb bezwymiarowych dla cząstki o promieniu a .

Na podstawie Tab. 1 oraz Tab. 2, widzimy że dla tak dobranych przykładowych parametrów liczba Ma jest bardzo mała, natomiast liczba Re jest znacznie mniejsza od 1 przy $a \lesssim 10\mu\text{m}$. Dla $a = 1\mu\text{m}$ widać ruchy Browna, wystarczy poczekać 4s w przypadku wody by je zobaczyć.

Rozprawa doktorska została poświęcona układom o liczbach Reynoldsa znacznie mniejszym od jedności, układom cząstek, które nie wykonują ruchów Browna i generujących przepływy z liczbą Macha znacznie mniejszą od jedności (płyn nieściśliwy).

W niniejszej pracy bardzo często używane jest pojęcie lepkości. Lepkość [5, 7, 8, 9] wiąże się ze zdolnością cieczy do stawiania oporu przy wzajemnym przemieszczaniu się elementów płynu względem siebie. Lepkość dynamiczna η to stosunek naprężeń ścinających do szybkości ścinania [5]. Lepkość kinematyczna dana jest wzorem:

$$\nu = \eta/\rho \quad (13)$$

Przepływ lepkiego płynu opisany jest za pomocą wektorowego pola prędkości $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ oraz skalarne go pola ciśnienia $p(\mathbf{r}, t)$. Ruch lepkiego i nieściśliwego płynu jest opisany równaniami Naviera-Stokesa postaci:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\nabla p(\mathbf{r}, t)}{\rho} + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

Znaczenie członów równań (14) jest następujące:

$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ - przyspieszenie elementu płynu o jednostkowej masie,
 $-\frac{\nabla p(\mathbf{r}, t)}{\rho}$ - siły ciśnienia na jednostkę masy płynu,
 $\nu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ - siła na jednostkę masy pochodząca od lepkości płynu,
 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ - siła grawitacyjna na jednostkę masy płynu.

W niniejszej pracy doktorskiej zakładamy, że siły bezwładności są zaniedbywalne, $Re \ll 1$, a przepływ nie zmienia się szybko w czasie. Wtedy równanie ruchu cieczy lepkiej (14) sprowadza się do równania Stokesa [2, 5, 7, 8, 10], postaci:

$$\begin{cases} -\frac{\nabla p(\mathbf{r}, t)}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

W pracy badany był następujący układ: grupa cząstek o gęstości większej od gęstości płynu umieszczona w płynie, który jednej strony został ograniczony sztywną

pionową ścianką. Początkowo cząstki rozmieszczono przypadkowo wewnątrz kuliste-
 go obszaru. Układ taki modeluje kroplę zawiesiny bez napięcia powierzchniowego
 (płyn wewnątrz kropli jest taki sam jak na zewnątrz). Badana była dynamika takiej
 kropli zawiesiny.

W naturze występuje wiele podobnych układów, dlatego poznanie oddziaływań
 hydrodynamicznych [8] zachodzących wewnątrz takiej kropli zawiesiny jest bardzo
 ważne. Już w 1885 interesowano się tym zagadnieniem [11]. Starano się zrozumieć
 jak i dlaczego krople zawiesiny opadające grawitacyjnie rozpadają się w pewien
 specyficzny sposób. Thomson w swojej pracy [11] rozważa zachowanie się kropli
 atramentu opadającej pod wpływem grawitacji w wodzie. Obserwował on że kropla
 podczas opadania spłaszczała się tak, że robił się torus, który stawał się coraz cieńszy,
 po czym destabilizował się tzn. dzieliła się na mniejsze (patrz Rys. 1 w [11]). Ewolucję
 kropli zawiesiny opadającej w lepkim płynie badano później w wielu pracach [11,
 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

W pracach [12, 13] przedstawiono stacjonarne rozwiązanie dla pola prędkości
 wewnątrz i na zewnątrz kropli, która ma gęstość inną niż płyn. Stacjonarność roz-
 wiązania jest słuszna, jeśli mówimy o polu prędkości w układzie współporuszającym
 się z cząstką. Równania stacjonarne dla kropli zawiesiny zostały pokazane w pracach
 [16, 18, 22, 23].

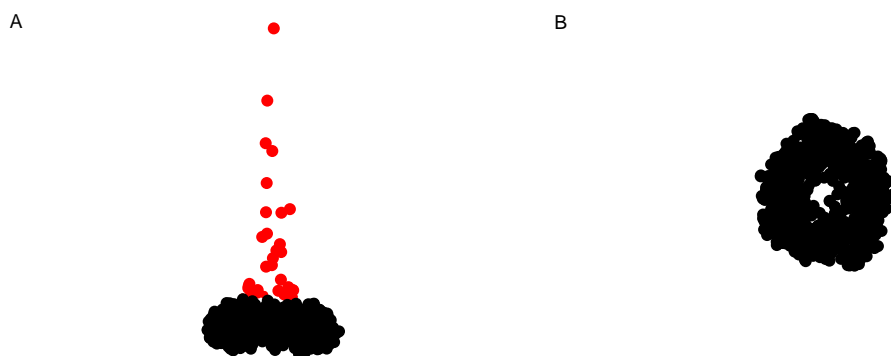
W pracy Adachi, Kiriya i Yoshioka [14] po raz pierwszy zastosowano model
 cząstek punktowych do badania dynamiki opadania początkowo sferycznej cząstki
 zawiesiny. Model ten został później użyty w pracach [15, 16, 17]. W szczególności
 w pracy [16] przeprowadzona została analiza liczby cząstek uciekających z kropli w
 funkcji czasu. W pracy [17] badano między innymi ewolucję kształtu kropli, tak-
 że dla niesferycznych początkowych kształtów kropli. W tej pracy przeprowadzono
 także badania eksperymentalne z wykorzystaniem metody PIV, z bardzo dokładnie
 określonym początkowym kształtem kropli, natomiast symulacje wykonano metodą
 cząstek punktowych. W pracy [21] numerycznie przebadano destabilizację kropel
 przy większych liczbach Reynoldsa (w zakresie od 1 do 100); w tej pracy skorzysta-
 no z przybliżenia Eulerian-Lagrangina dla przepływu cząstek stałych. Szczegółowe

badania w pracy [15] zostały przeprowadzone z użyciem modelu cząstek punktowych, a następnie wyniki numeryczne porównano z wynikami eksperymentu.

Dynamika opadania kropli zawiesiny była obliczana z wykorzystaniem różnych technik numerycznych do rozwiązywania równania ruchu płynu: model cząstek punktowych [15, 17, 17, 16, 14, 18] lub przybliżenie Rotne-Pragera [19], czy też metoda lattice-Boltzmann [24], metoda spektralna [21].

Na podstawie wyników numerycznych i eksperymentalnych [14, 15, 16, 17, 19] wiemy, że wewnątrz kropli zawiesiny opadającej w cieczy lepkiej pod wpływem gravitacji cząstki wykonują ruchy wirowe. Przy liczbach Reynoldsa znacznie mniejszych od jedności podczas takiego opadania i ruchów wirowych od kropli odrywają się cząstki. Oderwane cząstki poruszają się wolniej niż kropla, tworząc za opadającą kroplą "ogon" (patrz Rys. 1). Kropla spłaszcza się i rozszerza tworząc torus. (Jeśli popatrzy się na kroplę od góry widoczna jest dziura, patrz Rys. 1.) W pewnym momencie torus zaczyna się przeginać i destabilizuje się, czyli rozpada się na dwie bądź więcej części (mniejsze krople). Moment pęknięcia torusa jest nazwany momentem destabilizacji. Odległość jaką musi pokonać kropla zanim się zdestabilizuje jest zwykle kilkaset razy większa od jej średnicy. Interesującą cechą procesu sedymentacji jest to, że ruch cząstek wewnątrz opadającej kropli jest taki, że zwarta grupa pozostaje razem przez długi czas [11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25].

Istotne jest, aby określić odległość jaką musi pokonać opadająca kropla do pierwszej destabilizacji oraz czas pierwszej destabilizacji. Przewidzenie momentu rozpadu grupy i długości destabilizacji ma znaczenie nie tylko poznawcze [8, 10, 26, 27], ale także praktyczne. W takich zastosowaniach jak filtracja, technologia produkcji żywności, produkcja cukru, sedymentacja, zastosowaniach medycznych (np. ruch krwinek, zastosowanie pęcherzyków w diagnostyce ultrasonograficznej, osadzanie się cząstek w drogach oddechowych, transport leków wdychanych poprzez drogi oddechowe, transport dymu papierosowego w płucach [28] czy wiązanie wody w naskórku za pomocą kwasu hialuronowego [29]), ruchu kolonii mikroorganizmów, ruchu glonów



Rysunek 1. Ewolucja kropli zawiesiny złożonej z cząstek punktowych w dwóch rzutach: A. Widok z boku: Czerwonym kolorem zaznaczony został ogon odrywających się cząstek. Na rysunku B widoczna jest kropla od góry z widoczną dziurą torusa.

czy bakterii [30, 31, 32], wydobywanie ropy naftowej, czy też w geologii [33, 34, 35, 36] oraz do opisu plazmy [37].

Czy ewolucja kropli i parametry opisujące destabilizację zmieniają się jeśli płyn ograniczymy płaską sztywą ścianką? Odpowiedź na to pytanie znajdują się w niniejszej rozprawie. W rozprawie skoncentrowano się na procesie ewolucji kropli do momentu destabilizacji, inaczej mówiąc do momentu pierwszego rozpadu. Przedmiotem zainteresowania jest zmiana kształtu grupy oraz czas, droga i sposób destabilizacji. Przeanalizowana została zależność dynamiki grupy od jej odległości od ściany. Zbadano także ewolucję kształtu kropli i prędkości cząstek, zmianę w czasie liczby cząstek wewnątrz kropli.

Rozprawa doktorska ma następującą strukturę:

I - Część doświadczalna. Doświadczenie zostało wykonane w układzie, w którym obserwację opadających kropeł zawiesiny prowadzono w akwarium wypełnionym gliceryną. Opisane zostały doświadczenia, w których odległość przebyta przez opadającą grupę cząstek do momentu destabilizacji oraz czas destabilizacji zostały zmierzone i uśrednione po liczbie eksperymentów. Wyniki wskazują, że

w obecności ściany czas i długość destabilizacji są krótsze niż w nieograniczonym płynie.

II - Opis teoretyczny i najważniejsze wyniki. Obliczenia przeprowadzone zostały dla modelu cząstek punktowych, w oparciu o podany przez Blake'a tensor Greena dla równań Stokesa z warunkiem brzegowym przylegania płynu do powierzchni pionowej ściany. Funkcja Greena została wdrożona numerycznie we własnych programach obliczeniowych w środowisku MATLAB. Model punktowy sprowadzono do postaci niezależnej od promienia cząstki, co znacznie ułatwiło analizę podstawowych cech charakterystycznych dynamiki. Wiadomo z literatury, że dla płynu nieograniczonego model cząstek punktowych dobrze odwzorowuje dane doświadczalne. Model cząstek punktowych opadających przy pionowej ścianie jest zatem użytecznym narzędziem do analizy postawionego problemu. Najważniejszym wynikiem w tej części pracy jest pokazanie wpływu płaskiej pionowej ściany na czas i długość destabilizacji. Mianowicie, kropla opadająca przy ścianie destabilizuje się średnio szybciej niż w nieograniczonej przestrzeni płynu, pokonując średnio mniejszą odległość.

III - Porównanie wyników teoretycznych i eksperymentalnych. Dokonano porównania danych numerycznych z danymi pochodzącymi z doświadczeń. Pokazano skalowanie dla średnich wartości czasu i długości destabilizacji oraz zbadano ich rozkłady statystyczne.

IV - Szczegółowe modelowanie ewolucji kropli zawiesiny. Zostały przeprowadzone i porównane ze sobą wyniki uzyskane dla dwóch początkowych liczb cząstek wewnątrz kropli $N_0 = 1000$ i $N_0 = 700$. Zbadana została zależność liczby cząstek pozostających w grupie oraz prędkość tej grupy od czasu. Określono kiedy i jak opadająca kropla oddala się od ściany.

Wnioski końcowe. W tej części pracy zostało zawarte podsumowanie najważniejszych wyników rozprawy.

Część I

Część doświadczalna

1. Czy pionowa ściana wpływa na destabilizację kropli zawiesiny opadającej grawitacyjnie w lepkim płynie?

Celem tej części pracy jest doświadczalne pokazanie wpływu jednej albo dwóch pionowych równoległych ścian na proces destabilizacji kropli zawiesiny. Pojęcie kropli zawiesiny będzie tu wymiennie stosowane z pojęciem układu wielu cząstek, (co zostało już omówione we wstępie).

Przeprowadzono doświadczenie polegające na obserwacji krotek zawiesiny spadających pod wpływem grawitacji w lepkim płynie. Zostało ono przeprowadzone w laboratorium Zakładu Mechaniki i Fizyki Płynów IPPT PAN.

Podczas tego prostego doświadczenia badany był proces destabilizacji kropli opadającej grawitacyjnie w lepkim płynie (w glicerynie) daleko od ścianek, blisko jednej lub dwóch równoległych ścian pionowych. Kropla była spuszczana z nad powierzchni swobodnej, przekraczała tę powierzchnię płynu, jej kształt powoli się zmieniał a następnie kropla destabilizowała się. Mierzona była długość destabilizacji, którą zdefiniowano jako odległość, jaką musi pokonać kropla zawiesiny od powierzchni swobodnej do chwili podzielenia się. Wynik tego doświadczenia pokazał nam, że obecność ściany ma bardzo istotny wpływ na średnią długość destabilizacji, która jest krótsza w porównaniu z długością destabilizacji takiej samej kropli zawiesiny bardzo daleko od ściany. Eksperyment ten został opisany w naszej publikacji [38].

1.1. Układ eksperymentalny

Doświadczenie zostało wykonane w szklanym izolowanym pojemniku o wymiarach podstawy $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ i wysokości 40cm (patrz Rys. 1.1). Grubość ściany wynosiła 0.5cm . Pojemnik był wypełniony 97% gliceryną o gęstości $\rho = 1.25 \pm 0.01\text{g/cm}^3$ i temperaturze $T \approx 28^\circ\text{C}$ i lepkości $\eta = 345 \cdot 10^{-3}\text{kg/m} \cdot \text{s}$. Gęstość została wyznaczona poprzez pomiar masy m i objętości próbki gliceryny V zgodnie ze wzorem:

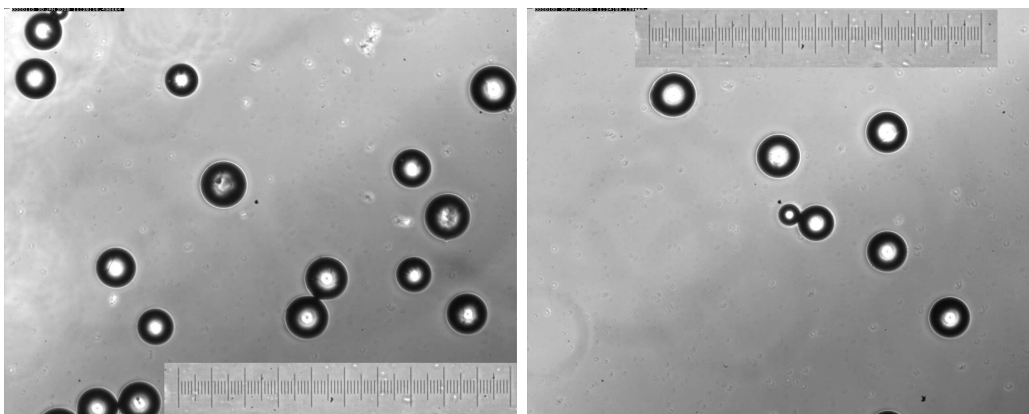
$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (1.1)$$

gdzie: $m = 12.513 \pm 0.001\text{g}$ oraz $V = 10 \pm 0.1\text{ml}$.



Rysunek 1.1. Zdjęcie układu doświadczalnego. Po stronie lewej pokazany został pojemnik, w którym był wykonywany eksperyment. Po prawej stronie widoczne są 2 przykładowe zdjęcia w początkowym etapie ewolucji kropli zawiesiny cząstek szklanych opadających w glicerynie.

Zawiesina wykonana była z cząstek szklanych o promieniach $a = 44 - 68\mu\text{m}$ i gęstości $\rho_P = (2.50 \pm 0.02)\text{g/cm}^3$. Promienie cząstek zostały wyznaczone na podstawie



Rysunek 1.2. Mikroskopowe obrazy próbek szklanych cząstek, pod nieobecność płynu. Cały zakres skali = 1mm.

obrazu mikroskopowego przypadkowo zebranej próbki, przykład widoczny na Rys. 1.2.

Gęstość cząstek wyznaczona została metodą piknometryczną¹

¹ Metoda piknometryczna [39, 40] polega na wyznaczeniu gęstości próbki ρ_P na podstawie porównania masy i objętości próbki badanej substancji z masą takiej samej objętości wody w tej samej temperaturze. Nazwa metody pochodzi od aparatu, w którym wykonany jest pomiar. Jest to naczynie szklane z termometrem, w bocznej ścianie naczynia znajduje się rurka włoskowata, przez którą może wypływać nadmiar cieczy. Za pomocą wagi analitycznej wykonano 4 następujące pomiary wagowe. Zmierzone masę samego piknometrze otrzymując $m_N = 39.45g$, masę piknometrze wypełnionego w całości wodą destylowaną ($m_W = 141.71g$). Następnie piknometr został dokładnie opróżniony i wysuszony. Badane kuleczki szklane zostały umieszczone w piknometrze (masa cząstek szklanych z piknometrem ($m_C = 89.00g$)), tak że zajmowały one około 1/2 jego objętości (zważono piknometr z cząstkami). Następnie dolano wody destylowanej do pełna. Zmierzone masę całości równą $m_{CW} = 171.47g$. Masa cząstek szklanych:

$$M_P = m_C - m_N = 49.55g$$

Gęstość wody wynosi: $\rho_W(T = 24^\circ C) = 0.99732g/cm^3$.

Masę cząstek można również opisać zależnością:

$$M_P = m_{CW} - (m_W - V_P \rho_W).$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$V_P = \frac{M_P + m_W - m_{CW}}{\rho_W}.$$

Natomiast gęstość cząstek opisana jest:

$$\rho_P = \frac{M_P}{V_P} = \rho_W \frac{M_P}{M_P + m_W - m_{CW}}.$$

Cząstki zostały wymieszane z 97% gliceryną (był to taki sam płyn jak w akwarium). Chcieliśmy uzyskać dużą wartość ułamka objętościowego zdefiniowanego wzorem:

$$\phi = \frac{V_P}{V_P + V}. \quad (1.2)$$

gdzie:

V_P - objętość cząstek szklanych użytych do wykonania zawiesiny,

V - objętość gliceryny użyta do wykonania zawiesiny.

Wzięta więc została próbka gliceryny, następnie zmierzono jej masę co dało objętość gliceryny $V = M/\rho = (1.764 \pm 0.001)cm^3$. Znając objętość gliceryny oraz gęstość cząstek, wyznaczono masę cząstek jaką należy dosypać aby ułamek był zgodny z założeniem $\phi = 0.44$ co dane jest wzorem:

$$M_P = \frac{\phi V \rho_P}{(1 - \phi)}. \quad (1.3)$$

Z tak wykonanej zawiesiny o ułamku objętościowym równym $\phi = 0.44$ tworzone były krople. Zawiesina cząstek znajdowała się w pojemniku z którego za pomocą igły była nabierana niewielka ilość zawiesiny i tworzone były krople, które opadały w pojemniku wypełnionym gliceryną.

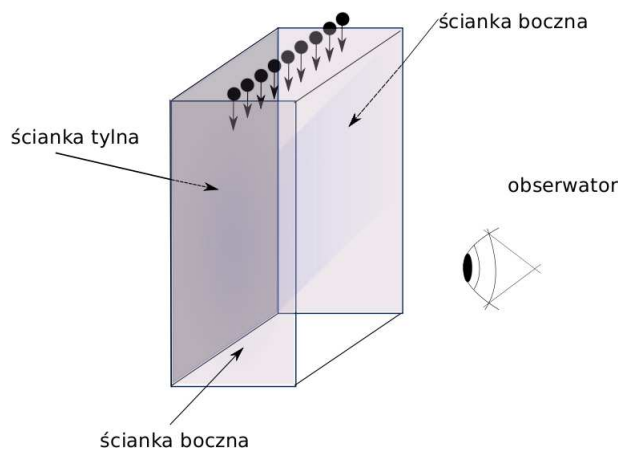
Typowy rozmiar opadającej kropli zawiesiny określony na podstawie obserwacji wyniósł $D = 1-2mm$. Na tej podstawie oszacowano liczbę cząstek zawiesiny w kropli zgodnie ze wzorem $N_0 = \phi(D/2a)^3$, gdzie $a = 44 - 68\mu m$, więc $N_0 \cong 150 - 5000$, a wyniki przedstawiono w tabeli 1.1.

D \ a	44 μm	68 μm
1 mm	$N_0 = 645$	$N_0 = 175$
2 mm	$N_0 = 5165$	$N_0 = 1399$

Tabela 1.1. Oszacowanie liczby cząstek w kroplach o średnicy D.

Liczba Reynoldsa zdefiniowana równaniem (10) wyniosła $Re \approx 7 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot 10^{-3}$. Wyznaczając liczbę Reynoldsa, jako l przyjęto średni promień kropli zawiesiny $l = D/2 = 7.5 \cdot 10^{-4}m$, za zakres wartości prędkości kropli zawiesiny przyjęto prę-

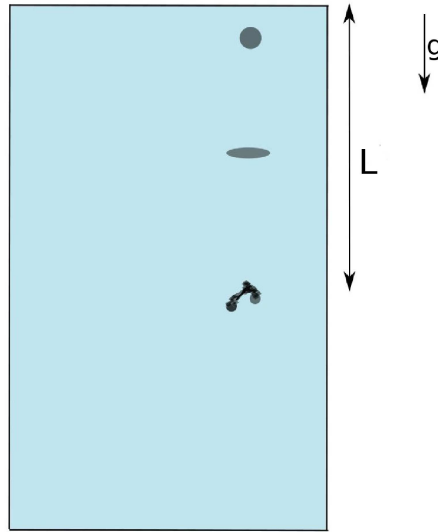
kość wyznaczoną na podstawie uzyskanych zdjęć: $v = (2 \cdot 10^{-4}; 1 \cdot 10^{-3}) m/s$. Lepkość dynamiczna gliceryny i jej gęstość zostały podane na początku rozdziału.



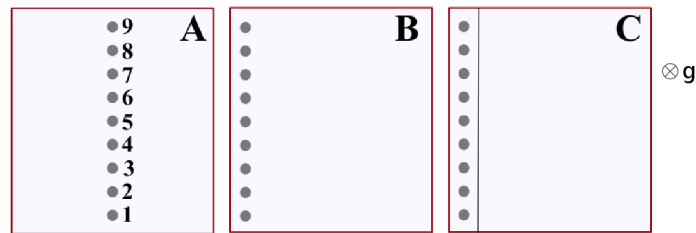
Rysunek 1.3. Obraz poglądowy sposobu wykonania eksperymentu.

Doświadczenie przeprowadzono w sposób przedstawiony na Rys. 1.3. Krople zawiesziny tworzone za pomocą igły kolejno spuszczałyśmy nad powierzchnią swobodną tak, że patrząc na układ z góry widzieliśmy, że krople układają się w płaszczyźnie pionowej, równoległej od ścianki tylnej. Położenia początkowe kropeł znajdowały się w odstępach 2 cm zaczynając od ścianki bocznej. W jednym eksperymencie obserwowaliśmy 9 kropeł zawiesziny, (patrz Rys. 1.3). Krople były spuszczone w mniej więcej równych odstępach czasu. Obserwacja ewolucji opadających pod wpływem grawitacji kropeł była prowadzona przez przednią ściankę akwarium. Podziałka umieszczona na ścianie tylnej służyła wyznaczeniu położenia kropli w chwili destabilizacji.

Długość L jaką pokonała kropla od powierzchni swobodnej do momentu destabilizacji nazywamy długością destabilizacji. Pojęcie długości destabilizacji zostało również przedstawione graficznie na Rys. 1.4. Doświadczenia zostały przeprowadzone w trzech różnych geometriach, przedstawionych schematycznie na Rys. 1.5. W pierwszym przypadku kropla zawiesziny cząstek spada w środku pojemnika daleko od ścian bocznych. W drugim przypadku kropla zawiesziny opada blisko jednej ze ścian bocznych, generowane krople są oddalone od tej ściany bocznej o 1 cm . W trzecim przypadku w akwarium została umieszczona dodatkowa równoległa ściana tak, że



Rysunek 1.4. Schemat eksperymentu: Celem było mierzenie długości destabilizacji L .



Rysunek 1.5. Ilustracja trzech doświadczeń (widok z góry). Zaznaczono położenia, gdzie były generowane krople zawiesiny podczas każdego z eksperymentów. A) daleko od ścian bocznych, B) blisko jednej ściany, C) pomiędzy dwiema równoległymi ścianami.

opadające krople znajdowały się w odległości 1cm od każdej ze ścian bocznych. Obserwowana była ewolucja kropli, a długość destabilizacji L zmierzona została na podstawie skali na ścianie tylnej.

1.2. Wyniki w obecności i nieobecności ściany

1.2.1. Obserwacje ogólne

Każdy z eksperymentów wykonaliśmy wielokrotnie: $N = 9$ razy dla przypadku ruchu kropli daleko od ścian bocznych, $N = 20$ w przypadku jednej ściany i $N = 20$ dla dwóch ścian bocznych. We wszystkich przypadkach ewolucja kształtu kropli była jakościowo podobna. Kropla zawieszona na początku była sferyczna, gubiła cząstki,

które tworzyły za nią wąski ”ogon”. Prędkość pojedynczej cząstki jest mniejsza niż prędkość grupy cząstek. Dlatego pojedyncze cząstki zostają z tyłu za kroplą. Kropla zawieszona powoli spłaszczyła się i rozszerzała. W miarę tego procesu wewnątrz kropli (patrz od góry) można było zauważyć dziurę. Kropla przybierała kształt torusa, nagle torus ten ”łamał się”, zazwyczaj na dwie części, z których każda tworzyła potem kulistą kropelkę. Środek opadającej kropli w chwili $t = 0$ znajdował się $\sim 1\text{cm}$ nad powierzchnią swobodną (patrz Rys. 1.5).

Moment, w którym kropla zaczęła się dzielić na dwie bądź więcej kropeł nazywany jest momentem destabilizacji. Długość destabilizacji kropli L była mierzona jako odległość między powierzchnią swobodną płynu a środkiem kropli w momencie destabilizacji. Podziałka była wyskalowana tak, że zero było na powierzchni swobodnej. Mierzyliśmy jaką drogę przebyła kropla do momentu destabilizacji względem powierzchni swobodnej.

Celem badań było sprawdzenie, czy długość destabilizacji charakteryzująca proces ewolucji w obecności ścian różni się od przypadku bez ścian. Skupiliśmy się na porównaniu średniej długości destabilizacji dla przypadku kropeł opadających daleko od ściany, w pobliżu pojedynczej ściany bocznej oraz dwóch ścian bocznych. Zachowano te same warunki eksperymentu dla każdej z trzech geometrii. Badaliśmy czy różnice w wynikach eksperymentu przekraczają rozrzut statystyczny. Stwierdzenie, czy istnieje taka różnica pomiędzy długością destabilizacji dla przypadków ze ścianą oraz bez niej, jest podstawą aby dokładniej badać ten proces zarówno eksperymentalnie jak i numerycznie.

1.2.2. Długość destabilizacji dla ustalonego położenia początkowego

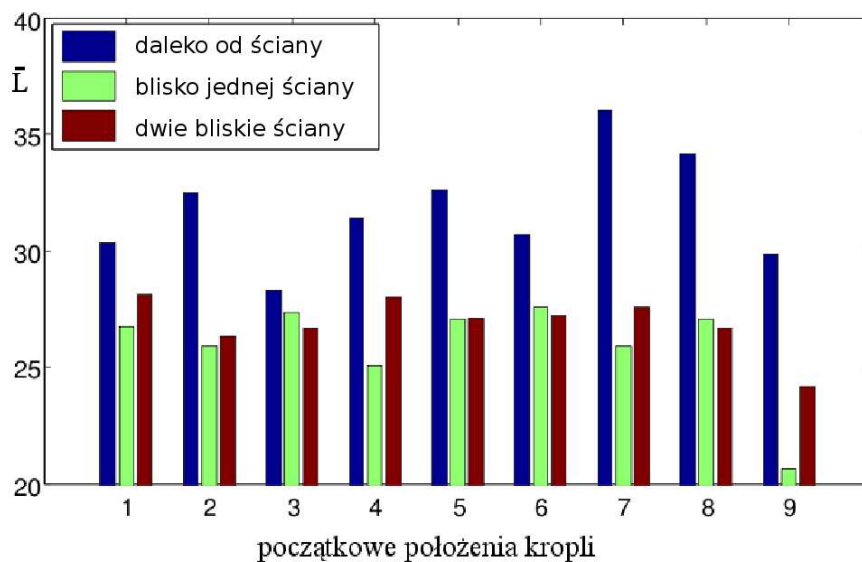
Każdy eksperyment polegał na spuszczeniu N - krotnie dziewięciu kropeł w ustalonych dziewięciu położeniach początkowych. Przy ustalonej geometrii dla każdego początkowego położenia kropli uśredniono wartości długości destabilizacji po wszystkich eksperymentach. Długość destabilizacji uśredniona po różnych kroplach spuszcanych z tego samego położenia jest oznaczona jako \bar{L} , a jej błąd został policzony

indywidualnie dla każdego położenia początkowego kropli:

$$S_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (L_i - \bar{L})^2}{N(N-1)}}. \quad (1.4)$$

Położenie									
Daleko od ścian bocznych									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\bar{L}	30.5	32.6	28.5	31.6	32.7	30.8	36.2	34.3	30
$S_{\bar{L}}$	3	2.2	2.4	1.9	1.9	2.3	1.6	1.9	2.8
Blisko jednej ściany bocznej									
\bar{L}	26.7	25.9	27.3	25.1	27.1	27.6	25.9	27	20.6
$S_{\bar{L}}$	3.4	2.8	2.4	1.9	2.7	2.5	2.7	2.5	2.9
Blisko dwóch ścian bocznych									
\bar{L}	28.4	26.6	26.9	28.3	27.4	27.5	27.8	26.9	24.4
$S_{\bar{L}}$	2.3	2.3	2.3	1.8	2.4	1.5	2.5	1.8	2.1

Tabela 1.2. Długość destabilizacji \bar{L} uśredniona po eksperymentach dla danych położań początkowych i jej błąd $S_{\bar{L}}$ (w *cm*) dla trzech badanych typów geometrii, czyli daleko od ściany, blisko jednej ze ścian bocznych i pomiędzy dwiema bliskimi ścianami.



Rysunek 1.6. Długość destabilizacji w zależności od początkowego położenia kropli (średnia po wszystkich eksperymentach wykonanych dla danej geometrii).

Wyniki dla trzech badanych geometrii znajdują się w Tab. 1.2 i zilustrowane są na Rys. 1.6.

Widzimy, że dla wszystkich położenia początkowych średnia długość destabilizacji \bar{L} jest największa w przypadku bez ściany. Na podstawie Rys. 1.6 nie można jednak określić czy przy jednej, czy też dwóch ścianach długość destabilizacji jest krótsza, z powodu błędów statystycznych przewyższających różnice między wartościami umieszczonymi w tabeli 1.2.

Otrzymane wyniki zostały również przeanalizowane w inny sposób. Wysokość płynu w akwarium, równa $H \approx 39\text{cm}$, podzielona została na 7 równych przedziałów o długości $L_o \approx 5.6\text{cm}$. Zliczana była liczba N_n kropeł które się zdestabilizowały w określonych przedziałach $0 \leq L/L_o \leq n$, dla $n = 1, \dots, 7$. Wyniki umieszczono w Tab. 1.3.

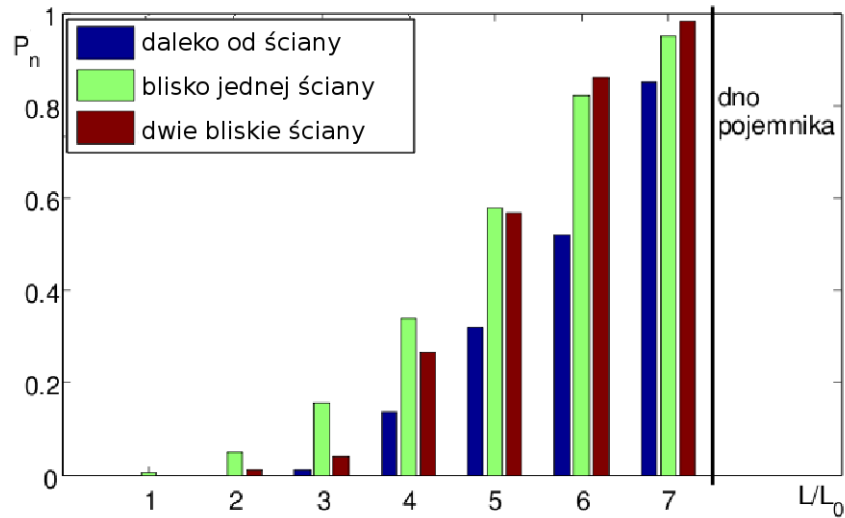
	zakres długości destabilizacji $0 < L/L_o < n$ [w $L_o = 5.6\text{cm}$]							
	0 – 1	0 – 2	0 – 3	0 – 4	0 – 5	0 – 6	0 – 7	0 – ∞
Daleko od ściany	0	0	1	11	26	42	69	81
Blisko jednej ściany	1	9	28	61	104	148	171	180
Dwie bliskie ściany	0	2	7	48	102	155	177	180

Tabela 1.3. Liczba kropeł N_n charakteryzujących się długością destabilizacji w danym zakresie $0 \leq L/L_o \leq n$.

Uzyskane wartości liczby zdestabilizowanych kropeł N_n umormowano czyli podzielono przez całkowitą liczbę $9N$ spuszczonej kropeł w danej geometrii. Wartość P_n pokazano na Rys. 1.7 jako funkcję od n , obliczając ją z poniższego wzoru:

$$P_n = \frac{N_n}{9N}. \quad (1.5)$$

Na podstawie Rys. 1.7 i tabeli 1.3 można zauważyć, że w przypadku jednej bliskiej ściany w porównaniu z innymi geometriami więcej kropeł zdestabilizowało się na małej odległości w zakresach 0–2, 0–3 oraz 0–4. Dla dużych zakresów liczba kropeł zdestabilizowanych między jedną i dwiema ścianami jest bardzo mała. Niewielka



Rysunek 1.7. Ułamek P_n liczby kropli charakteryzujących się długością destabilizacji $L/L_0 \leq n$, gdzie $n = 1, \dots, 7$, przy czym wysokość słupa płynu wynosiła 7.

liczba kropli pozostała zwartą grupą do samego dna pojemnika. Oprócz liczby zdestabilizowanych kropli w Tab. 1.3 podana jest także liczba wszystkich przeprowadzonych doświadczeń (zakres $0-\infty$). W nieskończonej przestrzeni to znaczy daleko od ściany nie zdestabilizowało się więcej kropli, niż w przypadku kropli opadających przy ścianach. Widoczne jest to na podstawie różnic między ostatnią i przedostatnią kolumną tabeli 1.3. Daleko od ściany stabilne zostało około 15% kropli, w przypadku jednej ściany 5%, w przypadku dwóch ścian jedynie 1.6% kropli. Można więc wnioskować, że w obecności ściany krople mają większą tendencję do destabilizowania się.

1.2.3. Średnia długość destabilizacji

Aby zwiększyć dokładność, długość destabilizacji została uśredniona po wszystkich eksperymentach i po początkowych pozycjach kropli i zapisana w tabeli 1.4. Wyniki długości destabilizacji $\langle L \rangle$ uśrednionej po eksperymentach i po położeniu początkowym kropli, umieszczono w tabeli 1.4 dla różnych geometrii układu. W tabeli tej znajduje się również błąd średniej $S_{\langle L \rangle}$.

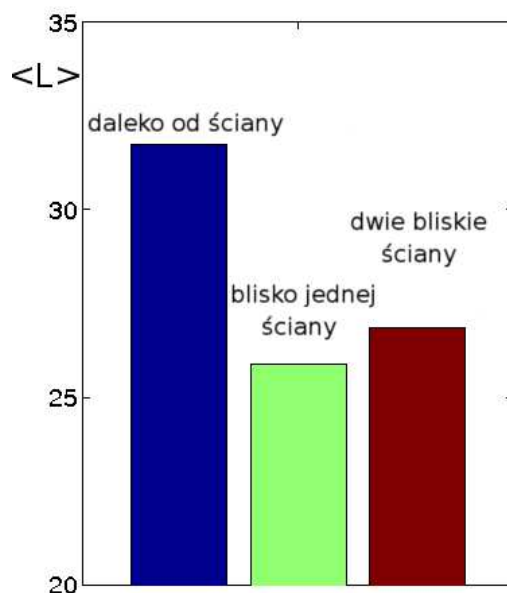
Wynik pokazany w tabeli 1.4 pozwala stwierdzić, że pojedyncza ściana, bądź dwie równoległe mają znaczny wpływ na zmniejszenie długości destabilizacji.

	Daleko od ściany	Blisko jednej ściany	Dwie bliskie ściany
$\langle L \rangle$ cm	31.8	25.9	26.9
$S_{\langle L \rangle}$ cm	0.8	0.6	0.5

Tabela 1.4. Długość destabilizacji kropli $\langle L \rangle$ jako średnia po wszystkich eksperymentach, po położeniu początkowym oraz błąd średniej $S_{\langle L \rangle}$.

1.3. Podsumowanie

Na rysunku 1.8 w sposób graficzny pokazano wyniki zawarte w Tab. 1.4.



Rysunek 1.8. Średnia długość destabilizacji $\langle L \rangle$ kropli zawiesiny opadającej w nieskończonym płynie jest większa niż kropli opadającej przy jednej lub dwóch ścianach.

Średnia długość destabilizacji kropli zawiesiny opadającej pod wpływem grawitacji przy jednej bądź dwóch ścianach jest mniejsza w porównaniu z rezultatem otrzymanym dla bardzo odległych ścian. Różnica jest znacznie większa niż wartość błędu pomiarowego. Efekt ten można jakościowo wyjaśnić biorąc pod uwagę wpływ ściany na opadającą grupę cząstek. Mianowicie te cząstki wewnątrz kropli, które znajdują się bliżej ściany są bardziej spowolnione w porównaniu z cząstkami kropli położonymi dalej od ściany. Przyspiesza to rozerwanie kropli. Tendencja ta zaobserwowana została przy odległościach od ściany rzędu 10 – 20 promieni kropli, czyli

nawet nie tak bardzo bliskich.

Mimo prostoty tego doświadczenia widzimy, że efekt istnieje i ściana ma istotny wpływ na długość destabilizacji. Wynik jest bardzo ważny, więc warto się tym zająć dokładniej.

Można zadać sobie więcej pytań: Jak dokładniej eksperymentalnie przeanalizować ewolucję kształtu kropli i proces destabilizacji? Jak długość destabilizacji zależy od odległości kropli od ściany? Czy czas destabilizacji też zależy od odległości od ściany?

Aby opisać dokładniej efekt wpływu pionowej płaskiej ściany, wykonana została następna seria eksperymentów, w których rozmiar kropli był dokładniej kontrolowany, będzie to opisane w następnym rozdziale.

2. Systematyczne pomiary czasów i długości destabilizacji

Celem przeprowadzonego cyklu doświadczeń było przeanalizowanie wpływu pionowej płaskiej ściany na ewolucję kropli zawiesiny opadającej pod wpływem grawitacji, zmianę jej kształtu i czasu oraz długości destabilizacji. Problemem tym zajęłam się we współpracy z Marią L. Ekiel-Jeżewską, Günterem Brennem oraz Walterem Meile. W laboratorium Institute of Fluid Mechanics and Heat Transfer, University of Technology, Graz, przeprowadziłam eksperyment, w którym główny nacisk położyłam na zbadanie czasu i długości destabilizacji. Wyniki tego doświadczenia zostały opisane w publikacji [41].

W poprzednim rozdziale opisywany był eksperyment, w którym badane były krople zawiesiny spuszczone razem w grupach po 9. Teraz opisany zostanie eksperyment, w którym badano pojedyncze krople. Podczas systematycznych pomiarów krople były generowane w dokładny sposób, a sam układ został skonstruowany tak, aby wykluczyć oddziaływanie z innymi ściankami i innymi kroplami. Eksperyment polegał na tym, że w akwarium wypełnionym gliceryną wielokrotnie spuszczone były pojedyncze krople zawiesiny złożone z gliceryny i szklanych cząstek. Kropla była uwalniana za pomocą specjalnego mechanizmu spustowego pozwalającego z dużą dokładnością kontrolować jej wielkość. Wykonano szereg pomiarów dla różnych początkowych odległości h od jednej ze ścian akwarium, pozostałe ściany były oddalone tak, że nie miały wpływu na opadającą kroplę. Mierzono czas i długość destabilizacji opadającej kropli zawiesiny. Dla każdego h doświadczenie zostało wykonane wielokrotnie.

2.1. Metoda wykonania doświadczenia

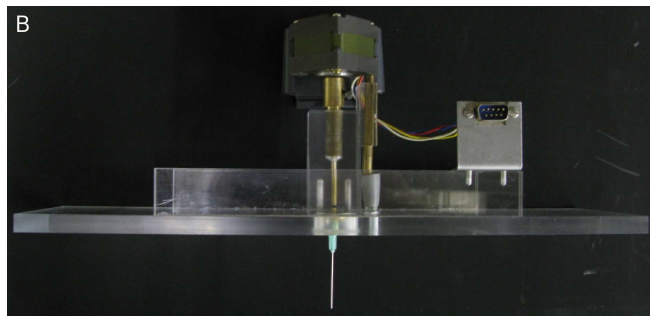
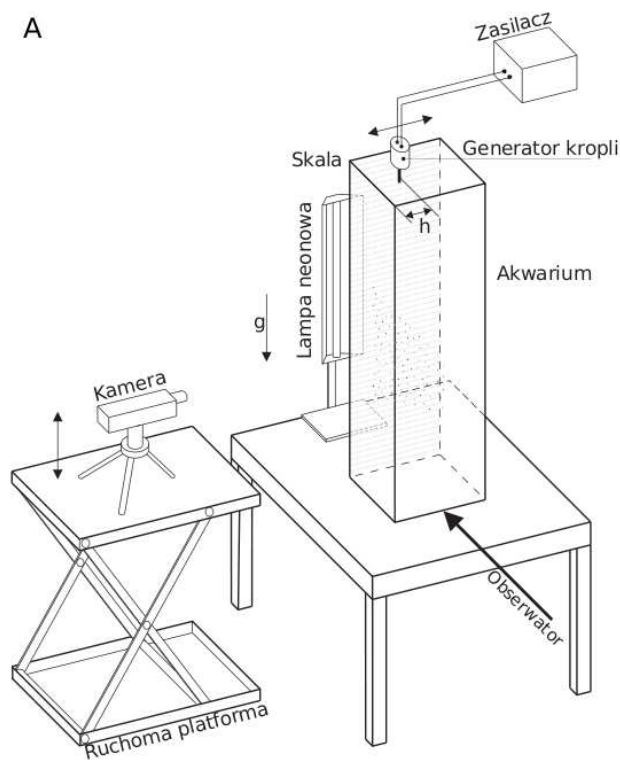
2.1.1. Układ pomiarowy

Eksperyment został wykonany w Institute of Fluid Mechanics and Heat Transfer, University of Technology, Graz, Austria. Krople były spuszczone w szklanym pojemniku o wymiarach podstawy $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ i wysokości 100cm (patrz Rys. 2.1). Pojemnik był na tyle wysoki aby można było obserwować całą ewolucję. Podczas wykonywania doświadczenia przy jednej ze ścian spuszczone były krople, natomiast szerokość akwarium było tak dobrana, aby wpływ pozostałych ścian był zaniedbywalny. Szklany pojemnik w całości wypełniony był wodnym 86% roztworem gliceryny o gęstości $\rho = 1224 \text{ kg/m}^3$ i lepkości kinematycznej $\nu = 0.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, co odpowiada lepkości dynamicznej $\eta \equiv \rho\nu = 110 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Na Rys. 2.1 widoczny jest schemat układu eksperymentalnego. Rys. 2.1A przedstawia szklane akwarium oświetlone lampą neonową od strony podziałki. U góry akwarium umieszczony był generator kropli podłączony do zasilacza. Obok stołu, na którym zostało umieszczone akwarium, ustawiona była ruchoma platforma. Na platformie umieszczona była kamera. Układ taki pozwalał śledzić kroplę od momentu jej wygenerowania, przez cały czas jej opadania w akwarium. Mechanizm spustowy pokazany na Rys. 2.1B złożony był z cylindra, igły, pompy, oraz czasomierza i zasilacza. Dzięki temu urządzeniu można było kontrolować rozmiar kropli. Na rysunku 2.2 w sposób schematyczny przedstawiono widok układu eksperymentalnego z uwzględnieniem i zaznaczeniem miejsca spuszczenia kropli zawiesziny.

2.1.2. Materiały użyte podczas prowadzenia badań eksperymentalnych

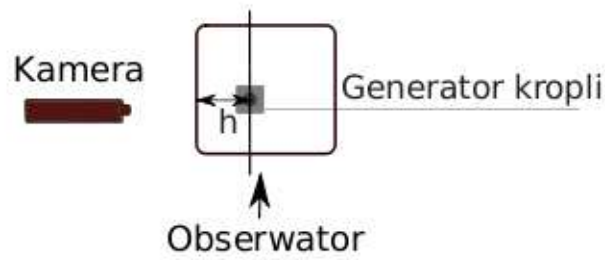
Cząstki szklane użyte podczas eksperymentu były polidispersyjne. Rozkład wartości promieni został zmierzony przy użyciu kamery Nikon Eclipse 50i przy 20-krotnym powiększeniu mikroskopowym. Typowy obraz można zobaczyć na Rys. 2.3. Wykonano pomiary dla 411 cząstek uzyskując średni rozmiar średnicy cząstek równy $d = 25\mu\text{m}$ z odchyleniem standardowym równym $8\mu\text{m}$. Rozkład uzyskanych wartości średnic cząstek szklanych został pokazany na Rys. 2.4. Cząstki szklane miały gęstości $\rho_P = 2400 \text{ kg/m}^3$. Z cząstek szklanych oraz 86% wodnego roztworu



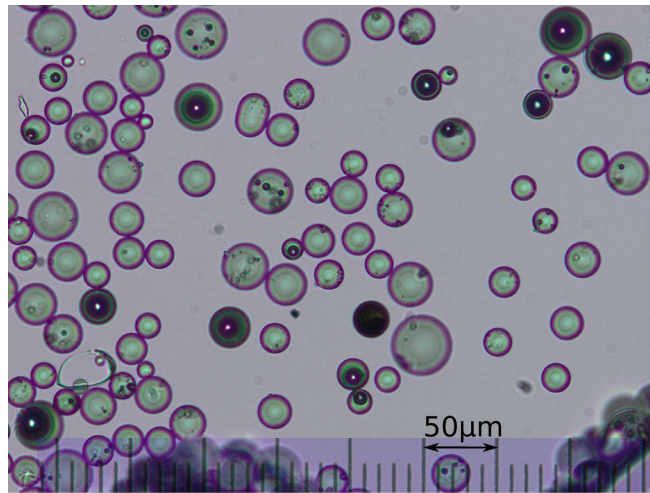
Rysunek 2.1. Układ doświadczalny: (A) Schemat całości: urządzenie generujące krople, akwarium, kamera. (B) Zdjęcie generatora kropli.

gliceryny została przygotowana zawiesina. Odważono masę $M = 11.05g$ gliceryny, następnie do próbki dosypano cząstki szklane o tak dobranej całkowitej masie M_P , aby wartość ułamka objętościowego wyniosła $\phi = 0.1$. Zgodnie z definicją (1.2) oraz wzorem:

$$\phi = \frac{M_P/\rho_P}{M/\rho + M_P/\rho_P}, \quad (2.1)$$



Rysunek 2.2. Układ doświadczalny widok z góry.

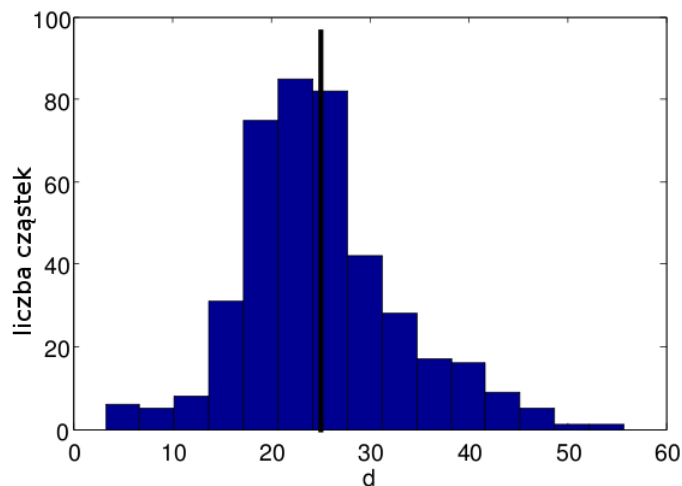


Rysunek 2.3. Próbkę cząstek szklanych widziane pod mikroskopem (bez płynu).

masa cząstek szklanych wyniosła:

$$M_P = \frac{\phi M \rho_P}{(1 - \phi) \rho} = 5.4166g. \quad (2.2)$$

Z tak powstałej zawiesiny generowane były krople, wpuszczane do akwarium wypełnionego gliceryną za pomocą urządzenia pokazanego na Rys. 2.1B. Proces generowania kropeł przedstawiony jest na Rys. 2.5. Na początku kropla nie była sferyczna i dopiero po pewnym czasie przybierała odpowiedni kształt. Rysunek 2.5 przedstawia proces odrywania się kropli od igły. Widzimy pierwsze 10s dla przykładowej kropli zawiesiny. Kropla po pewnym czasie stawała się sferyczna. Na tym rysunku widzimy, że na początku czyli w 2s kropla została wygenerowana. Na trzecim rysunku widzimy, że za kroplą widoczny jest ogon cząstek. Tuż po oderwaniu się zawiesiny

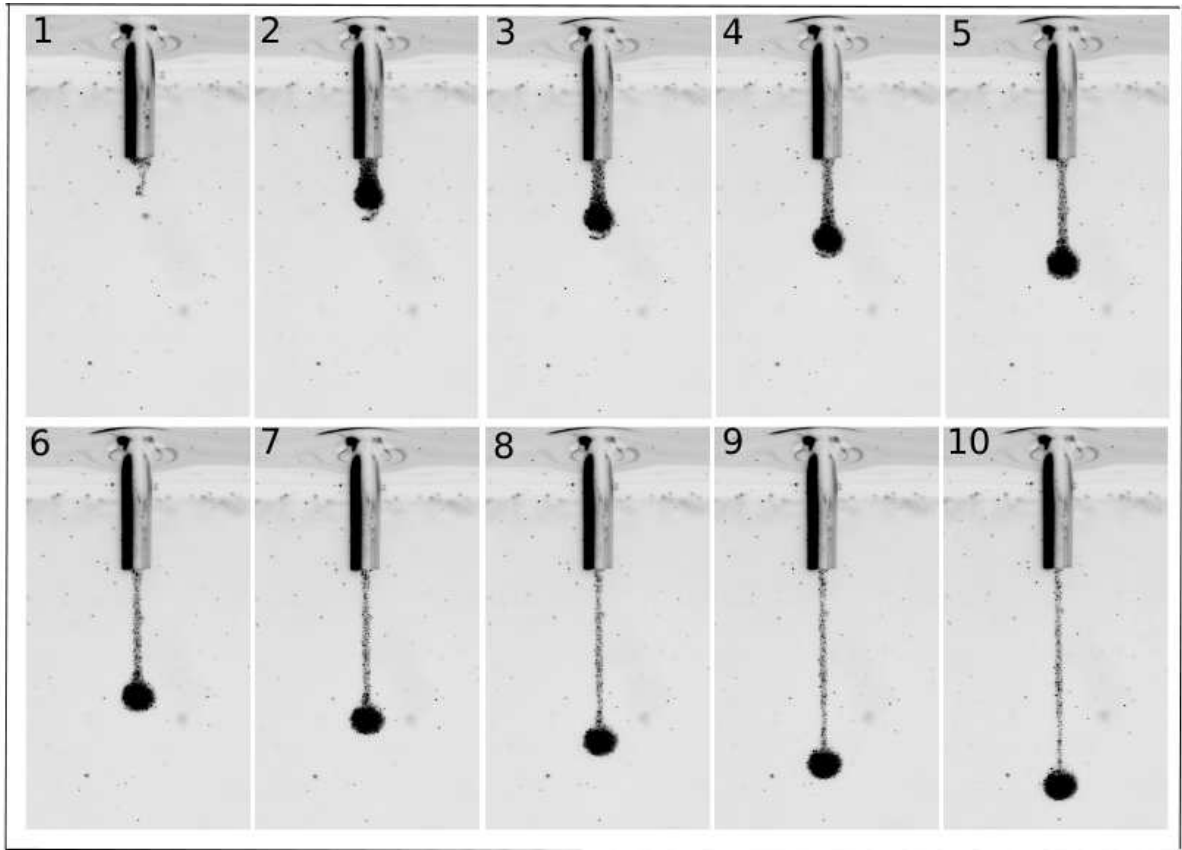


Rysunek 2.4. Rozkład średnic d cząstek szklanych.

od igły kształt nie był symetryczny, był wydłużony i spora liczba cząstek zostawała za tą igłą. Dopiero na końcu tego ogonka formowała się kropla.

Podczas każdego doświadczenia kontrolowaliśmy rozmiar kropeł. Szczegółowy opis przebiegu doświadczenia znajduje się w dodatku A.1. Kamera robiła zdjęcia dla każdego wykonywanego eksperymentu. Urządzenie generowało krople w przybliżeniu tej samej wielkości. Można było zauważyć, iż niektóre nieco się różniły. Powodem mogło być zatkanie igły przez którą miała wydostać się kropla, czy też niedokładne wymieszana zawiesina lub zgubienie różnej liczby cząstek w początkowym etapie czyli tuż po wygenerowaniu kropli. Takie eksperymenty były odrzucane.

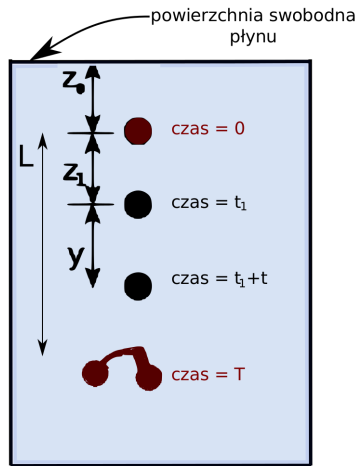
Dla wszystkich eksperymentów zostały wykonane pomiary kontrolne w celu zapewnienia jak najbardziej powtarzalnych rozmiarów kropeł. W tym celu w trakcie doświadczenia dla każdej z kropeł mierzono czas t jaki potrzebuje kropla na pokonanie ustalonej odległości y (patrz Rys. 2.6). Dla kropeł równej wielkości czasy t powinny być takie same. W zależności od odległości od ściany mierzyliśmy czas t na odległości $y = 30\text{mm}$ dla $h = 2\text{mm}$ i $h = 5\text{mm}$, oraz $y = 50\text{mm}$ dla wszystkich pozostałych odległości h . Pomiar t zaczynał się na długości $(z_1 + z_o) = 41\text{mm}$ licząc od powierzchni swobodnej płynu, Rys. 2.6. Na odcinku y czas t kropla pozostawała prawie sferyczna. To czy pomiar był odpowiedni można było wywnioskować z otrzy-



Rysunek 2.5. Przykład początkowego etapu ewolucji kropeł (pierwsze 10s). Zdjęcia wykonywane zostały co 1 sekundę.

many wartości t . Jeśli wartości te były zbliżone, opadająca kropla zawieszona była dalej mierzona (typowy pomiar), w innym przypadku przerywano procedurę. Typowy pomiar dla pojedynczej kropli był wykonywany w następujący sposób. W pewnej odległości h od pionowej szklanej ściany (jednej ze ścian pojemnika znajdującej się przed kamerą) była generowana kropla. Generator kropli został ustawiony tak, jak to opisano w dodatku A.1). Czubek igły znajdował się w odległości $z_o = 4\text{mm}$ pod powierzchnią swobodną płynu. Schemat procedury pomiarowej został przedstawiony na Rys. 2.6. Czarno-biała kamera SONY XCD-X710 służyła do rejestracji poruszającej się kropli. Pozycja kamery była zmieniana krokowo, tak by utrzymać kroplę w polu widzenia, a fotografie były wykonywane co 1s.

Aby podnieść dokładność wyników dodatkowo zastosowano procedurę, w której na podstawie zdjęć z początkowego etapu ewolucji, wyznaczono początkowe śred-



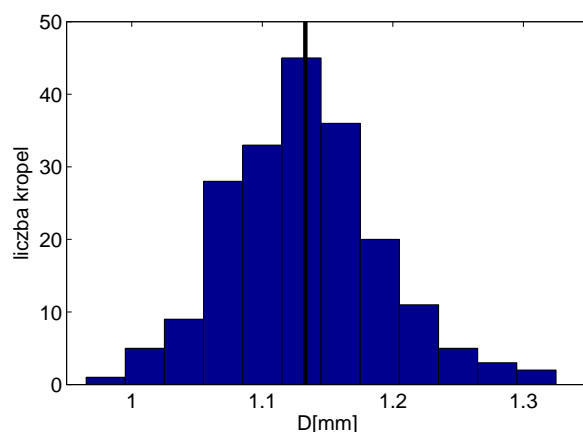
Rysunek 2.6. Rysunek poglądowy przeprowadzanych pomiarów.

nice wszystkich kropeł. Początkowa średnica D dla każdej kropli była określona na podstawie fotografii w czasie pomiędzy $3s$ a $12s$. Wyniki D zostały uśrednione dla wszystkich eksperymentów przeprowadzonych dla danej odległości h od ściany. Jeśli średnica kropli różniła się bardziej niż 15% od średniej to taki eksperyment nie był brany pod uwagę, a średnia była przeliczona ponownie (wyłączając odrzucone doświadczenia). Końcowy wynik obarczony był średnim błędem równym $0.01mm$, a rezultat zapisano w Tab. 2.1.

h	$D[mm]$
$2mm$	1.14 ± 0.01
$5mm$	1.08 ± 0.01
$10mm$	1.16 ± 0.01
$20mm$	1.12 ± 0.01
$30mm$	1.12 ± 0.01
$50mm$	1.16 ± 0.01
$100mm$	1.14 ± 0.01

Tabela 2.1. Wartość początkowych średnic kropeł D .

Średnica kropeł uśredniona po wszystkich eksperymentach wynosiła $\bar{D} = (1.133 \pm 0.004)\mu m$, natomiast jej rozkład przedstawiono na Rys. 2.7.



Rysunek 2.7. Rozkład początkowych średnic wszystkich kropeł.

Liczba cząstek N_0 wewnątrz kropli o średnicy D została oszacowana w następujący sposób. Biorąc pod uwagę znaczną polidispersyjność szklanych cząstek, wykorzystano zmierzony rozkład ich promieni, aby obliczyć objętość V_d próbki $n_d = 411$ cząstek zmierzonych pod mikroskopem:

$$V_d = \frac{\pi \sum_{j=1}^{n_d} d_j^3}{6}, \quad (2.3)$$

gdzie: d_j - poszczególne promienie cząstek szklanych.

Wartości V_d oraz n_d pozwalają wyznaczyć N_0 jako:

$$N_0 = \frac{V_D n_d}{V_d}, \quad (2.4)$$

gdzie objętość V_D wszystkich cząstek wewnątrz kropli o zadanej średnicy D oraz wartości ułamka objętościowego $\phi = 0.1$ dana jest wzorem:

$$V_D = \phi \frac{\pi D^3}{6}. \quad (2.5)$$

Podsumowując liczba N_0 cząstek znajdujących się początkowo wewnątrz kropli zawiesiny, uśredniona po wszystkich eksperymentach wynosiła $\bar{N}_0 = 7100 \pm 200$.

Wyznaczono liczbę Reynoldsa zgodnie z równaniem (10), $Re = \bar{D}v/\nu$ dla \bar{D} , któ-

re jest średnią średnicą kropli po wszystkich eksperymentach. Natomiast prędkość $v = 0.92 \text{ mm/s}$ wyznaczono z wartości przebytej drogi y podzielonej przez czas t . Dla takich wartości uzyskano $Re \approx 10^{-2}$.

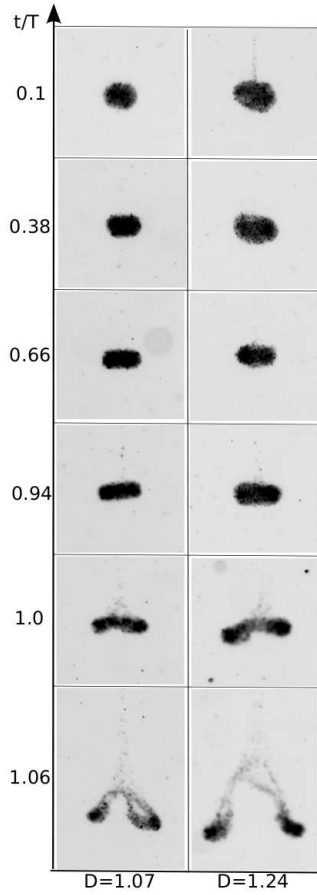
Celem naszych badań było zbadanie wpływu pionowej ściany na ruch, kształt i rozpad kropel. Dlatego obserwowana była ewolucja kropel generowanych w różnych odległościach od ściany $h = 2, 5, 10, 20, 30, 50, 100 \text{ mm}$. Odległość h była mierzona między ścianą a środkiem kropli. Dla każdej z badanych odległości pomiary były powtórzone $n = 20 - 35$ razy. W sumie wykonano 202 pomiary.

2.2. Wyniki eksperymentu

2.2.1. Obserwacje ogólne ewolucji kropli

Podczas eksperymentu zaobserwowaliśmy, że ewolucja kropli opadającej w pobliżu pionowej ściany jakościowo przebiegała tak jak w nieograniczonym płynie. Na początku kropla była prawie sferyczna, pozostawiając za sobą od czasu do czasu cząstki tworzące cienki "ogon". Kształt kropli powoli zamieniał się w poziomy torus, który coraz bardziej się spłaszczał i rozszerzał. W pewnym momencie torus zmieniał kształt tzn. deformował się i rozpadał na dwie, bądź więcej kropel. Na rysunku 2.8 widoczne są dwie różne konfiguracje o różnych D . Przebieg ewolucji jest przedstawiony w funkcji t/T , gdzie T jest czasem destabilizacji danej konfiguracji. Na początku kropla jest sferyczna. Odstępy czasu między czterema górnymi zdjęciami są równe i znacznie większe niż odstęp czasu między trzema dolnymi zdjęciami. Tempo zmian jest bowiem bardzo wolne przez długi czas. Dopiero tuż przez destabilizacją i później zmiany następują bardzo szybko. W czasie 0.94 kropla ma już kształt torusa. Na kolejnym zdjęciu widzimy destabilizację kropel, natomiast ostatnia fotografia pokazuje krople już po destabilizacji.

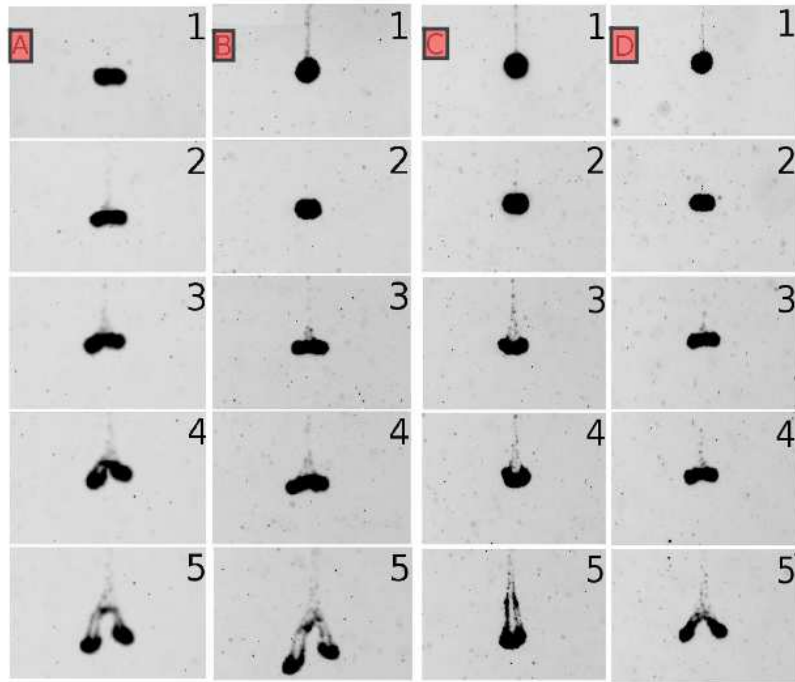
Podczas eksperymentu wszystkie krople były obserwowane i fotografowane. Na tej podstawie stwierdzono, że ewolucja wszystkich kropel przebiega podobnie.



Rysunek 2.8. Porównanie etapów ewolucji kropli o różnych wielkościach D opadającej daleko od ściany (w środku pojemnika). Czasy destabilizacji T dla obu kropli są inne. Wartości D są podane w mm . Dla kropli o $D = 1.07mm$, czas destabilizacji $T = 544s$, natomiast dla kropli o $D = 1.24mm$ czas destabilizacji $T = 390s$

Dodatkowo na rysunku 2.9 przedstawiono typową ewolucję czterech kropli zawiesiny dla $h = 10cm$. Na rysunku 2.9(A,B,D) cała ewolucja wygląda bardzo podobnie do tej przedstawionej na Rys. 2.8, przy czym tutaj czas nie został unormowany, a kropla opadała w pobliżu ściany. Na rysunku 2.9(C), pokazana została kropla zawieszony, która zdestabilizowała się prostopadle do kamery (kamera ustawiona była prostopadle do obserwatora) czyli inaczej niż na pozostałych rysunkach. Określenie momentu destabilizacji dla tego przypadku zostało określone przez obserwatora. Z uwagi na różny kierunek destabilizacji, destabilizacje typu takiego jak zostało pokazane na Rys. 2.9(C), mogły zostać określone jedynie przez obserwatora.

Charakterystyczne cechy ewolucji kropli (odrywanie się cząstek od kropli, tworzenie się torusa, pęknięcie torusa, destabilizacja) były obserwowane wcześniej w nie-



Rysunek 2.9. Typowa ewolucja kropeł zawiesziny dla $h = 10\text{cm}$. Zdjęcia zostały wykonane w następujących czasach, A: (1) $t = 447\text{s}$; (2) $t = 511\text{s}$; (3) $t = 541\text{s}$; (4) $t = 549\text{s}$; (5) $t = 557\text{s}$; Rysunek (3) odpowiada momentowi destabilizacji. B: (1) $t = 11\text{s}$; (2) $t = 138\text{s}$; (3) $t = 516\text{s}$; (4) $t = 552\text{s}$; (5) $t = 573\text{s}$; Rysunek (4) odpowiada momentowi destabilizacji. C: (1) $t = 12\text{s}$; (2) $t = 168\text{s}$; (3) $t = 559\text{s}$; (4) $t = 564\text{s}$; (5) $t = 580\text{s}$; Rysunek (3) odpowiada momentowi destabilizacji. D: (1) $t = 15\text{s}$; (2) $t = 19\text{s}$; (3) $t = 477\text{s}$; (4) $t = 485\text{s}$; (5) $t = 506\text{s}$; Rysunek (4) odpowiada momentowi destabilizacji.

ograniczonym płynie ([11], [14], patrz Rys. 23 w [15], oraz Rys. 18 i Rys. 21 w [17]). Te same cechy w niniejszej pracy doktorskiej zostały zaobserwowane w obecności pianej ściany. Jest jednak kilka różnic. Kropla opadająca w pobliżu ściany wcześniej się spłaszcza i rozpada. Co więcej, kropla opadająca bardzo blisko ściany (dla $h = 2\text{ mm}$) destabilizowała się w taki sposób, że linie środków 2 kropeł uformowanych po rozpadzie w większości przypadków przebiegały wzdłuż ściany (w 23 przypadkach na 25 przeprowadzonych eksperymentów). Dla $h \geq 5\text{ mm}$, linie środków były położone z równomiernym rozkładem kierunków.

Statystyka zaobserwowanych rodzajów ewolucji pokazana jest w tabeli 2.2. Wszystkie krople rozpadły się, w tym 99% rozpadło się na dwie krople i tylko 2 krople na trzy fragmenty.

h/D	destabilizacja na 2 krople	destabilizacja na 3 krople	brak destabilizacji	suma
87.7	34	0	0	34
43.1	35	1	0	36
26.8	33	0	0	33
17.9	27	1	0	28
8.6	22	0	0	22
4.6	21	0	0	21
1.8	24	0	0	24

Tabela 2.2. Liczba kropli zawiesiny z zaznaczonym końcowym etapem ewolucji.

2.2.2. Zależność czasu i długości destabilizacji od odległości od ściany

W eksperymentach, mierzyliśmy czas T destabilizacji kropli i długość destabilizacji L w tym czasie, jako funkcję odległości od ściany h . Czas destabilizacji T był zdefiniowany podobnie jak w Rozdziale 1.1 jako moment (chwila), kiedy torus zaczynał pękać. Długość destabilizacji L jako odległość jaką przemierzyła kropla od momentu jej powstania (wygenerowania jej - co odpowiada czasowi równemu zero) do destabilizacji, patrz Rys. 2.6 (widok z boku). Przed destabilizacją (widok z boku) poziomy torus zaczyna się zginać, środkowa część staje się cieńsza i pozostaje ponad zewnętrznymi grubszymi częściami. Ewolucja trwała bardzo długo, natomiast sam proces destabilizacji przebiegał bardzo szybko. Dla każdej kropli T i L było mierzone za pomocą stopera i skali umieszczonej na tylnej ścianie akwarium. Następnie wartości T i L były uśredniane dla wszystkich $n = 20 - 35$ eksperymentów przeprowadzonych dla danej odległości h . Wartości średnich czasów i długości destabilizacji dla różnych odległości h są wypisane w Tabeli 2.3.

Dane sprowadzono do bezwymiarowych wartości. Jednostką długości jest średnia średnica kropli D , przy czym jej wartość jest nieco różna w zależności od h (patrz Tabela 2.1). Jednostką prędkości v jest początkowa prędkość opadania wzorcowej kropli zawiesiny w nieograniczonym płynie, według wzoru [12, 13]:

$$v = \frac{2F_{tot}}{5\pi\eta D}, \quad (2.6)$$

h [mm]	\bar{L} [mm]	\bar{T} [s]	$1/\bar{\tau}$ [1/s]
2	186 ± 10	348 ± 19	1.59
5	266 ± 9	434 ± 16	1.51
10	326 ± 8	501 ± 10	1.62
20	319 ± 10	477 ± 13	1.56
30	333 ± 7	467 ± 11	1.57
50	344 ± 8	466 ± 9	1.61
100	342 ± 8	488 ± 10	1.59

Tabela 2.3. Czas \bar{T} i długość \bar{L} destabilizacji kropeł w funkcji odległości od ściany h , uśrednione po wszystkich doświadczeniach przeprowadzonych dla danej odległości h . Podana jest także odwrotność jednostki czasu, $1/\bar{\tau}$, zdefiniowana w równaniu (2.8).

F_{tot} jest to całkowita siła grawitacji pomniejszoną o siłę wyporu działająca na kroplę w chwili $t = 0$,

$$F_{tot} = \frac{\pi D^3 \phi}{6} (\rho_P - \rho) g, \quad (2.7)$$

gdzie:

ϕ - ułamek objętościowy,

ρ_P - gęstość cząstek szklanych,

ρ - gęstość gliceryny,

g - jest przyspieszeniem grawitacyjnym.

Jednostka czasu wynosi

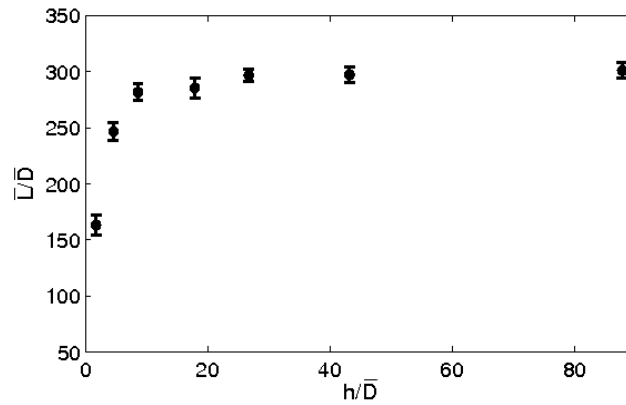
$$\tau = \frac{D}{2\nu} \quad (2.8)$$

lub zapisując w sposób jawny

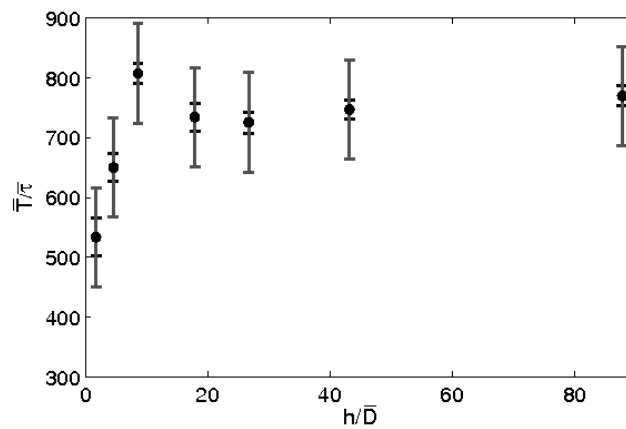
$$\tau = \frac{15\eta}{2g(\rho_P - \rho)D\phi}. \quad (2.9)$$

Na rysunkach 2.10 i 2.11 średnia bezwymiarowa długość destabilizacji \bar{L}/\bar{D} i czas destabilizacji $\bar{T}/\bar{\tau}$ są przedstawione w zależności od bezwymiarowej odległości h/\bar{D} . Na obu rysunkach, błędy statystyczne są narysowane przy użyciu czarnych słupków błędów. Wykres czasu $\bar{T}/\bar{\tau}$ ma dodatkowe błędy "nielosowe", z powodu fluktuacji początkowej prędkości kropli v z dnia na dzień. Mogą one być związane z niewielkimi zmianami temperatury płynu w czasie, gradientami temperatury, konwekcją płynu,

wodą na powierzchni gliceryny lub innymi czynnikami. Metoda określania błędów "nielosowych" jest opisana w dodatku B, a wynikające z niej wartości błędów pokazane są na rysunku 2.11. za pomocą szarych słupków.



Rysunek 2.10. Wynik doświadczenia: Średnia długość destabilizacji kropli w zależności od odległości od ściany, obie wartości znormalizowane przez początkową średnią średnicę kropli.



Rysunek 2.11. Wynik doświadczenia: Średni czas destabilizacji kropli w zależności od odległości od ściany, obie wartości znormalizowane przez początkową średnicę kropli. Zaznaczone błędy statystyczne (czarne) i nielosowe (szare).

2.3. Podsumowanie

Na podstawie danych przedstawionych na wykresach 2.10 i 2.11 widzimy, że czas i długość destabilizacji są krótsze dla mniejszych odległości od ściany. W szczególności różnice pomiędzy wartościami osiągniętymi przy $h = 2$ mm i $h = 10$ mm są znacząco większe niż oba statystyczne i nielosowe błędy.

Wszystkie wyniki zostały znacznie dokładnie zanalizowane, a cała ich dyskusja będzie umieszczona w rozdziale porównującym wyniki eksperymentu z wynikami teoretycznymi.

Część II

Opis teoretyczny i najważniejsze wyniki

W tej części pracy zostanie omówiony model cząstek punktowych oraz wyniki uzyskane za pomocą tego modelu.

Badanie za pomocą tego modelu układu wielu cząstek tworzących krople zawiesiny opadających grawitacyjnie w nieograniczonym płynie lepkim zostało przeprowadzone w innych pracach [15, 16, 17, 18], co zostało opisane we wstępie rozprawy. Zasadnicze elementy dynamiki układu opisane w literaturze są następujące: kropla się deformuje, spłaszcza, tworzy się torus, kropla musi pokonać odległość równą wielu swoim promieniom zanim ulegnie destabilizacji. Destabilizacja następuje gwałtownie, a powstałe fragmenty powtarzają te same etapy ewolucji. W pracach [15, 16, 17], które były wykonywane dla skoncentrowanych układów, poprzez porównanie eksperymentów z modelem cząstek punktowych, stwierdzono że ewolucja widziana w eksperymencie jest dobrze odtwarzana przez ten model.

W tej pracy analiza teoretyczna oddziaływań między wieloma identycznymi cząstkami opadającymi pod wpływem grawitacji została przeprowadzona za pomocą modelu cząstek punktowych. Zostało wyznaczone zachowanie układu cząstek w nieograniczonej przestrzeni płynu oraz w płynie ograniczonym płaską pionową ścianką.

Rodział 3 tej części został poświęcony omówieniu metody cząstek punktowych. Następnie metoda ta została użyta do obliczeń, a wyniki zostały przedstawione w rozdziale 4.

3. Metoda rozwiązywania równań Stokesa

3.1. Model cząstek punktowych

Przepływ płynu lepkiego wywołany jest ruchem cząstek, na które działa siła grawitacyjna, przy założeniu że cząstki są cząstkami punktowymi [8, 10]. Model cząstek punktowych polega na opisaniu cząstki za pomocą punktu, w tym punkcie mamy przyłożoną siłę punktową, która powoduje ruch płynu. Prędkość płynu $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ i ciśnienie $p(\mathbf{r}, t)$ spełniają równania Stokesa (15), które opisują układy o małych liczbach Reynoldsa.

Najpierw rozważony zostanie układ jednej cząstki punktowej, więc równania (15) dla pola prędkości i ciśnienia płynu wygenerowanego przez siłę punktową $\mathbf{f}(r) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{r})$, są przedstawione jako:

$$\begin{cases} -\nabla p(\mathbf{r}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}\delta(\mathbf{r}) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Równania (3.1) mają następujące rozwiązanie [8]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \check{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}, \\ p(\mathbf{r}) = \check{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Tensor $\check{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ i $\check{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$ są tensorami Greena. Dla nieograniczonego płynu tensor $\check{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ jest tensorem Oseena [5, 8], natomiast jeśli płyn jest ograniczony sztywną płaską ścianą tensor ten jest tensorem Blake'a [42].

Tensorzy spełniają następujące równania:

$$\begin{cases} \eta \nabla^2 \check{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) - \nabla \check{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) + \mathbf{I} \delta(\mathbf{r}) = 0, \\ \nabla \cdot \check{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

W przypadku kiedy mamy do skonstruowania model wielu cząstek korzystamy z powyższych równań. W modelu N cząstek punktowych cząstki $\alpha = 1, 2, \dots, N$ mające rozmiar punktowy znajdują się w położeniach \mathbf{r}_α i na każdą z tych cząstek działa siła \mathbf{F}_α , która jest siłą grawitacji. Wtedy pola prędkości i ciśnienia płynu generowanego obecnością cząstek spełniają równania:

$$\begin{cases} \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \nabla p(\mathbf{r}) + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Rozwiązanie takiego układu równań ma postać:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \check{\mathbf{T}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \cdot \mathbf{F}_\alpha, \\ p(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \check{\mathbf{P}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \cdot \mathbf{F}_\alpha. \end{cases} \quad (3.5)$$

Bardziej szczegółowe omówienie tensorów Greena oraz równania dla ruchu cząstek zostaną podane oddzielnie dla nieograniczonego i ograniczonego ścianą płynu, w następujących paragrafach.

3.1.1. W nieograniczonym płynie

Pola prędkości i ciśnienia dla układów wielu cząstek punktowych w nieograniczonym płynie opisane są równaniami (3.4), z uwzględnieniem warunków brzegowych $|\mathbf{u}(\mathbf{r})| \rightarrow 0$ dla $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Rozwiązanie w nieograniczonym płynie jest zadane układem równań (3.5). Tensor $\check{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ jest w tym przypadku tensorem Oseena [5, 8] i będzie on oznaczony jako $\mathbf{T}_0(\mathbf{r})$, natomiast $\check{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$ oznaczony zostanie jako $\mathbf{P}_0(\mathbf{r})$. Tensory te mają postać [8]:

$$T_{0,ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left(\delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (3.6)$$

$$P_{0,j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \left(\frac{r_j}{r} \right), \quad (3.7)$$

gdzie: i, j numerują współrzędne kartezjańskie.

Z założenia prędkość cząstek w modelu cząstek punktowych przyjmujemy jako:

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{0\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{T}_0(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{F}_\beta \quad (3.8)$$

gdzie: $\mathbf{v}_{0\alpha}$ - prędkość izolowanej cząstki w nieobecności innych cząstek [10].

Jeśli chcemy porównać z eksperymentem dla cząstek sferycznych (z substancji stałej) o promieniu a wówczas:

$$\mathbf{v}_{0\alpha} = \frac{\mathbf{F}_\alpha}{6\pi\eta a} \quad (3.9)$$

jest prędkością Stokesa [5, 8, 27, 43].

Pierwszy człon wzoru (3.8) mówi o tym, jak porusza się pojedyncza izolowana cząstka α w płynie pod wpływem siły \mathbf{F}_α . Drugi człon mówi o tym, że cząstka jest dodatkowo unoszona przez pole prędkości płynu wytworzone przez wszystkie cząstki inne niż cząstka α .

Dynamika cząstek punktowych w nieograniczonym płynie ma postać:

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (3.10)$$

gdzie \mathbf{v}_α spełnia równania (3.6), (3.8), (3.9). Wtedy równania (3.10) to układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, postaci:

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_{0\alpha} + \frac{1}{8\pi\eta} \sum_{\beta \neq \alpha} \left(\mathbf{I} + \frac{(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|^2} \right) \cdot \frac{\mathbf{F}_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}, \quad (3.11)$$

gdzie: \mathbf{I} - jest tensorem jednostkowym.

W dalszej części pracy założono, że cząstki są identyczne: $\mathbf{v}_{0\alpha} = \mathbf{V}_0$, oraz $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}$. W równaniach (3.8), (3.9) występuje rozmiar cząstki żeby go wyeliminować i otrzymać równanie (3.10) niezależne od skali długości, dokonywana jest zamiana zmiennych tak, aby układ poruszał się z prędkością pojedynczej cząstki: $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{V}_0 \tilde{t}$.

Wybrano układ współrzędnych $\mathbf{F} = -\hat{e}_x F$. Doprowadzono układ równań różniczkowych do układu bezwymiarowego, wybierając jednostki: l - jednostka długości,

jednostkę prędkości:

$$v' = \frac{F}{8\pi\eta l}, \quad (3.12)$$

oraz jednostę czasu:

$$\tau' = \frac{8\pi\eta l^2}{F}. \quad (3.13)$$

Używając jednostki l , wprowadzamy bezwymiarowe położenia:

$$\mathbf{R}_\alpha = \frac{\mathbf{r}'_\alpha}{l}, \quad (3.14)$$

oraz bezwymiarowy czas:

$$t = \frac{\tilde{t}}{\tau'}. \quad (3.15)$$

W ten sposób układ równań różniczkowych (3.11) doprowadzono do postaci:

$$\frac{d\mathbf{R}_{\alpha,i}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^3 \sum_{\beta \neq \alpha}^N \frac{-\delta_{j1}}{|\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta|} \left(\delta_{ij} + \frac{(R_{\alpha,i} - R_{\beta,i})(R_{\alpha,j} - R_{\beta,j})}{|\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta|^2} \right), \quad (3.16)$$

gdzie:

i, j - numeruje współrzędne kartezjańskie,

α i β - numeruje cząstki.

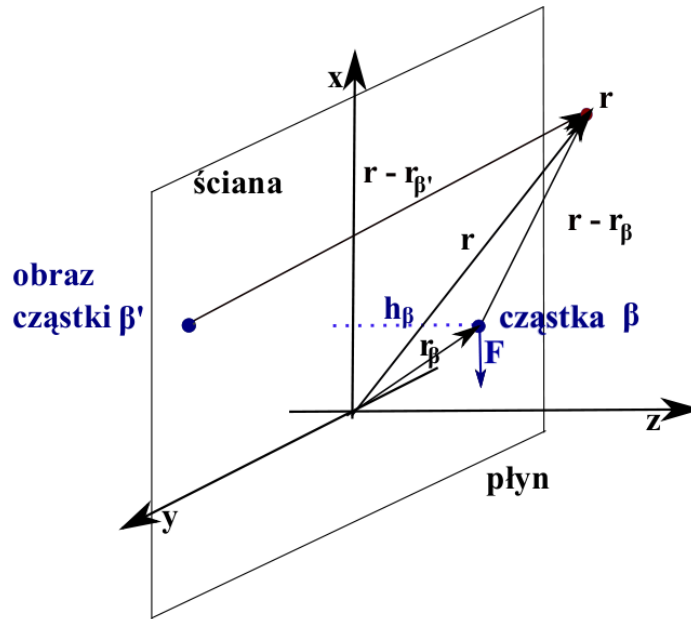
W ramach pracy doktorskiej napisano kod w programie MATLAB (szczegóły w dodatku C), służący rozwiązaniu tych równań tzn. wyznaczeniu położenia cząstek i chwilowej prędkości w funkcji czasu oraz wyznaczeniu trajektorii. Jednostki zdefiniowane w rozdziale 3 nie będą później używane, mianowicie podczas analizy ewolucji zostaną wprowadzone nowe jednostki.

3.1.2. W płynie w pobliżu pionowej ściany

Tak jak w przypadku nieograniczonej przestrzeni model cząstek punktowych będzie opisywał N identycznych cząstek opadających pod wpływem grawitacji \mathbf{F} w lepkim płynie przy czym teraz płyn zostanie ograniczony pionową płaską ścianą w $z = 0$. Siła grawitacji jest równoległa do tej ścianki, tzn. $\mathbf{F} \parallel \hat{x}$.

Tak jak poprzednio skonstruowane zostaną równania dla wielu cząstek punktowych. Rozwiązując równania na prędkość i ciśnienie (3.1) dla pojedynczej cząstki, musimy uwzględnić warunki brzegowe $|\mathbf{u}(\mathbf{r})| \rightarrow 0$ dla $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ oraz warunek, że płyn jest ograniczony ścianą w $z = 0$, więc na ścianie mamy:

$$|\mathbf{u}(\mathbf{r})| = 0 \quad \text{jeśli} \quad \mathbf{r} = (x, y, 0). \quad (3.17)$$



Rysunek 3.1. Przedstawienie układu i oznaczeń dla jednej cząstki.

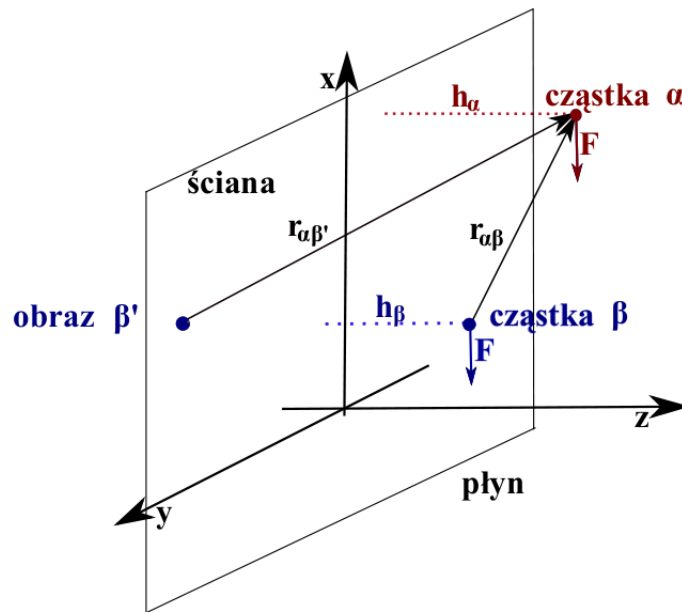
Rozwiązanie równania (3.1) przy tak sformułowanych warunkach brzegowych zostało skonstruowane za pomocą metody obrazów [42]. Rozważmy taki układ jak na Rys. 3.1. Pokazany jest płyn, cząstka β w pobliżu ściany w punkcie, tak że w $z = 0$ spełnione są warunki brzegowe $|\mathbf{u}(\mathbf{r})| = 0$. Ustalmy dowolny punkt \mathbf{r} , który jest punktem obserwacji. W tym punkcie szukamy prędkości i ciśnienia płynu wywołanego przez pojedynczą cząstkę. Wiemy, że jeśli nie byłoby ściany oddziaływania hydrodynamiczne byłyby opisane tensorem Oseena $\mathbf{T}_0(\mathbf{r}_{\alpha\beta})$. Jeśli dodamy ścianę, nasuwa się pytanie jak na naszą cząstkę oddziałuje ta ściana. Zamiast rozważać płyn wypełniający półprzestrzeń 3D ($z > 0$) ograniczoną ścianą, rozważamy układ zawierający dwie cząstki w nieograniczonym płynie (według wzoru (3.17)). Położenie

cząstki β odbite w tej płaszczyźnie $z = 0$ daje położenie cząstki β' .

Na obraz cząstki β' działają siły i multipole sił. Multipole sił są tak dobrane, żeby spełnić automatycznie warunki brzegowe (3.17). Dla tego układu równania (3.1) opisujące ruch płynu w obecności jednej cząstki, mają rozwiązanie dla $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_\beta$ w postaci [8, 42, 44, 45]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{F}, \\ p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{F} \end{cases} \quad (3.18)$$

Ruch płynu w układzie wielu cząstek punktowych jest postaci (3.5), przy czym tensory $\check{\mathbf{T}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)$ i $\check{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\beta)$ są teraz tensorami $\mathbf{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\beta)$ i $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_\beta)$ podanymi przez Blake'a [42, 46] i zostaną podane później.



Rysunek 3.2. Przedstawienie układu i oznaczeń dla dwóch cząstek.

Następnie szukamy równań opisujących ruch wielu cząstek punktowych w płynie. W tym celu na Rysunku 3.2 przedstawiony jest układ pokazujący cząstki α i β na które działają identyczne siły \mathbf{F} , $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ jest względnym położeniem cząstek. Każda z tych cząstek znajduje się w odległości odpowiednio h_α i h_β od ściany. Dla uwzględnienia oddziaływania hydrodynamicznego każdej cząstki ze sobą i cząstki ze

ścianą, korzysta się z metody obrazów [42].

Oddziaływania między cząstkami były opisywane w rozdziale 3.1.1 za pomocą tensorów Greena dla nieograniczonego płynu (3.6), (3.7). W przypadku ściany oddziaływania te będą opisane za pomocą tensorów Blake'a, co zostanie za chwile pokazane. Tak jak poprzednio układ porusza się z prędkością V_0 (prędkość jednej cząstki punktowej w nieograniczonym płynie). W ten sposób dynamika cząstek jest niezależna od promienia cząstki. W poprzednim rozdziale, położenia cząstek względem tego układu były oznaczone primami. W tym rozdziale dla wygody opuszczamy primy.

Prędkości cząstek $\alpha = 1, 2, 3, \dots, N$ są postaci:

$$\mathbf{v}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha}^N \mathbf{T}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\beta'}) \cdot \mathbf{F}, \quad (3.19)$$

gdzie $\mathbf{T}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta)$ jest tensorem Blake'a [8, 42, 45, 46]:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) = \mathbf{T}_0(\mathbf{r}_{\alpha\beta}) + \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\beta'}), \quad (3.20)$$

natomiast tensor Oseena \mathbf{T}_0 jest tensorem Greena w nieograniczonym płynie, zgodnie z równaniem (3.6). Tensor $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\beta'})$ definiowany jest jako [42]:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\beta'}) \cdot \mathbf{F} = -\mathbf{T}_0(\mathbf{r}_{\alpha\beta'}) \cdot \mathbf{F} - 2h_\beta \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_{\alpha\beta'}} \mathbf{T}_0(\mathbf{r}_{\alpha\beta'}) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \frac{2h_\beta^2}{8\pi\eta} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_{\alpha\beta'}} \left(\frac{\mathbf{r}_{\alpha\beta'}}{r_{\alpha\beta'}^3} \right), \quad (3.21)$$

gdzie:

$\tilde{\mathbf{P}}$ - operator odbicia zdefiniowany jako: $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{1} - 2\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}$,

$\hat{\mathbf{z}}$ - to wersor prostopadły do ściany.

Tensor Oseen'a, $\mathbf{T}_0(\mathbf{r}_{\alpha\beta})$, opisuje oddziaływanie cząstki α z cząstką β w nieograniczonym płynie, natomiast $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\beta'})$ opisuje oddziaływanie cząstki α z obrazem β' cząstki β .

W równaniu (3.19) pierwszy człon oznacza sumę pól prędkości płynu wytwo-

rzonych przez wszystkie inne cząstki β w położeniach \mathbf{r}_α w miejscu cząstki α oraz pól prędkości pochodzących od obrazów cząstek β' czyli od sił i wyższych multipoli sił umieszczonych w tych obrazach. Drugi człon określa pole prędkości wytworzone przez obraz α' w punkcie \mathbf{r}_α . Oddziaływania cząstki α z jej obrazem α' , $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\alpha'})$ wyznaczono z równania (3.21) otrzymując:

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_{\alpha\alpha'}) \cdot \mathbf{F} = -\frac{3\mathbf{F}}{32h_\alpha\pi\eta}. \quad (3.22)$$

Dynamika cząstek punktowych $\alpha = 1, \dots, N$ opadających w obecności ściany opisana jest układem równań różniczkowych, postaci:

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{d\tilde{t}} = \sum_{\beta \neq \alpha}^N \mathbf{T}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{F}_\beta - \frac{3}{4h_\alpha} \frac{\mathbf{F}_\alpha}{8\pi\eta} \quad (3.23)$$

Począwszy od tego momentu h_α będzie oznaczało odległość bezwymiarową, która jest normowana przez pewną jednostkę długości l . Biorąc pod uwagę jednostki wcześniej zdefiniowane równaniami (3.12) i (3.13), po obliczeniu pochodnych z uwzględnieniem warunku $\mathbf{F} \parallel \hat{x}$, równanie (3.23) doprowadzono do postaci bezwymiarowej:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_{\alpha,i} = & \frac{3\delta_{i1}}{4h_\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha}^N \left\{ \frac{-1}{|\mathbf{R}_{\alpha\beta}|} \left(\delta_{i1} + \frac{R_{\alpha\beta,i}R_{\alpha\beta,1}}{|\mathbf{R}_{\alpha\beta}|^2} \right) + \frac{1}{|\mathbf{R}_{\alpha\beta'}|} \left(\delta_{i1} + \frac{R_{\alpha\beta',i}R_{\alpha\beta',1}}{|\mathbf{R}_{\alpha\beta'}|^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2h_\beta}{|\mathbf{R}_{\alpha\beta'}|^5} \left(3R_{\alpha\beta',i}R_{\alpha\beta',1}(h_\beta - R_{\alpha\beta',3}) + |\mathbf{R}_{\alpha\beta'}|^2\delta_{i1}(R_{\alpha\beta',3} - h_\beta) - R_{\alpha\beta',1}|\mathbf{R}_{\alpha\beta'}|^2\delta_{i3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

gdzie:

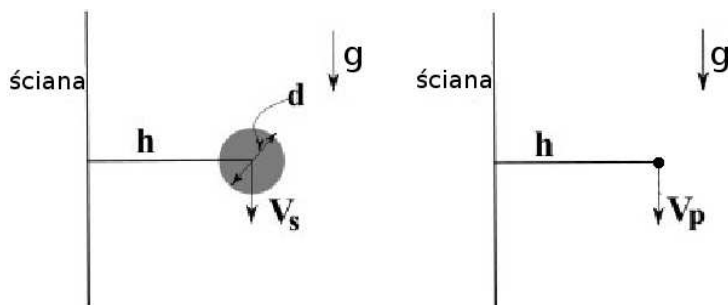
$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta,$$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta'} = \mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_{\beta'}.$$

Układ równań (3.24) został rozwiązany w programie MATLAB (dodatek C), na jego podstawie zostały wyznaczone położenia i prędkości w funkcji czasu dla różnych liczb cząstek. Warunki początkowe zostały sprecyzowane w następnym rozdziale podczas omawiania wyników numerycznych.

3.2. Porównanie ruchu cząstki punktowej i sferycznej przy ścianie

Porównanie ruchu cząstki punktowej i sferycznej przy ścianie dokonano poprzez porównanie prędkości cząstek. Na rysunku 3.3 widoczny jest układ, gdzie po lewej stronie widzimy cząstkę kulistą, na którą działa siła grawitacji, jest ona oddalona od ściany na pewną odległość h . Kula ta porusza się z pewną prędkością V_s i ma średnicę d . Obok widoczny jest układ gdzie zamiast kuli jest punkt w tej samej odległości h od ściany. Porusza się on z prędkością V_p , na cząstki działają takie same siły.



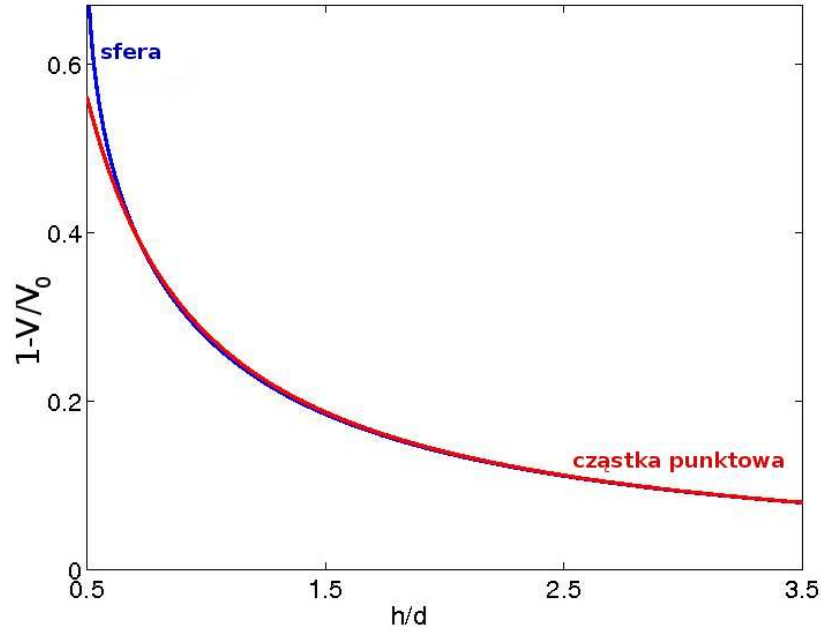
Rysunek 3.3. Porównanie; cząstka punktowa - cząstka sferyczna.

Prędkość cząstki sferycznej V_s została wyznaczona według pracy [44] gdzie zostało wyznaczone wyrażenie na prędkość pojedynczej cząstki sferycznej. Wyrażenie to opisane równaniem (74) w pracy [44] zawiera funkcje, które zostały stabilizowane w pracy [47]. Natomiast prędkość cząstki punktowej V_p jako sumę V_0 i prędkości danej wzorem (3.22). Obie prędkości wyznaczano jako funkcje odległości cząstek od ściany. Uzyskane wyniki przedstawiono na Rys. 3.4. Na podstawie Rys. 3.4 stwierdzono:

$$\frac{h}{d} > 0.66 \Rightarrow \frac{|V_s - V_p|}{V_s} < 1\%.$$

Jeśli dla modelu cząstek punktowych $h/d \rightarrow \infty$ to $V_p \rightarrow V_0$, taka sama zależność jest spełniona dla kuli. Natomiast dla $h/d \rightarrow 0.66$, prędkości V_s i V_p są takie same z dokładnością nie gorszą niż 1%.

Na tej podstawie stwierdzamy, że model cząstek punktowych dobrze oddaje zachowanie się pojedynczej cząstki sferycznej na większych odległościach. Wszystkie



Rysunek 3.4. Porównanie prędkości: cząstka punktowa ($V = V_p$, czerwona linia) i cząstka sferyczna ($V = V_s$, niebieska linia)

obliczenia w tej rozprawie doktorskiej zostały wykonane za pomocą tego modelu, a ich wyniki zostały przedstawione w następnych rozdziałach.

3.3. Model kropli zawiesiny

Dynamika cząstek punktowych została opisana w poprzednim rozdziale 3.1. Zastosujemy model cząstek punktowych do opisu ewolucji opadania kropli zawiesiny. Jest to płyn i N cząstek na które działają identyczne siły punktowe \mathbf{F} . Cząstki te są rozmieszczone równomiernie przypadkowo wewnątrz kulistej objętości o średnicy D . Badany był ruch grupy cząstek dla zadanej początkowej odległości h/D środka tej kuli od ściany. Przy ustalonej odległości od ściany badano grupę cząstek przy różnych konfiguracjach początkowych. Do badania tych konfiguracji użyte zostały kody numeryczne MATLAB rozwiązujące układ równań (3.1). Kody numeryczne zostały oparte na metodzie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych Adams-Bashforth-Moulton (ode113 - metoda omówiona została w dodatku C) z dokładnością względną 0.1% oraz bezwzględną 10^{-6} .

Układ odniesienia obrano tak aby poruszał się z prędkością V_0 (prędkość Stoke-
sa). Zaletą symulacji w układzie pojedynczej cząstki V_0 jest to, że nie ma zależności
od promienia cząstek. Wyniki takie są uniwersalne to znaczy, że dla wielu cząstek
o różnych promieniach w ramach tego modelu mamy tylko jedną symulację nume-
ryczną i, jeśli chcemy porównania z doświadczeniem gdzie określony jest promień
cząstek, to nie ma potrzeby powtarzania symulacji, ponieważ wystarczy dodanie $\mathbf{V}_0 t$
do pozycji każdej z cząstek $\mathbf{r}_\alpha(t)$.

Przedstawiony wynik będzie w zmiennych bezwymiarowych, zostaną wprowadzo-
ne nowe jednostki tak by były one zgodne z tymi, które użyliśmy w przeprowadzonym
doświadczeniu, gdzie $l = D$ jest jednostką długości, v jest jednostką prędkości:

$$v = \frac{2N_0 F}{5\pi\eta D^2}, \quad (3.25)$$

zgodnie z równaniem (2.6) dla $F_{tot} = N_0 F$. Odpowiednia jednostka czasu τ zdefi-
niowana równaniem (2.8) przybiera postać:

$$\tau = \frac{5\pi\eta D^2}{4N_0 F}. \quad (3.26)$$

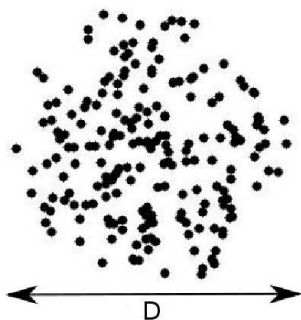
Zgodnie z literaturą [16, 18, 22] wiadome jest, że w nieograniczonym płynie o
lepkości η , prędkość opadania kropli zawiesiny o średnicy D , zawierającej N_0 iden-
tycznych, losowo rozmieszczonych sił punktowych F , jest opisana wzorem (2.6) jeśli
 N_0 dostatecznie duże. W chwili początkowej grupa cząstek spada z tą samą pręd-
kością v co kropla płynu o tej samej wielkości i masie. Dla dowolnego N_0 , dokładne
pola prędkości cząstek w płynie (uśrednione po zespole konfiguracji początkowych)
zostały podane w Ref. [18].

W symulacjach dokonano badania dynamiki cząstek każdej kropli zawiesiny do
czasu $T_k = 3920\tau$. W tej części pracy układy wielu cząstek zostały przeanalizowane
dla $N_0 = 700$. Konfiguracje $N_0 = 700$ przebadane zostały w różnych 30 konfigura-
cjach początkowych. Badano zachowanie się 30 różnych konfiguracji kropli zmienia-
jąc jej odległość od ściany na $h/D = 0.75; 1; 1.5; 2.5; 3.5; 5; 6.5; 10; 30; 70; \infty$.

4. Najważniejsze wyniki

4.1. Długość i czas destabilizacji kropli jako funkcja odległości od ściany

Wylosowane zostało 30 konfiguracji początkowych po 700 losowo ułożonych w kuli cząstek punktowych, z jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa. Kula miała średnicę D (patrz Rys. 4.1). Rozwiązany został układ równań (3.24) dla chwilowych



Rysunek 4.1. Przykładowa konfiguracja wylosowanych punktów ograniczonych sferą o średnicy D , rzut dla $N_0 = 700$.

położeń wszystkich cząstek $\mathbf{R}_\alpha(t)$. Wykonane zostały symulacje dla różnych odległości od ściany h/D (odległość była mierzona tak jak w doświadczeniu, czyli od środka kropli do ściany). Ogólny charakter ewolucji opadającej kropli zawiesiny jest taki sam jak w nieograniczonej przestrzeni płynu [15, 17]. Mianowicie na początku kropla jest sferyczna (w symulacjach zawsze na początku kropla była sferyczna), następnie spłaszcza się, tworzy się płaski torus. Podczas opadania część cząstek pozostaje za szybciej poruszającą się grupą (cząstki odrywają się od grupy) tworząc cienki ogon. Cały czas cząstki wewnątrz kropli poruszają się szybciej, a na zewnątrz wolniej, wykonując recyrkulacje. Nagle torus łamie się na dwa czasem trzy fragmenty, które również wykonują tę samą ewolucję. Wyniki symulacji zostały przedstawione w

tabeli 4.1. Taki scenariusz powtórzył się w 77% całkowitej liczby 330 kropeł zawiesiny przebadanych numerycznie. Natomiast 23% nie zdestabilizowało się w czasie mniejszym lub równym $T_k = 3920\tau$. W 98% spośród wszystkich destabilizacji kropla rozpadła się na dwa fragmenty, tylko 5 kropeł z 254 na trzy. Szczegółowa statystyka dla różnych odległości od ściany przedstawiona jest w tabeli 4.1.

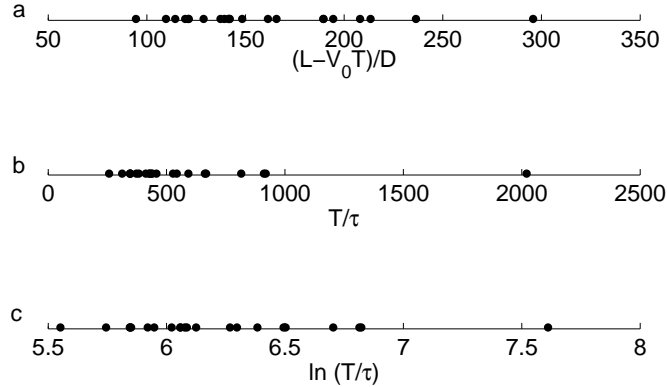
h/D	destabilizacja na 2 krople	destabilizacja na 3 krople	brak destabilizacji	suma
∞	24	0	6	30
70	16	1	13	30
30	22	1	7	30
10	24	0	6	30
6.5	24	0	6	30
5	22	0	8	30
3.5	24	1	5	30
2.5	26	1	3	30
1.5	19	1	10	30
1	22	0	8	30
0.75	26	0	4	30

Tabela 4.1. Liczba kropeł zawiesiny z zaznaczonym końcowym etapem ewolucji w chwili $T_k=3920\tau$ (model cząstek punktowych dla $N_0 = 700$).

W dalszej części pracy omawiane będą tylko krople, które uległy destabilizacji. W analizie wyników obliczeń numerycznych używana była ta sama definicja momentu destabilizacji T jak w eksperymencie (zobacz rozdział 2.2.2). W modelu cząstek punktowych długość destabilizacji $L - V_0T$ odpowiada długości jaką pokonuje kropla zawiesiny do chwili destabilizacji T w układzie odniesienia poruszającym się z prędkością Stokesa V_0 pojedynczej cząstki w nieograniczonym płynie. Wybraliśmy dla modelu cząstek punktowych taki układ aby się uniezależnić od rozmiaru cząstek. L jest długością destabilizacji w układzie laboratoryjnym.

Statystyki długości i czasu destabilizacji pokazano na Rys. 4.2, gdzie odległość środka kropli od ściany $h/D = 5$. Rysunek 4.2 pokazuje długość $(L - V_0T)/D$, czas destabilizacji T/τ , dla kropeł zawiesiny o różnych przypadkowych konfiguracjach początkowych. T/τ może zmienić się prawie o rząd wielkości w zależności od warunku początkowego. Wahania $(L - V_0T)/D$ są mniejsze, ale nadal wartości mogą różnić

się 3-krotnie. Efekt ten jest związany z chaotyczną naturą dynamiki wielu cząstek [48].



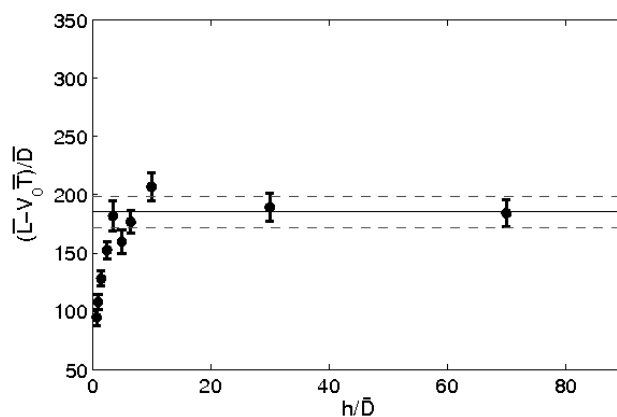
Rysunek 4.2. Długość destabilizacji (a) i czas destabilizacji (b,c) pojedynczych kropli odległych od ściany na $h/D = 5$.

Inną charakterystyczną cechą jest brak symetrycznego rozkładu czasów destabilizacji, które częściej osiągają mniejsze wartości, patrz Rys. 4.2b. Asymetria ta zmniejsza się jeśli spojrzymy na statystyki logarytmu naturalnego $\ln(T/\tau)$ zamiast T/τ , jak pokazano na rysunku 4.2c. Dlatego średni czas destabilizacji jest wyznaczany jako funkcje wykładnicze średniej $\ln(T/\tau)$ w całej pracy (zarówno w symulacji jak i eksperymentach).

W średniej uwzględnione są wartości odpowiadające tym kroplom, które zdestabilizowały się podczas obliczeń numerycznych, to jest w czasie $T < T_k = 3920\tau$, oddzielnie dla każdej odległości h od ściany. Średnia wartość długości i czasu destabilizacji dla danego h zapisana jest w tabeli 4.2 i przedstawiona graficznie na Rys. 4.3 i Rys. 4.4. Wprowadźmy oznaczenie średniego czasu jako \bar{T} i średniej długości \bar{L} destabilizacji kropeł. W symulacjach $\bar{D} = D$.

h/\bar{D}	$(\bar{L} - V_0\bar{T})/\bar{D}$	$\bar{T}/\bar{\tau}$
∞	185 ± 27	601 ± 53
70	184 ± 24	580 ± 63
30	189 ± 24	600 ± 62
10	207 ± 24	716 ± 72
6.5	177 ± 20	585 ± 56
5	160 ± 21	507 ± 50
3.5	182 ± 26	632 ± 69
2.5	153 ± 14	507 ± 36
1.5	128 ± 13	461 ± 33
1	108 ± 13	406 ± 36
0.75	95 ± 14	384 ± 42

Tabela 4.2. Średnia długość $(\bar{L} - V_0\bar{T})/\bar{D}$ oraz średni czas $\bar{T}/\bar{\tau}$ destabilizacji dla różnych odległości od ściany h/\bar{D} . Wartości wynikające z modelu cząstek punktowych.

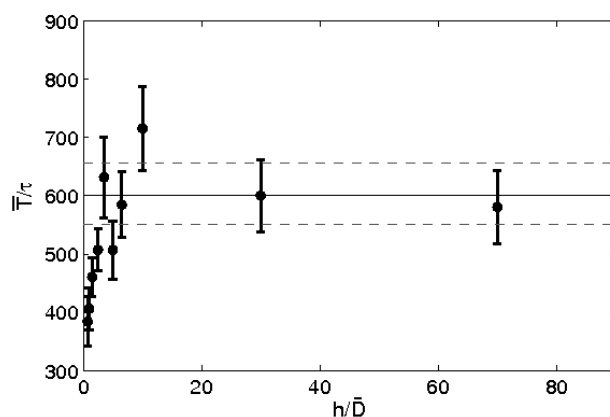


Rysunek 4.3. Średnia długość destabilizacji $(\bar{L} - V_0\bar{T})/\bar{D}$ w zależności od odległości od ściany h/\bar{D} . Pozioma linia ciągła i linie przerywane odpowiadają średniej długości destabilizacji i błędowi średniej dla nieograniczonej przestrzeni.

Zarówno czas jaki i długość destabilizacji są mniejsze jeśli kropla jest bliżej ściany.

4.2. Podsumowanie

Rozwiązując układ równań różniczkowych (3.24) otrzymano wartości prędkości i położeń cząstek opadającej kropli zawiesiny w funkcji czasu. Charakterystyczne wartości opisujące destabilizację kropli zestawiono w tabeli 4.2 i pokazano na rysunkach 4.3 i 4.4. Na podstawie tych rysunków można wywnioskować, że opadają-



Rysunek 4.4. Średni czas destabilizacji \bar{T}/τ w zależności od odległości od ściany h/\bar{D} . Pozioma linia ciągła i linie przerywane odpowiadają średniemu czasowi destabilizacji i błędowi średniej dla nieograniczonej przestrzeni.

ca grawitacyjnie kropla zawieszona średnio zdestabilizuje się szybciej opadając przy ścianie, niż z dala od niej, a długość destabilizacji jest krótsza. Na wykresach 4.3 i 4.4 linią ciągłą zaznaczono średnią wartość wyniku dla nieograniczonej przestrzeni płynu, natomiast przerywną linią zaznaczone zostały wartości błędów. Widzimy, że tylko dla niezbyt dużej odległości od ściany $h/D \lesssim 5$ ściana ma znaczny wpływ na czas i długość destabilizacji. Powyżej tej wartości średnie wartości czasu i długości destabilizacji są w granicach błędów porównywalne z wynikiem dla kropli opadającej w nieograniczonej przestrzeni płynu.

Część III

Porównanie teorii i eksperymentu

5. Uproszczony opis kropli zawiesiny

W doświadczeniu zawiesina grupy cząstek była polidispersyjna, co jest pokazane na Rys. 2.3 i średnia początkowa liczba cząstek N_0 w kropli jest o rząd wielkości większa niż 700. Na początku eksperymentów kropla zawiesiny jest sferyczna o średnicy D . Kropla składa się z N_0 cząstek o średnicach d_i , gdzie $i = 1, \dots, N_0$, średnia $25\mu\text{m}$, taka kropla opada pod wpływem grawitacji F_{tot} opisaną jako:

$$F_{tot} = \sum_{i=1}^{N_0} F_i \quad (5.1)$$

Gdyby uwzględnić polidispersyjność cząstek, obliczenia numeryczne dynamiki cząstek podczas bardzo długiego czasu w różnych odległościach od ściany byłyby zbyt skomplikowane i czasochłonne. Naszym celem było skupienie się na głównych cechach ewolucji kropli dlatego układ którego dynamika jest rozwiązywana numerycznie został uproszczony. W obliczeniach numerycznych używamy uproszczonego modelu wewnętrznej struktury kropli. Początkowa średnica kropli modelowej i tej w rzeczywistości są takie same i wynoszą D , całkowite siły grawitacji są równe F_{tot} . Modelowa kropla składa się z identycznych cząstek o średnicy d_m , która będzie określona dalej. Aby uprościć obliczenia początkowa liczba cząstek w modelowej kropli N_m , jest rzędu wielkości mniejsza niż rzeczywista N_0 , przy czym siła działająca na każdą cząstkę $F_m = F_{tot}/N_m$. Aby zrekompensować tę różnicę mamy do dyspozycji różne możliwości. Przedstawione zostaną dwa modele.

W modelu I, wymagamy aby ułamek objętościowy ϕ_m modelowej kropli był taki sam jak ułamek objętościowy ϕ_0 kropli rzeczywistej (gdzie $\phi_0 = 0.1$)

$$\text{Model I:} \quad \phi_m = \phi_0, \quad (5.2)$$

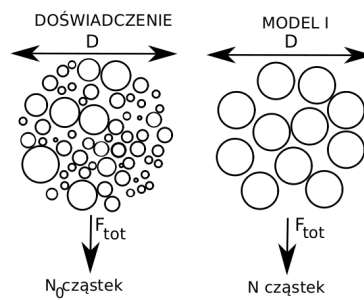
równoważnie,

$$N \left(\frac{d_m}{D} \right)^3 = 0.1. \quad (5.3)$$

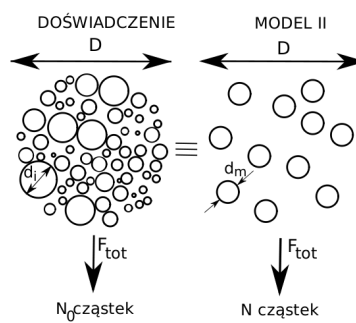
Równanie (5.3) określa ile ma wynosić d_m . Natomiast w modelu II, zakładamy równe średnie średnice cząsteczek wewnątrz modelowej i rzeczywistej kropli,

$$\text{Model II:} \quad d_m = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} d_i. \quad (5.4)$$

Oba modele zostały schematycznie pokazane na Rys. 5.1 i 5.2.



Rysunek 5.1. Model I wewnętrznej struktury kropli: równe ułamki objętościowe.



Rysunek 5.2. Model II wewnętrznej struktury kropli: równe średnie średnice cząstek.

Możliwy jest również inny wybór wartości d_m , pomiędzy modelami I i II. Chodzi o to że dynamika modelowej kropli słabo zależy od wyboru średnicy cząstek d_m : jak w modelu I, II lub pomiędzy. Aby zilustrować tą właściwość obliczyliśmy prędkość

Stokesa dla pojedynczej cząstki modelowej kropli,

$$V_0 = \frac{F}{3\pi\eta d_m}. \quad (5.5)$$

Porównywaliśmy idealną początkową prędkość kropli v , mierzoną w układzie poruszającym się z prędkością V_0 , z wartością V_0 podaną przez równanie (5.5). Przy użyciu równań (5.3) i (5.4), otrzymaliśmy:

$$\frac{V_0}{v} = \frac{5}{6N_m d_m / D} = \begin{cases} 0.02 & \text{dla modelu I,} \\ 0.05 & \text{dla modelu II.} \end{cases} \quad (5.6)$$

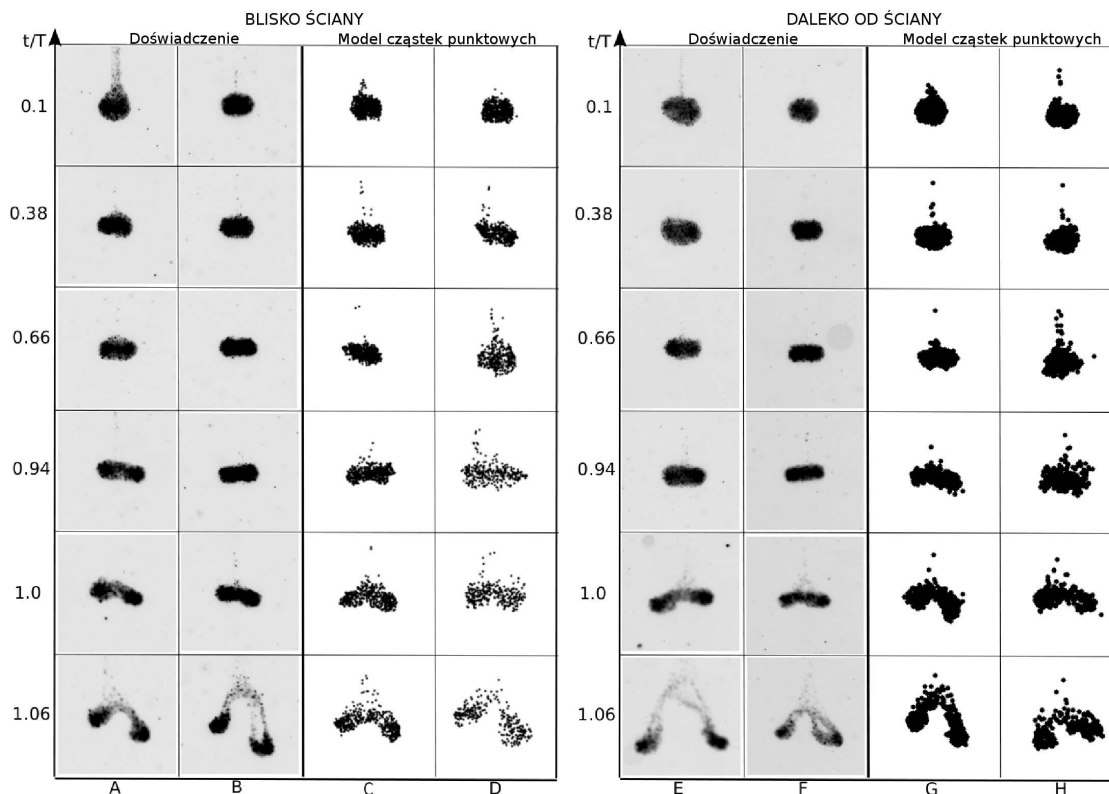
W obu modelach i dla odpowiedniej wartości d_m prędkość Stokesa cząsteczki V_0 jest bardzo mała w porównaniu do początkowej prędkości v opadania kropli. Specyficzny wybór d_m nie jest więc istotny.

6. Porównanie wyników teorii i eksperymentu

Typowa ewolucja 8 kropeł zawiesiny jest pokazana na Rys. 6.1. Widoczna jest ewolucja kropeł zawiesiny opadającej w pobliżu pionowej płaskiej ściany (rysunki od A do D) i w nieograniczonej przestrzeni płynu (rysunki od E do H). Dla każdej z tych geometrii porównywane są wyniki pochodzące z doświadczenia (po lewej stronie, A-B, E-F, szare tło) oraz z symulacji numerycznych (po prawej stronie, C-D, G-H, białe tło). W ramach każdego z tych przypadków dodatkowo porównywano po dwie ewolucje opadającej kropli zawiesiny: jedną o krótkim czasie destabilizacji i drugą o długim czasie destabilizacji. Dla każdej kropli czas jest normowany przez czas destabilizacji tej określonej kropli. W tych jednostkach, czas na rysunku 6.1 jest podzielony nierównomiernie. Mianowicie, odstęp między czasami odpowiadającymi klatkom 1 – 4 są równe 0.28, a odstęp między 4 – 6 jedynie 0.06, taki podział został dokonany w celu dokładniejszego pokazania ewolucji tuż przed i tuż po destabilizacji. Wszystkie ramki pokazują obszar o rozmiarach $4D \times 4D$. Pole grawitacyjne skierowane jest pionowo w dół.

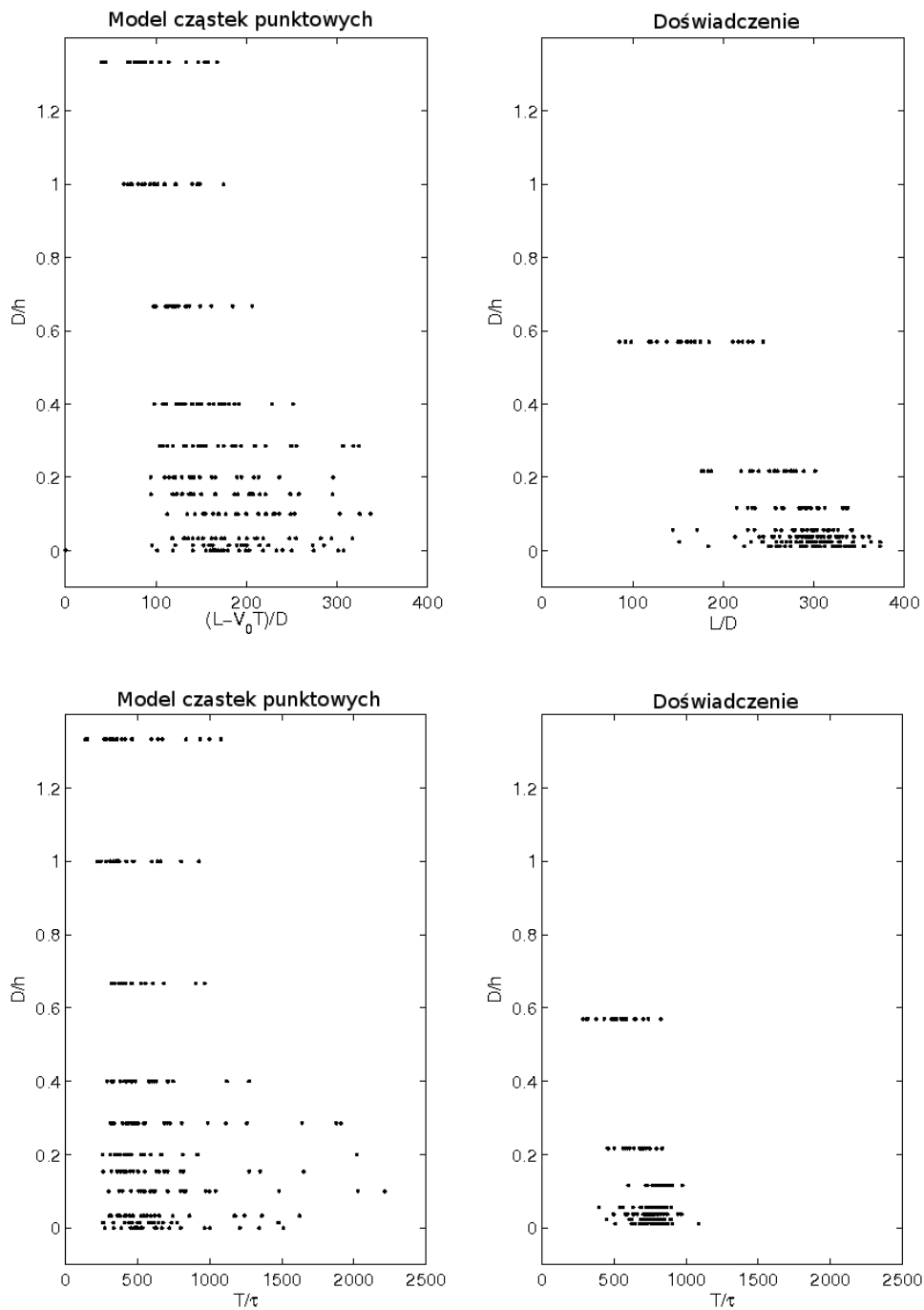
Przedyskutujemy najpierw różnice i podobieństwa w każdej z par kropeł, w kolejnych kolumnach A-B, C-D, E-F, i G-H. W każdej parze kropla różni się jedynie konfiguracją początkową cząstek. Krople w parze zostały tak dobrane, żeby pierwsze w parze rozpadały się w czasie T/τ znacznie krótszym niż drugie. Etapy i tempo ewolucji są praktycznie takie same, jeśli obserwujemy je w czasie t znormalizowanym przez czas destabilizacji T .

Ewolucja kształtu obserwowana w doświadczeniu jest bardzo podobna do wyznaczonej modelem cząstek punktowych. Wniosek ten jest słuszny również w przypadku



Rysunek 6.1. Ewolucja kształtu kropli zawiesiny opadających pod wpływem grawitacji w płynie w pobliżu pionowej ściany (po lewej, A-D) oraz w dużej odległości od ściany (po prawej, E-H). A i B: Doświadczenia dla $h/D = 1.75$, z czasami destabilizacji odpowiednio $T/\tau = 220$ i $T/\tau = 634$. C i D: Symulacje wykonane za pomocą modelu cząstek punktowych dla $h/D = 1.5$ z czasami destabilizacji odpowiednio $T/\tau = 321$ i $T/\tau = 966$. E i F: Doświadczenia dla $h/D \approx 88$, z czasami destabilizacji odpowiednio $T/\tau = 478$ i $T/\tau = 667$. G i H: Symulacje wykonane za pomocą modelu cząstek punktowych dla nieograniczonego płynu, z czasami destabilizacji odpowiednio $T/\tau = 274$ oraz $T/\tau = 1211$.

porównania ewolucji kropli opadającej w pobliżu ściany i z dala od niej. W eksperymencie kropla tuż przed destabilizacją, staje się nieco bardziej płaska i szersza niż w modelu cząstek punktowych. Statystyka długości i czasu destabilizacji dla pojedynczych kropli jest pokazana na Rysunku 6.2. W przypadku doświadczenia i modelu cząstek punktowych istnieją pewne minimalne wartości L i T , poniżej tych wartości nie obserwowano destabilizacji kropli. Powodem jest to, że kropla potrzebuje czasu, aby zmienić kształt według schematu pokazanego na Rys. 6.1. Istnienie podobnych wartości minimalnych zaobserwowano w symulacji dla nieograniczonej przestrzeni płynu [15].



Rysunek 6.2. Długość i czas destabilizacji dla każdej pojedynczej kropli. Po lewej: model cząstek punktowych; po prawej: doświadczenie.

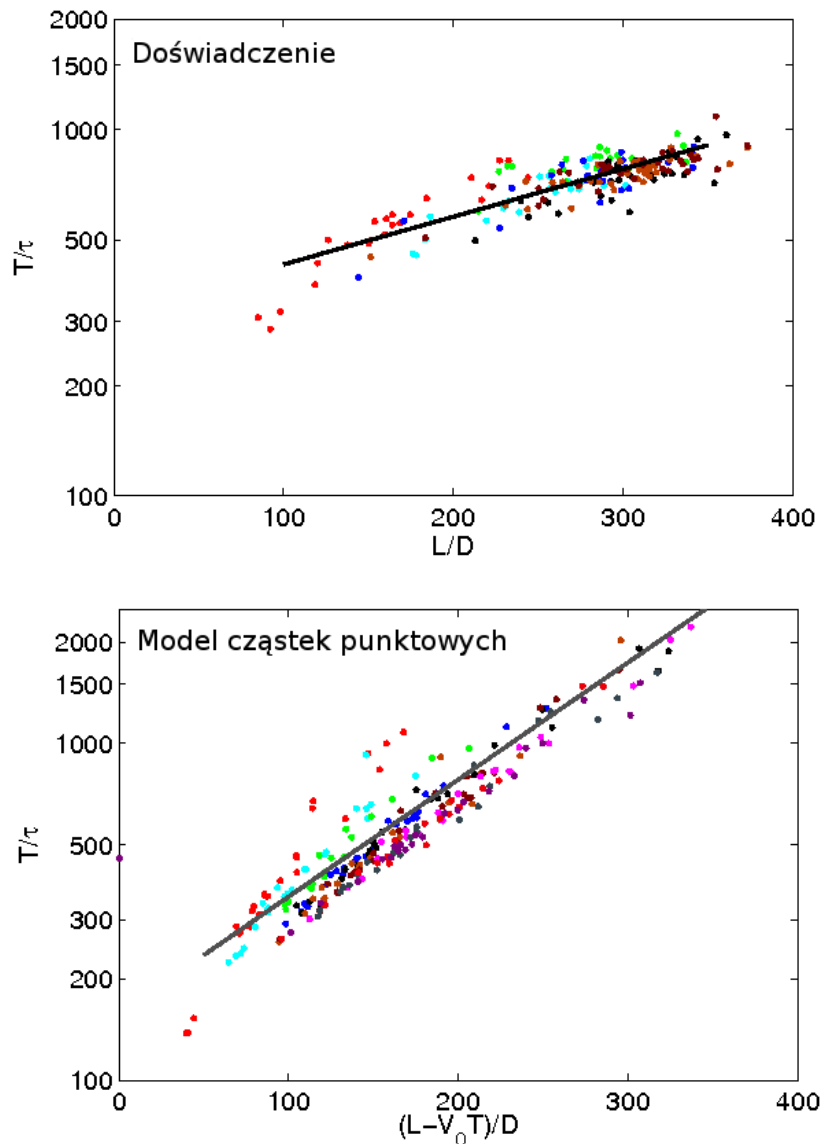
Dla modelu cząstek punktowych zakres osiągniętych wartości T jest szerszy przy większych odległościach od ściany h . Takiej zależności nie ma w przypadku doświadczeń, w których w ogólności zakres wartości T jest mniejszy niż w symulacji.

Długość destabilizacji w przypadku doświadczenia i modelu cząstek punktowych jest porównywalna. W doświadczeniu i symulacji zakres różnic między czasem destabilizacji poszczególnych kropeł jest bardzo duży. Rozrzut wartości może być związany z chaotycznym charakterem dynamiki cząstek [48].

Na Rys. 6.3 został przedstawiony związek pomiędzy czasem a długością destabilizacji. Narysowano T/τ (w skali logarytmicznej) w zależności od długości destabilizacji (w skali liniowej) dla wszystkich pojedynczych kropeł zawiesiny. Oddzielnie wykonano wykresy dla doświadczenia (rysunek górny) oraz dla modelu cząstek punktowych (rysunek dolny). Na każdym z wykonanych Rysunków 6.3 przedstawiono $\ln(T/\tau)$ w funkcji długości destabilizacji. Wartości logarytmu czasu destabilizacji dla wszystkich kropeł układają się w przybliżeniu liniowo. Analizując wykresy, widoczne jest odchylenie od prostej dla najbliższych odległości od ściany ($h/D = 1.75$ dla doświadczenia, czerwone punkty, oraz $h/D = 0.75, 1$ dla cząstek punktowych, czerwone i niebieskie punkty). Linie proste na Rys. 6.3 odpowiadają dopasowaniu $\ln T/\tau = (0.0030 \pm 0.0001)L/D + (5.76 \pm 0.03)$ dla eksperymentu i $\ln T/\tau = (0.0079 \pm 0.0002)(L - V_0T)/D + (5.06 \pm 0.03)$ dla modelu cząstek punktowych.

Teraz będą porównywane wartości średniej długości destabilizacji wyznaczonej na podstawie obliczeń numerycznych i wyników eksperymentów.

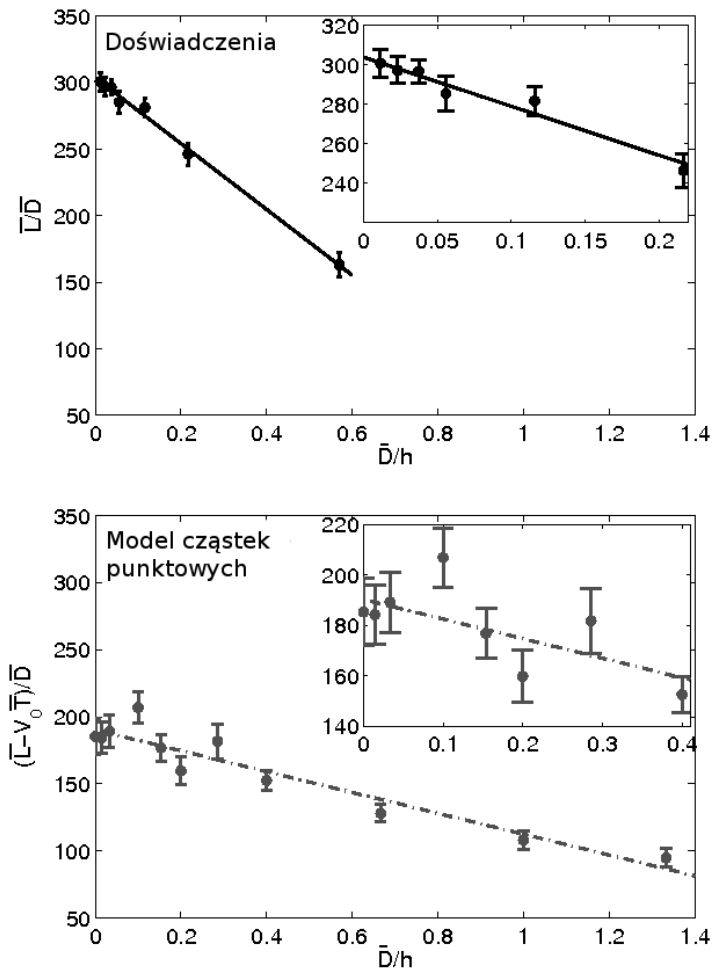
Średnia długość destabilizacji dla wyników obliczeń numerycznych i eksperymentu jest porównana na Rys. 6.4. W obu przypadkach \bar{L}/\bar{D} jest w przybliżeniu liniową funkcją odwrotności odległości od ściany \bar{D}/h . W szczególności (patrz Rys. 6.4) w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów, równanie prostej jest postaci $\bar{L}/\bar{D} = (-247 \pm 8)\bar{D}/h + (304 \pm 2)$ (eksperyment, linia ciągła), oraz $(\bar{L} - V_0\bar{T})/\bar{D} = (-78 \pm 9)\bar{D}/h + (190 \pm 5)$ (model cząstek punktowych, linia przerywana). Doświadczalne wartości \bar{L}/\bar{D} maleją szybciej wraz ze wzrostem D/h niż $(\bar{L} - V_0\bar{T})/\bar{D}$ w



Rysunek 6.3. Zależność $\ln(T/\tau)$ od L/D dla wszystkich punktów, destabilizacji; u góry: eksperyment, u dołu: model cząstek punktowych. [U góry : $h/D = 1,75$ (czerwony), 4,63 (cyjan), 8,62 (zielony), 17,9 (niebieski), 26,8 (czarny), 43,1 (czerwono-brązowy), 87,7 (czerwień). Na dole: $h/D = 0,75$ (czerwony), 1,0 (cyjan), 1,5 (zielony), 2,5 (niebieski), 3,5 (czarny), 5,0 (czerwono-brązowy), 6,5 (wiśnia), 10 (magenta), 30 (stalowoniebieski), 70 (ciemny róż), ∞ (fioletowy)]

przypadku obliczeń numerycznych.

Średni czas destabilizacji $\bar{T}/\bar{\tau}$, przedstawiony został na Rys. 6.5. Linie przedstawione na Rys. 6.5. wynikają z dopasowania na Rys. 6.3 i 6.4. W eksperymencie czasy są nieco większe niż w symulacji, lecz różnica jest mniejsza niż wartości błędów. Na



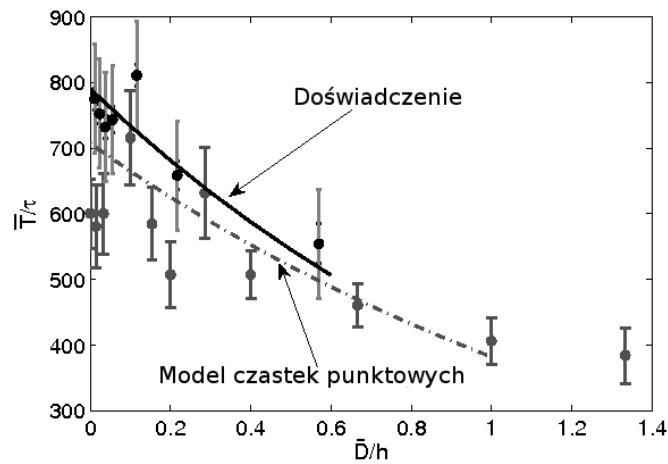
Rysunek 6.4. Średnia długość destabilizacji w zależności od odwrotności odległości od ściany. Góra: doświadczenie, na dole : model cząstek punktowych.

tej podstawie, można stwierdzić że czasy destabilizacji w doświadczeniu i modelu cząstek punktowych są w przybliżeniu takie same.

Tempo malenia \bar{L}/\bar{D} przy zbliżaniu się do ściany może być związane z tym jak szybko opadające krople gubią cząstki.

Wartości średniego czasu destabilizacji $\bar{T}/\bar{\tau}$ zapisane w tabeli 4.2 i przedstawione na rysunku 6.5, pozwalają na oszacowanie $V_0 \bar{T}/\bar{D} = (V_0/2\nu)(\bar{T}/\bar{\tau})$, które transformuje położenia cząstek punktowych w momencie destabilizacji do układu laboratoryjnego. W modelu wewnętrzna struktura kropli zawiesiny opisana jest w paragrafie 5, natomiast paramert $V_0/2\nu$ waha się pomiędzy 0.01 a 0.03, w zależności

od wyboru średnic cząstek d_m . Zmiana $V_0\bar{T}/\bar{D}$ dla wyników doświadczalnych oraz średniej długość destabilizacji \bar{L} zwiększa się odpowiednio o około 3% i 8%.



Rysunek 6.5. Średni czas destabilizacji w zależności od odwrotności odległości od ściany. Kolor szary: model cząstek punktowych, kolor czarny: doświadczenie. Linie ciągła i przerywana wynikają z dopasowania na rys. 6.3 i 6.4.

Średnia długość destabilizacji jest nieco inna w przypadku wyników numerycznych i doświadczalnych. Różnica ta może wynikać z różnego tempa gubienia przez krople cząstek sferycznych i punktowych.

Część IV

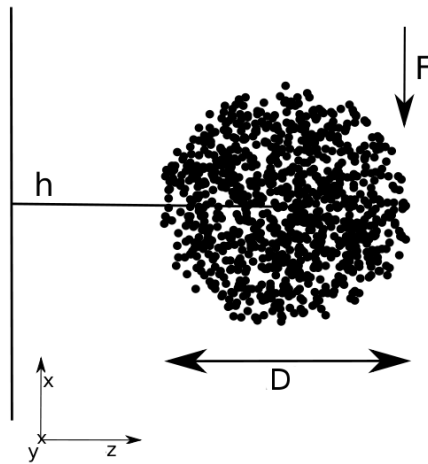
**Szczegółowa analiza ewolucji kropli
zawiesiny**

7. Wpływ początkowej liczby cząstek tworzących kroplę na czas i długość jej destabilizacji

W rozdziale 4 układ wielcząstkowy został przebadany za pomocą modelu cząstek punktowych dla początkowej liczby cząstek w grupie $N_0 = 700$. Otrzymane wyniki porównane zostały z wynikami doświadczalnymi (rozdział 6): porównano wartości średnie czasu i długości destabilizacji, otrzymano również skalowanie średnich długości i czasu destabilizacji. Otrzymane skalowanie mówi jak szybko maleje średni czas i długość destabilizacji jeśli położenie początkowe kropli zmienia się na coraz bliższe ściany.

W niniejszej części zostanie przeprowadzona analiza porównawcza wyników dotyczących destabilizacji otrzymanych na podstawie modelu cząstek punktowych (patrz rozdział 3.1.2) dla grupy początkowo składającej się z $N_0 = 700$ oraz $N_0 = 1000$ cząstek. Schemat układu przedstawiony został na rys. 7.1. Oprócz przypomnienia notacji pokazana tam została przykładowa konfiguracja początkowa użyta w symulacjach numerycznych.

Model został zaimplementowany tak jak poprzednio (przy badaniu $N_0 = 700$). Początkowo grupa cząstek znajdowała się w odległościach $h/D = 0.75; 1; 1.5; 2.5; 3.5; 5; 6.5; 10; 15; 30; 70$ i ∞ od ściany. Dla każdej z odległości od ściany badane było 30 tych samych początkowych przypadkowych konfiguracji cząstek. W symulacjach badano ewolucję każdej z $N_0 = 1000$ kropli zawiesiny do czasu $T_k = 3920\tau$, gdzie τ zostało wcześniej zdefiniowane zgodnie z równaniem (3.26). W równaniu definiującym jednostkę czasu widoczna jest zależność od liczby cząstek. Ideą takiego wyboru



Rysunek 7.1. Schemat układu w chwili początkowej dla $N_0 = 1000$.

jednostek jest przenormowanie prędkości wszystkich kropli zawiesiny przez prędkość kropli płynu, o tym samym rozmiarze, na którą działa taka sama siła zewnętrzna (grawitacji minus wyporu).

h/D	destabilizacja na 2 krople	destabilizacja na 3 krople	brak destabilizacji	suma
∞	30	0	0	30
70	27	0	3	30
30	28	0	2	30
15	28	0	2	30
10	29	0	1	30
6.5	27	0	3	30
5	30	0	0	30
3.5	23	5	2	30
2.5	30	0	0	30
2	28	0	2	30
1.5	27	2	1	30
1	28	0	2	30
0.75	29	0	1	30

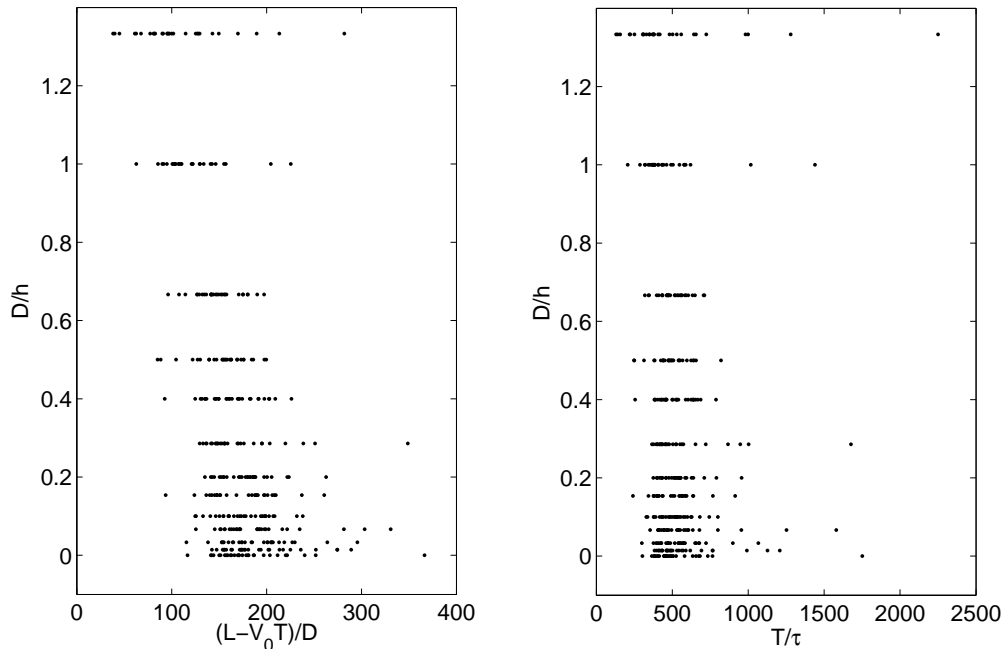
Tabela 7.1. Liczba kropli zawiesiny z zaznaczonym końcowym etapem ewolucji $T_k=3920\tau$ (model cząstek punktowych, dla $N_0 = 1000$).

Podstawowe informacje o destabilizacji opadającej kropli z początkową liczbą cząstek $N_0 = 1000$ zostały pokazane w tabeli 7.1 i porównane z tabelą 4.1 dla $N_0 = 700$. Analizując obie tabele wyników destabilizacji zauważono, że dla tak długich czasów liczba zliczonych destabilizacji jest porównywalna dla różnych odległości

od ściany. Gdyby badane były krótsze czasy opadania, zapewne istniałaby zależność spowodowana wpływem ściany na opadającą kroplę. Ewolucja kropli badana była dla dużych czasów, znacznie większych od największego czasu destabilizacji.

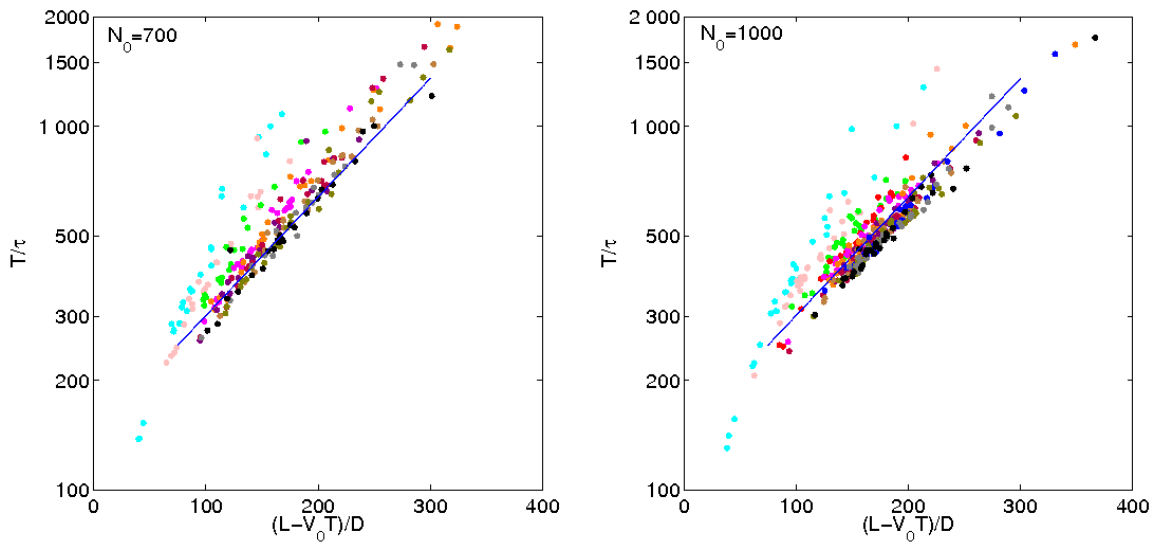
Na podstawie tabeli 7.1 widzimy, że dla $N_0 = 1000$ cząstek w kropli, 93% kropeł zdestabilizowało się na dwie krople, tylko 2% na trzy, natomiast 5% kropli nie uległo rozpadowi, natomiast w przypadku $N_0 = 700$, aż 23% nie zdestabilizowało się, 75% kropeł rozpadła się na dwa fragmenty w tym jedynie 2% na trzy fragmenty. Na tej podstawie można stwierdzić, że im więcej cząstek znajduje się w kropli, tym jest większe prawdopodobieństwo destabilizacji. Dokonując porównania wyników zawartych w Tab. 7.1 z wynikami Tab. 2 w pracy [15] dla nieograniczonej przestrzeni płynu widzimy, że wszystkie krople z $N_0 = 1000$ uległy destabilizacji.

Rys. 7.2 przedstawia rozrzuty wartości czasu i długości destabilizacji dla $N_0 = 1000$ które są jakościowo podobne do wyników otrzymanych dla $N_0 = 700$.



Rysunek 7.2. Długość i czas destabilizacji dla każdej pojedynczej opadającej kropli (dla $N_0 = 1000$).

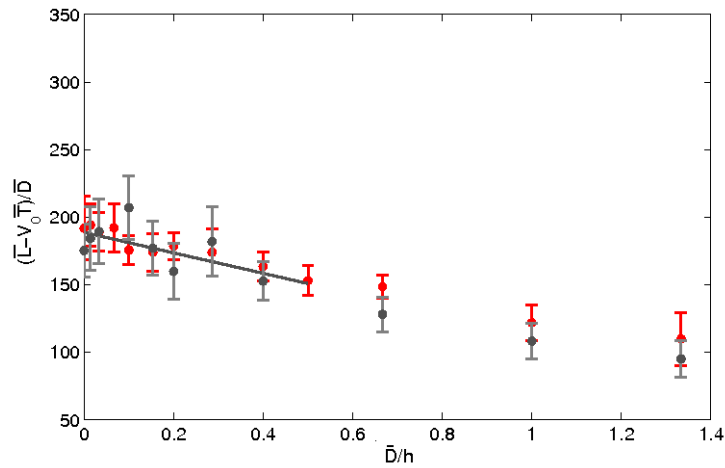
Wyznaczona została również statystyka długości i czasu destabilizacji dla każdej pojedynczej kropli. Postulowana wcześniej dla $N_0 = 700$ liniowa zależność T/τ w skali logarytmicznej od długości destabilizacji została teraz sprawdzona dla $N_0 = 1000$ cząstek. Prosta niebieska zaznaczona na rysunku 7.3 jest zgodna z równaniem $\ln T/\tau = 0.0078(L - V_0T)/D + 4.91$. Prosta ta została wyznaczona zgodnie z dopasowaniem dla uzyskanych wyników łącznie (dla $N_0 = 700$ oraz $N_0 = 1000$), pomijając wyniki dla $h/D = 0, 75; 1; 1, 5$. Dla obu wartości N_0 wyniki dla bliskich odległości od ściany odbiegają od pozostałych wartości, dlatego też podczas wyznaczania prostej nie były brane pod uwagę. Kropla opadająca bardzo blisko pionowej ściany oddziałuje z nią, powodując zmianę jej zachowania w porównaniu z kroplami opadającymi w dalszych odległościach od ściany. Na Rys. 7.3 zaznaczone zostały wyniki dla wszystkich odległości od ściany.



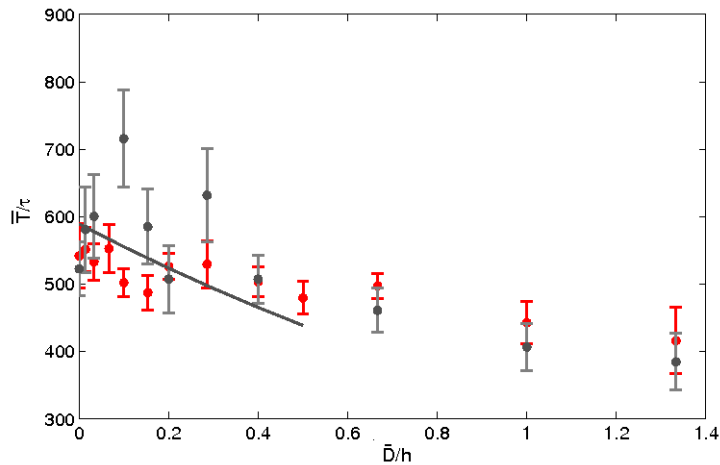
Rysunek 7.3. Średni czas destabilizacji kropli w zależności od odwrotności odległości od ściany. Wyniki dla początkowych poszczególnych odległości od ściany zaznaczono następującymi kolorami: $h/D = 0, 75$ ■, 1 ■, $1, 5$ ■, 2 ■, $2, 5$ ■, $3, 5$ ■, 5 ■, $7, 5$ ■, 10 ■, 15 ■, 30 ■, 70 ■, ∞ ■.

Na podstawie prostych zaznaczonych na rysunkach 7.3 widoczne jest, że wyniki dla $N_0 = 700$ oraz $N_0 = 1000$ różnią się nieco od siebie. Krople o większej liczbie cząstek mają nieco mniejsze czasy destabilizacji.

Wykres 7.4 przedstawia średnią długość destabilizacji kropli w zależności od odwrotności odległości od ściany dla $N_0 = 700$ (kolor szary), oraz $N_0 = 1000$ (kolor



Rysunek 7.4. Średnia długość destabilizacji kropli w zależności od odwrotności odległości od ściany dla dwóch rodzajów liczby cząstek w grupie. Oznaczono kolorem szarym wyniki dla $N_0 = 700$ oraz czerwonym dla $N_0 = 1000$.



Rysunek 7.5. Średni czas destabilizacji kropli w zależności od odwrotności odległości od ściany. Oznaczono kolorem szarym wyniki dla $N_0 = 700$ oraz czerwonym dla $N_0 = 1000$.

czerwony). Na wykresie tym, kolorem szarym została narysowana prosta dopasowana dla wartości średniej długości destabilizacji $N_0 = 700$. Dla $D/h \leq 0,6$ jest ona dobrym dopasowaniem również dla wyników uzyskanych dla $N_0 = 1000$. Wykres ten pokazuje, że w granicach błędów otrzymane wartości są porównywalne.

Zbadana została zależność czasu destabilizacji w funkcji odległości od ściany (patrz Rys. 7.5). Średni unormowany czas destabilizacji grupy zawierającej $N_0 = 700$

oraz $N_0 = 1000$ jest podobny, lecz jego rozrzut jest bardzo duży. Przez punkty można poprowadzić krzywą wynikającą ze złożenia dopasowań na wykresie 7.3 oraz wykresie 7.4. W połączeniu obu tych dopasowań uzyskana została krzywa o równaniu: $\log(\bar{T}/\tau) = -0.59\bar{D}/h + 6.38$. Została ona zaznaczona kolorem szarym. Dla $N_0 = 1000$ punkty układają się nieco bardziej płasko niż dla $N_0 = 700$. Wpływ liczby cząstek w kropli będzie tematem dalszych badań.

8. Ewolucja kropli zawiesiny

8.1. Prędkość kropli

Dla pojedynczej opadającej kropli zawiesiny oznaczonej indeksem i , składającej się z N cząstek, wyznaczona została jej prędkość:

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{v}_{i,\alpha}, \quad (8.1)$$

gdzie:

$\mathbf{v}_{i,\alpha}$ jest prędkością cząstki α opisaną równaniem (3.23).

Interesowała nas współrzędna $V_{i,x}$ w kierunku grawitacji. Obliczono prędkość dla każdej kropli wzdłuż x (kierunku grawitacji), następnie wyliczono średnią po $M = 30$ początkowych konfiguracjach:

$$V_x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_{i,x}. \quad (8.2)$$

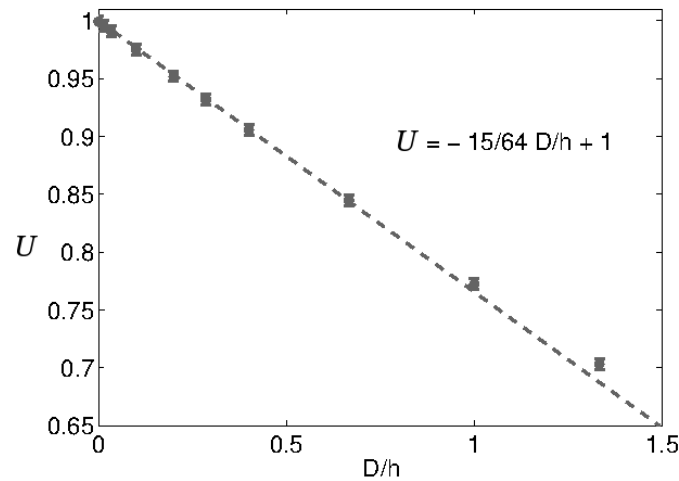
8.2. Prędkość kropli w chwili początkowej

Najpierw zbadana została zależność średniej początkowej prędkości $V_x(t = 0)$ kropli zawiesiny od początkowej odległości od ściany h . Wprowadziliśmy bezwymiarowe zmienne: D jako jednostkę długości, oraz v jako jednostkę prędkości opisaną wzorem (3.25). Teraz $V_x(t = 0)$ zostanie unormowane przez v i oznaczone:

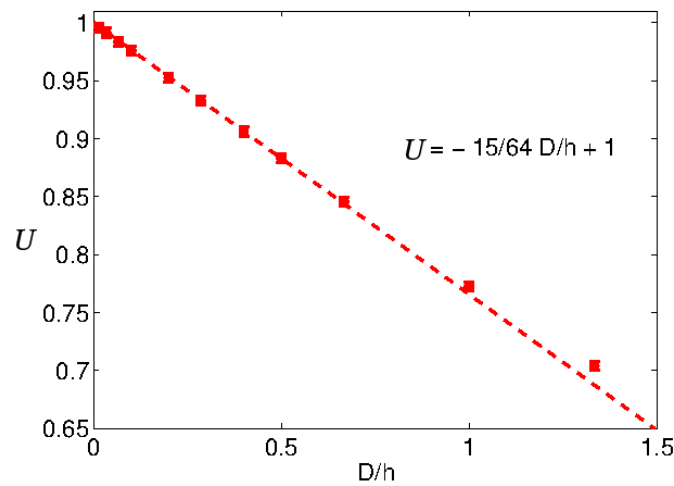
$$\frac{V_x(t = 0)}{v} = U \quad (8.3)$$

W obecności pionowej płaskiej ściany średnia początkowa prędkość opadającej kropli zawiesiny zmniejsza się wraz ze wzrostem odległości od ściany. Wyniki dla $N_0 = 700$

oraz $N_0 = 1000$ zostały przedstawione odpowiednio na wykresach 8.1, 8.2.



Rysunek 8.1. Prędkość początkowa U jest liniową funkcją D/h dla małych D/h ($N = 700$).
Linia przerywana: $U = -15/64 D/h + 1$.



Rysunek 8.2. Prędkość początkowa U jest liniową funkcją D/h dla małych D/h ($N = 1000$). Linia przerywana: $U = -15/64 D/h + 1$.

Na rysunku 8.1 oraz 8.2 prędkość U pokazana jest w zależności od D/h . Dla $D/h = 0$, czyli nieograniczonej przestrzeni płynu mamy $U \approx 1$. Dla małych wartości D/h , prędkość U jest liniową funkcją D/h . Współczynnik $-15/64$, wynika z

oddziaływania opadającej kropli z jej obrazem co jest opisane równaniem (3.22) z $F \rightarrow N_0 F$, przenormowanym przez (3.25).

8.3. Liczba cząstek wewnątrz kropli zawiesiny i prędkość w funkcji czasu

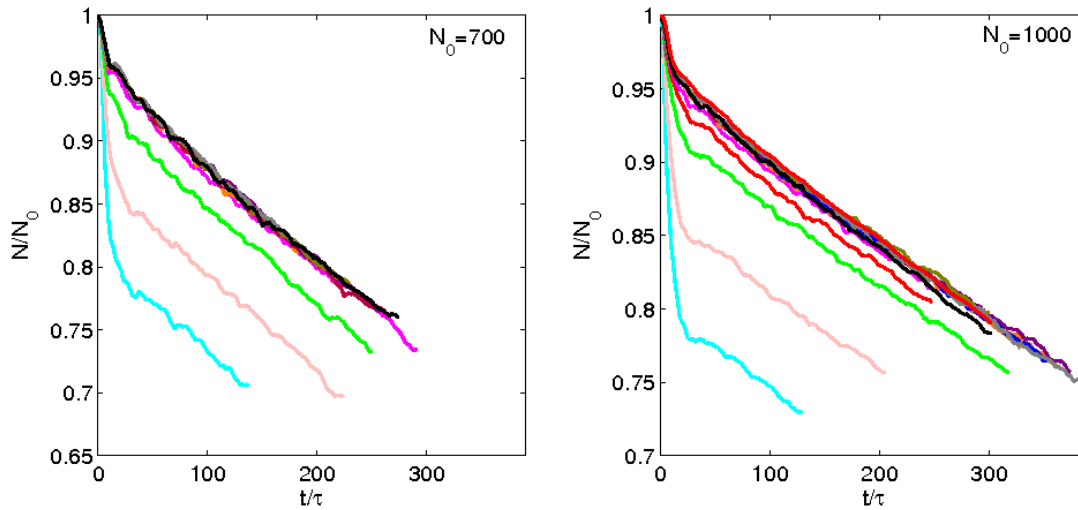
Przeprowadzone w ramach tej rozprawy doktorskiej doświadczenie nie przyniosło nam informacji o zmianie w czasie liczby cząstek pozostających wewnątrz kropli. Systematycznych danych o liczbie cząstek nie ma w literaturze, ponieważ prowadzenie takich badań eksperymentalnych jest bardzo trudne. Takie informacje można uzyskać na podstawie wyników numerycznych.

Podczas analizy numerycznej ewolucji obu kropel (tj. $N_0 = 700$ oraz $N_0 = 1000$ cząstek) bardzo istotna była procedura, którą nazywamy „odcinaniem ogona”. Procedura ta polega na znalezieniu składowej x środka masy opadającej kropli oraz odległości tego środka od najniższego punktu w kierunku grawitacji. Następnie odległość między środkiem a minimalnym położeniem na osi x (patrz Rys. 7.1) została odłożona na osi w kierunku przeciwnym do grawitacji. W miejscu odłożonej odległości wstępnie ustalamy górną granicę kropli. Cała procedura ustalania granicy wykonywana była wielokrotnie. W każdym kroku czasowym procedura wykonywana była początkowo na wszystkich cząstkach. Z każdym powtórzeniem odcinane były najbardziej odległe cząstki, które były wykluczone z dalszych obliczeń dla danego kroku czasowego. Dla pozostałych cząstek operacja wyznaczania środka masy i odległości była powtarzana. W każdym powtórzeniu środek masy przesuwał się w kierunku grawitacji, a odległość między nim a najniższym punktem malała. Odcinane były cząstki powyżej ustalonej granicy. Operacja była wykonywana do momentu kiedy kolejne powtórzenie nie odcięło żadnej cząstki. Do pliku zapisywane były tylko położenia i prędkości cząstek znajdujących się wewnątrz kropli. W przypadku analizy danych wykonanej w pracy [15] odcinacz cząstek był zrobiony tak by zostawiać tylko cząstki znajdujące się w odległości środka masy nie większej niż $D/2$, co może

powodować pewne różnice między naszymi wynikami a zawartymi w pracy [15].

Jak dotąd w tej pracy nie został wyznaczony wpływ liczby cząstek na proces destabilizacji. Zastanawiające jest jak zmienia się w czasie liczba cząstek w opadającej grupie? Zostanie to zbadane w tym rozdziale. W pierwszym etapie ewolucji opadająca kropla jest sferyczna, następnie od czasu do czasu cząstki odrywają się od kropli zawiesiny. Dlatego też liczba cząstek wewnątrz takiej kropli systematycznie maleje, co jest widoczne na rysunku 8.3.

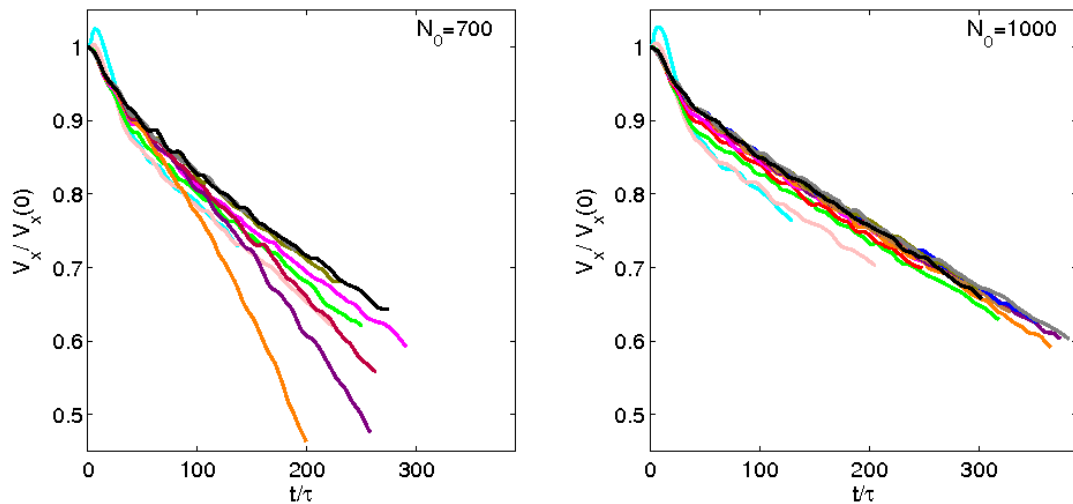
Rys. 8.3 przedstawia zależność od czasu liczby cząstek wewnątrz kropli uśrednionej



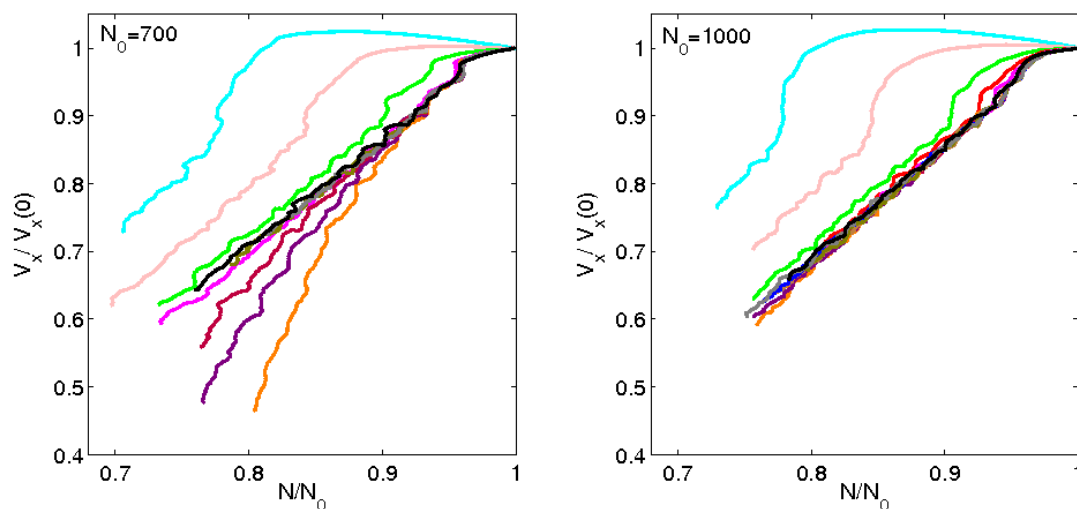
Rysunek 8.3. Liczba cząstek zawartych wewnątrz kropli znormalizowana przez początkową liczbę cząstek w zależności od czasu. Wyniki dla początkowych poszczególnych odległości od ściany zaznaczono następującymi kolorami: $h/D = 0,75$ ■, 1 ■, 1,5 ■, 2 ■, 2,5 ■, 3,5 ■, 5 ■, 7,5 ■, 10 ■, 15 ■, 30 ■, 70 ■, ∞ ■.

po konfiguracjach. Dla $t/\tau \geq 50$, na obu wykresach dane układają się wzdłuż prostych z nachyleniem w przybliżeniu $-1/2N_0$. Wartość współczynnika kierunkowego jest taka sama dla wszystkich odległości od ściany.

Z powodu utraty cząstek średnia prędkość grupy cząstek V_x opisana równaniem (8.1) oraz (8.2) maleje w czasie (patrz Rys. 8.4). Chwilowa prędkość V_x opadającej grupy w funkcji liczby chwilowej cząstek N pozostałych w grupie zostały przedstawione na Rys. 8.5. Krople opadające blisko ściany zachowują się inaczej niż dla większych odległości, mianowicie na początku kropla nabiera prędkości a później szybko ją traci, jest to pokazane dla obu liczb cząstek. Prędkość opadającej kropli



Rysunek 8.4. Prędkość kropli w zależności od czasu. Wyniki dla początkowych poszczególnych odległości od ściany zaznaczono następującymi kolorami: $h/D = 0,75$ ■, 1 ■, 1,5 ■, 2 ■, 2,5 ■, 3,5 ■, 5 ■, 7,5 ■, 10 ■, 15 ■, 30 ■, 70 ■, ∞ ■.



Rysunek 8.5. Zależność unormowanej prędkości do liczby cząstek pozostających w grupie w danej chwili czasu. Wyniki dla początkowych poszczególnych odległości od ściany zaznaczono następującymi kolorami: $h/D = 0,75$ ■, 1 ■, 1,5 ■, 2 ■, 2,5 ■, 3,5 ■, 5 ■, 7,5 ■, 10 ■, 15 ■, 30 ■, 70 ■, ∞ ■.

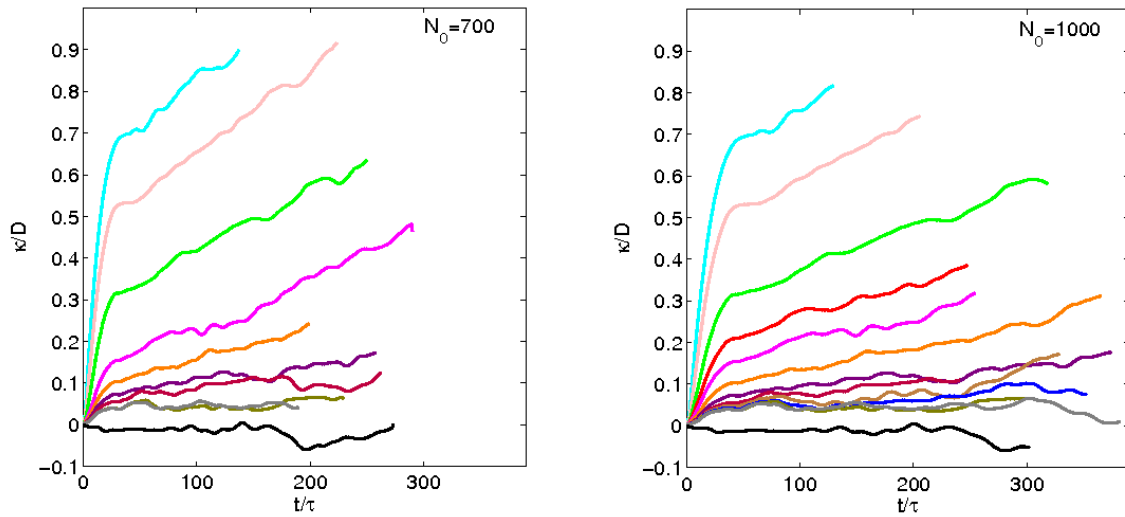
przedstawiono również w funkcji liczby cząstek. Rys. 8.5 pokazuje, że dla małych odległości od ściany kropla zachowuje się inaczej.

8.4. Oddalanie się kropli od ściany

Na podstawie analizy numerycznej zauważono, że krople opadając oddalają się od ściany. Pojawia się pytanie: Czy każda opadająca kropla oddala się od ściany? Czy podczas opadania odległość od ściany będzie się zmieniać? Czy istnieje jakaś charakterystyka odległość, na którą oddala się kropla zawieszony? Chcieliśmy ilościowo zbadać proces oddalania. Zdefiniowany został parametr mówiący o odległości na jaką oddala się kropla, jako:

$$\kappa/D = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\bar{x}_i - h) / D, \quad (8.4)$$

gdzie: \bar{x}_i - jest chwilowym położeniem środka masy kropli o indeksie i . Wartość parametru κ wykreślono w funkcji czasu: Porównując wyniki (patrz Rys. 8.6) przy



Rysunek 8.6. Oddalanie się kropli od ściany. Wyniki dla początkowych poszczególnych odległości od ściany zaznaczono następującymi kolorami: $h/D = 0, 75$ (cyan), 1 (pink), $1, 5$ (green), 2 (red), $2, 5$ (magenta), $3, 5$ (orange), 5 (purple), $7, 5$ (dark red), 10 (brown), 15 (blue), 30 (olive), 70 (grey), ∞ (black).

różnych N_0 widzimy, że efekt oddalania jest tym większy, im bliżej ściany początkowo znajduje się kropla.

Część V

Wnioski końcowe

Tematem rozprawy doktorskiej było eksperymentalne i numeryczne przealizowanie wpływu płaskiej pionowej ściany na dynamikę kropli zawiesiny opadającej grawitacyjnie w lepkiem płynie przy małych liczbach Reynoldsa. Początkowo duża liczba cząstek tworzących kroplę była rozłożona zgodnie z losowym równomiernym rozkładem wewnątrz sfery wypełnionej tym samym płynem który ją otaczał na zewnątrz.

W przypadku doświadczenia i symulacji numerycznych typowy charakter ewolucji kropli jest jakościowo taki sam w przypadku obecności ściany i bez niej: opadająca kropla na początku ewolucji jest sferyczna, zaczyna gubić cząstki, spłaszcza i rozszerza się, tworzy się torus, w pewnym momencie następuje dzielenie się torusa na dwa bądź więcej fragmentów.

Główny efekt jest taki, że w obecności ściany, kropla zawiesiny rozpada się szybciej i pokonuje mniejszy dystans zanim się rozpadnie. W pracy tej zostało pokazane, że średni czas \bar{T} i odległość \bar{L} destabilizacji są mniejsze dla mniejszej odległości h od środka kropli do ściany. Pokazana została liniowa zależność \bar{T} i \bar{L} od \bar{D}/h , dla h większego lub porównywalnego do średnicy kropli D .

Badania przeprowadzone w tej pracy były wyzwaniem zarówno eksperymentalnym jak i numerycznym. Wykonywanie pomiarów w glicerynie jest trudne, z powodu znacznego wpływu temperatury na lepkość, oraz higroskopijność gliceryny.

Pomimo tego, że założenia eksperymentu były bardzo proste i dla kropeł opadających daleko od ścian takie eksperymenty były już wykonywane i przedstawione w licznych publikacjach, to o ile wiem do tej pory żadne ilościowe systematyczne pomiary charakterystycznych cech ewolucji kropli nie były przeprowadzone. W ogólności nie były przeprowadzane doświadczenia dla bliskich ścian. Jednym z głównych powodów jest trudność w kontrolowaniu początkowego promienia kropli. W badaniach problem ten został rozwiązany poprzez użycie specjalnie zaprojektowanego przez grupę Günтера Brenna z Austrii generatora kropli. W rezultacie było możliwe

przeprowadzenie systematycznych badań czasu i długości destabilizacji kropli.

Wyniki numeryczne zostały uzyskane przy użyciu modelu cząstek punktowych dla przepływów Stokesa. Taki model był wcześniej często stosowany, ale tylko w nieograniczonym płynie. W pracy skonstruowany i zastosowany został model cząstek punktowych w pobliżu płaskiej pionowej ściany. Dla identycznych sił punktowych równoległych do ściany model ten jest bardzo prosty, ponieważ dynamika cząstek nie zależy od średnicy cząstek.

Porównanie wyników numerycznych z eksperymentalnymi potwierdza, że model cząstek punktowych jest dostatecznie dobry dla wyznaczenia głównych obserwowanych cech dynamiki kropli zawiesiny. Jest to bardzo praktyczny wniosek ponieważ bardziej dokładne symulacje numeryczne, np. bazujące na pełnych kodach multipolowych (takie jak HYDROMULTIPOLE), które biorą pod uwagę oddziaływanie hydrodynamiczne pomiędzy powierzchniami cząstek są o wiele bardziej czasochłonne oraz wymagają dodatkowego parametru (promień cząstki), oraz specjalnych procedur aby uniknąć kłopotów numerycznych związanych ze sztucznym przenikaniem się cząstek (patrz referencje cytowane w pracy [25]).

Wyzwaniem jest również porównanie pomiędzy modelem cząstek punktowych i doświadczeniem. Z założeń teoretycznych i przykładowych prac z literatury wiadome jest, że model ten ze względu na prostotę jest powszechnie używany, jednak jest zbyt prosty aby dokładnie odtworzyć wszystkie cechy dynamiki np. prędkość opadania kropli [49]. Dlatego też ta praca doktorska może być również postrzegana jako badania nad oszacowaniem dokładności modelu cząstek punktowych.

Dla danej odległości od ściany, średnie czasy destabilizacji obserwowane w eksperymentach i obliczone w symulacjach są mniej więcej takie same. W doświadczeniu długość destabilizacji jest większa niż w symulacjach z różnicą nieprzekraczającą 30% w przypadku daleko od ściany i malejąca wraz ze zmniejszaniem się odległości między kroplą a ścianą. W doświadczeniu uśrednione po czasie prędkości kropeł są

zatem nieco większe niż w symulacjach cząstek punktowych, szybsze krople pokonują większe odległości jeśli destabilizują się w tym samym czasie. Krople podczas ewolucji stopniowo tracą cząstki, więc prędkości kropel maleją w czasie. Można zatem postawić hipotezę, że w eksperymentach mniejszy ułamek cząstek jest pozostawiony z tyłu kropli niż w symulacjach. Innymi słowy postawić hipotezę, że krople w eksperymentach miały tendencję do zatrzymywania większej części z początkowej liczby cząstek i to może dlatego jako większe poruszały się szybciej niż krople w symulacjach. Efekt ten może być spowodowany przez oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy powierzchniami bliskich cząstek, które trzymają je razem mocniej niż w przypadku cząstek punktowych. Taki stabilizujący efekt lubrykacji pomiędzy powierzchniami cząstek był pokazany i przedyskutowany w pracy [50].

Aby sprawdzić tą hipotezę wartościowe byłoby przeprowadzenie pomiaru liczby sferycznych cząstek zgubionych w ogonie oraz porównanie tego wyniku z wynikiem symulacji cząstek punktowych. Ewolucja kropel, które zawierałyby cząstki sferyczne, może być przeprowadzona eksperymentalnie albo przy pomocy dokładnych metod numerycznych, na przykład w oparciu o algorytmy multipolowe do rozwiązywania równań Stokesa HYDROMULTIPOLE [51].

Interesującym wynikiem jest statystyczny rozkład czasów i długości destabilizacji. Dla różnych początkowych losowych konfiguracji cząstek poszczególne wartości zarówno T i L znacznie różnią się od siebie z powodu chaotycznej natury dynamiki cząstek. Taki efekt jest obserwowany w symulacjach i doświadczeniu. Można postawić hipotezę, że mniejszy rozrzut wartości w eksperymentach może być wyjaśniony przez wpływ bliskich powierzchni cząstek, które oddziałują ze sobą lubrykacyjnie zmniejszając tempo wzrostu małych zaburzeń.

Rezultaty otrzymane w tej pracy mogą być użyte w praktycznych zastosowaniach takich jak opadanie grup mikrocząstek, opadania kropli mleka lub tuszu, transport cząstek w mikrokanałach lub w pobliżu ścian pojemnika. Istotne są również dla zrozumienia podstawowych cech dynamiki grup cząstek, które oddziałują ze sobą

tylko hydrodynamicznie podczas opadania pod wpływem grawitacji.

Dodatki

A. Sposób ustawienia generatora kropli oraz procedura wykonywania pomiarów w doświadczeniu I.2

Celem opisu jest pokazanie jak należy ustawić generator, aby generowane krople były identyczne. W dodatku tym opisane zostanie jak działa generator i jak to się dzieje, że krople są określonej wielkości. Opisana zostanie również cała procedura pomiarowa.

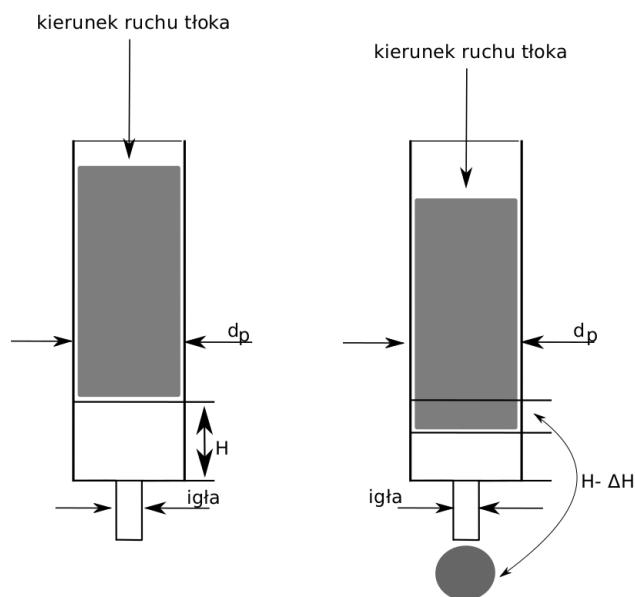
A.1. Ustawienie generatora

Zasada działania urządzenia została schematycznie przedstawiona na Rys. A.1. Rysunek ten przedstawia jedynie wnętrze urządzenia, bo to ono jest najważniejsze. Szarym kolorem zaznaczony został tłok, który służył do wypchnięcia określonej porcji zawiesiny poprzez cylinder. Na końcu tłoka umieszczona była gumeczka pomagająca dokładniej zbierać zawiesinę ze ścianek. Wysokość ΔH , jest wysokością jaką ma zajmować zawiesina, natomiast objętość dla tej wysokości jest objętością kropli. Ruch tłoka jest kontrolowany za pomocą czasomierza, za pomocą którego można dokładnie ustawić jakie będzie ΔH odległość o jaką przesunie się tłok (patrz Rys. A.2). Ruch postępowy tłoka jest sprzężony z ruchem obrotowym tłoka tak, żeby był on kontrolowany przez odpowiednio ustawiony zasilacz (patrz rys. A.3).

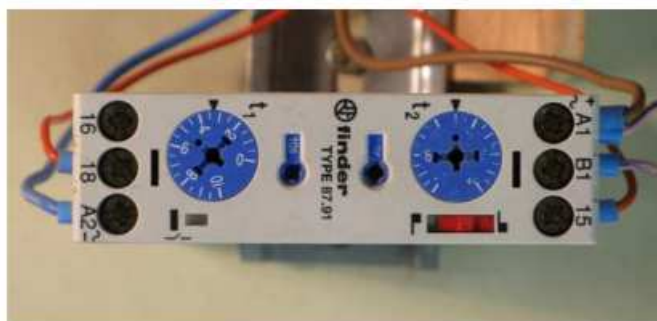
Podczas doświadczenia generowane były krople o średnicy $D = 1mm$, przy wartościach parametrów podanych w tabeli A.1.

D [mm]	V [mm ³]	d_P [mm]	A_P [mm ²]	ΔH [mm]	I [mm]	I_n
1	0.52360	3	7.06858	0.07407	0.0075	9.88

Tabela A.1. Wartość parametrów ustawienia generatora kropli.



Rysunek A.1. Schemat generatora.



Rysunek A.2. Czasomierz.

W tabeli A.1 użyto następujących oznaczeń:

V - jest objętością kropli,

d_p - średnica cylindra,

A_p - powierzchnia tłoka poruszającego się w generatorze,

V_p - objętość płynu wypchniętego z cylindra podczas tworzenia jednej kropli,

ΔH - wysokość o jaką przesunie się tłok w celu wygenerowania kropli o objętości V ,

I - wysokość o jaką przesunie się tłok po jednym obrocie,

I_n - liczba obrotów tłoka w celu wygenerowania jednej kropli.



Rysunek A.3. Zasilacz.

Znane są zależności między parametrami:

$$V = \frac{\pi D^3}{6},$$

$$A_P = \frac{\pi d_P^2}{4},$$

$$V_P = A_P \cdot \Delta H.$$

Dla wygenerowania kropli o danej objętości, zachodzi równość:

$$V = V_p \longrightarrow \Delta H = \frac{V}{A_P},$$

więc liczba kroków jaką musi wykonać tłok:

$$I_n = \frac{\Delta H}{l}.$$

Podczas wykonywania doświadczenia generator został ustawiony na 50Hz i czas $t = 0.2\text{s}$ w celu uzyskania kropli o średnicy 1mm . Czas t jest czasem ruchu tłoka.

Jeśli ktoś chciałby generować większe krople takie jak $D = 2$ lub 3mm , należy zmienić parametry na pokazane w tabeli A.2

D [mm]	V [mm ³]	d _P [mm]	A _P [mm ²]	ΔH[mm]	I	I _n
2	4.18879	3	7.06858	0.59259	0.0075	79.01
3	14.13717	3	7.06858	2.00000	0.0075	266, 67

Tabela A.2. Przykładowe parametry ustawienia generatora kropli dla $D = 2$ lub $3mm$.

A.2. Procedura pomiarowa

Procedura pomiarowa ruchu pojedynczej kropli rozpoczynała się od (jeśli pomiar był wcześniej wykonany) usunięcia pozostałych cząstek z poprzedniego pomiaru (cząstek tworzących ogon podczas opadania). Jak kropla opada, to pozostawia po sobie małe szklane cząstki powyżej (tworzące za sobą tak zwany „ogon“). Jak kończy się pomiar to zanim te malutkie cząstki opadną na dno to przez jakiś są one zawieszony w cieczy. W takich warunkach nie można wykonać kolejnego pomiaru, ponieważ obecność szkalnych cząstek zakłóci pomiar. Ten „ogon“ można usunąć poprzez mieszanie za pomocą długiego pręta. Następnie zapobiegając temu, by gliceryna się nie uwadniała, przykrywano akwarium. W kolejnym etapie wymieszano i napełniono przyrząd do generowania kropli (chwila startu procedury pomiarowej $tt = 00 : 00 : 00s$ gdzie oznaczamy czas pomiaru godzina: minuta: sekunda ”milisekunda”). Ustawiony został zasilacz na odpowiednią częstotliwość w zależności od pomiaru ($tt = 00 : 00 : 00s 30''$). Sposób ustawiania ilości kroków generatora i innych parametrów dla kropli o średnicy $1mm$, znajduje się w Dodatku A.1. Generowano najpierw próbną kroplę po to, żeby kropla, która będzie mierzona miała dobrze określony ułamek objętościowy. Dlatego po odkryciu akwarium ($tt = 00 : 00 : 00s 40''$), została wygenerowana próbna kropla w miejscu odległym do miejsca w którym będzie wykonywany pomiar ($tt = 00 : 00 : 20s$), próbna kropla nie była już dalej mierzona. Ta czynność miała na celu wygenerowania kropli o zadanym ułamku objętościowym.

Istota tego polegała na tym, że tłok zaopatrzony na czubku w gumeczkę podczas wypychania kropli zbierał ze ścianek cylindra cząstki, które mogły zapychać igłę. Mogło to zmieniać ułamek objętościowy. Dlatego podczas napełniania cylindra przez wielokrotne napełnianie i wypompowywanie zawiesiny, oraz generowanie kropli daleko od miejsca pomiaru, wyeliminowana została możliwość utworzenia się korka z cząstek.

Ustawiono mechanizm spustowy w odpowiednim miejscu akwarium, w odległości h od ściany ($tt = 00 : 00 : 25s$), uruchomiono program, który operował kamerą ($tt = 00 : 00 : 30s$), kropla została wygenerowana ($tt = 00 : 00 : 31s$). W momencie generowania kropli włączony został stoper. Ruchoma platforma, na której umieszczona była kamera pozwalała na ruch kamery w płaszczyźnie pionowej. W akwarium na tylnej ścianie była umieszczona podziałka. Służyła ona do odczytywania długości destabilizacji i wykonania testów w szczególności na długości y (patrz Rys. 2.6). Gdy kropla wchodziła w zakres y , włączano drugi stoper dla zmierzenia czasu t (pomiar trwa minimum $25s$) ($tt = 00 : 00 : 75s$).

Po zmierzeniu t można było zabrać generator kropli aby przykryć akwarium. Podczas trwania pomiarów, operowano kamerą, obserwowano zachowanie kropli i gdy kropla wychodziła z zakresu y zatrzymywano stoper drugi ($tt = 00 : 02 : 05s$). W pewnym momencie kropla ulega destabilizacji, zatrzymywany jest pierwszy stoper, odczytywany jest czas $T[s]$ i odczytywana długość $L[mm]$ na jakiej znalazła się kropla ($tt = 00 : 15 : 00s$). Zapisywano wszystkie wartości i zakończono program kamery kończąc pomiar. Wszystkie te czynności były powtarzane w 202 eksperymentach, dla różnych wartości h .

B. Wyznaczenie nielosowych i statystycznych błędów w doświadczeniu I.2

Celem tego dodatku jest wyjaśnienie sposobu oszacowania błędów w doświadczeniu I.2 umieszczonych na rysunkach 2.10, 2.11, 6.5 oraz 6.4. Błędy statystyczne są zaznaczone na Rys. 2.11 oraz 6.5 kolorem czarnym. Błędy nielosowe dotyczą jedynie czasu destabilizacji. Wartości błędów nielosowych są zaznaczone na Rys. 2.11 i 6.5 na szaro. Dla każdego pomiaru $i = 1, \dots, n$ o stałej wartości ϕ , D , h , błąd statystyczny wartości średniej $\bar{\chi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_i$, (za χ podstawiając L lub T , otrzymano wartości \bar{L} i \bar{T} , które umieszczono w tabeli 2.3) został obliczony za pomocą równania

$$S_{\chi} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie:

$$\sigma_x = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\chi_i - \bar{\chi})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.2})$$

Podczas doświadczenia obserwowaliśmy duże fluktuacje mierzonych wartości T , będziemy je nazywać błędami nielosowymi. Mogło to być związane ze zmianami temperatury z dnia na dzień, konwekcją płynu, wodą na powierzchni gliceryny, lub innymi czynnikami. Błędy nielosowe zostały oszacowane w następujący sposób. Najpierw obliczona została średnia wartość mierzona w określonych dniach $k = 1, \dots, m$,

$$\bar{\chi}_k = \frac{1}{i_k} \sum_{i=1}^{i_k} \chi_{i,k} \quad (\text{B.3})$$

gdzie $i = 1, \dots, i_k$ oznacza liczbę doświadczeń wykonanych w dniu k .

Obliczono odchylenie standardowe:

$$\sigma_{\chi_k} = \sqrt{\frac{1}{i_k - 1} \sum_{i=1}^{i_k} (\chi_{i,k} - \bar{\chi}_k)^2}, \quad (\text{B.4})$$

następnie zostały użyte odpowiednie wagi $w_k = \frac{1}{\sigma_{\chi_k}^2}$ z pomiarów przeprowadzonych w dniu k , aby obliczyć średnią wartość χ i jej odchylenie standardowe:

$$\bar{\chi}_w = \frac{\sum_{k=1}^m \chi_k w_k}{\sum_{k=1}^m w_k}, \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{sy} = \left(\frac{1}{m - 1} \sum_{k=1}^m (\chi_k - \bar{\chi}_w)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.6})$$

Na koniec wyznaczamy błąd nielosowy jako średnią σ_{sy} po wszystkich takich odległościach h , dla których dokonano pomiarów w różnych dniach.

C. Program numeryczny dla modelu cząstek punktowych

Celem tego dodatku jest pokazanie jak zostały rozwiązane układy równań (3.16) oraz (3.24) za pomocą programu MATLAB. Układy równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu w programach numerycznych mogą być rozwiązane na wiele sposobów, a dobranie najlepszego sposobu ich rozwiązywania zależy od samych równań. W programie MATLAB występuje wiele metod - funkcji pozwalających rozwiązywać równania numerycznie. Metoda *ode23* - rozwiązuje nie-sztywne zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych metodą Runge-Kutta rzędu 2 i 3; *ode45* - rozwiązuje nie-sztywne zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych metodą Runge-Kutta rzędu 4 i 5; *ode113* - rozwiązuje nie-sztywne zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych zwyczajnych metodą Adams-Bashforth-Moulton [52], metodą liniową wielokrotnego kroku; *ode15s* - metoda oparta na formule numerycznego różniczkowania, równania sztywne, metoda Gear's liniowa wielokrotnego kroku; *ode23s* - metoda oparta na zmodyfikowanej formule Rosenbrocka 2 rzędu, rozwiązanie sztywne; *ode23t* - równania umiarkowanie sztywne, reguła trapezu, rząd 2 i 3; *ode23tb* - równania sztywne, metoda Runge-Kutta, rzędu 2 i 3. Równania sztywne to takie, w których przy nieodpowiednio dobranym kroku całkowania lokalne rozwiązanie numeryczne może się bardzo szybko zmieniać, chociaż prawdziwe rozwiązanie zmienia się dużo wolniej. W takich problemach bardzo istotny jest odpowiedni dobór kroku całkowania.

Układ równań (3.24) jest układem nie-sztywnym. W programie Matlab mamy trzy metody rozwiązujące takie układy *ode23*, *ode45* oraz *ode113* [53]. W celu dobrania odpowiedniej metody całkowania naszego zagadnienia początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych, gdzie wartość kroku dobierana będzie automatycznie,

wykonano testy.

Najpierw przetestowano metody pod względem czasu ich wykonywania, a wybrane wyniki tych testów przedstawiono w tabeli C.1. Na podstawie tych wyników,

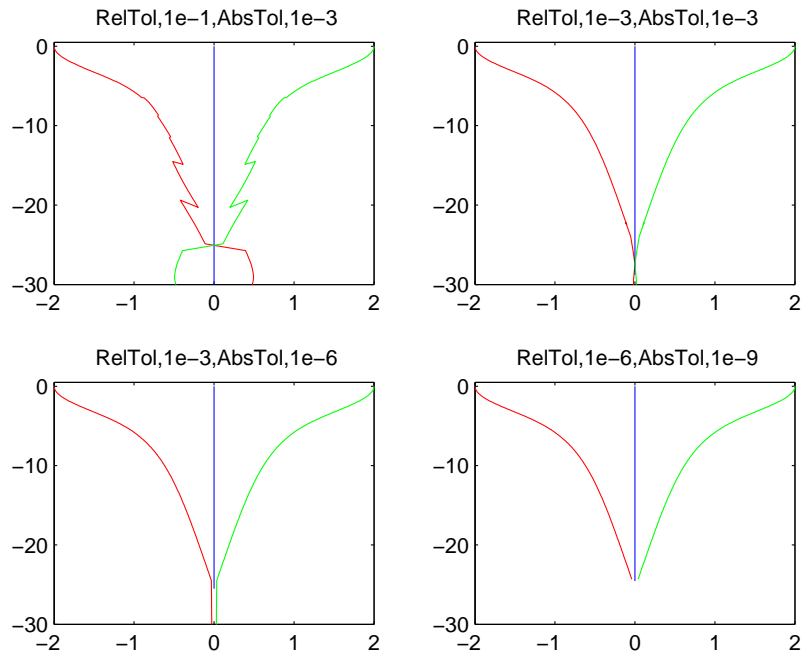
położenia początkowe cząstek	ode23	ode45	ode113
$(0\ 0\ -2), (0\ 0\ \sqrt{7}), (0\ 0\ 2)$	0.547730 s	0.364421 s	0.186049 s
$(0\ 0\ -2), (0\ 0\ 0), (0\ 0\ 2)$	0.028142 s	0.034897 s	0.023952 s
$(0\ 0\ 0), (0\ 0\ 1), (-\sqrt{3}/2\ 0\ -1/2)$	0.072314 s	0.033694 s	0.031064 s
$(0\ 1/2\ -1), (0\ 0\ \sqrt{3}/2), (1\ 0\ 1/3)$	0.114077 s	0.035702 s	0.030649 s
$(0\ 0\ 0), (0\ 0\ -1), (0\ \sqrt{3}/2\ 1/2)$	0.166628 s	0.032075 s	0.028935 s
$(2\ 0\ 0), (0\ -1\ 0), (1\ 1\ 1)$	0.088944 s	0.033837 s	0.025079 s

Tabela C.1. Testy czasów wykonywania obliczeń różnymi metodami całkowania.

widzimy, że metoda *ode113* wykonuje się najszybciej i ta metoda została w tej pracy zastosowana. Przetestowano ją pod względem dokładności dla konfiguracji znanej z literatury [54, 55]. Wiadomo, że dla tej konfiguracji potrzebny jest staranny wybór metody i jej dokładności aby uniknąć sztucznych „przeskoków cząstek”.

Przeprowadzono test dla konfiguracji początkowej: $(0, 0, -2), (0, 0, 0), (0, 0, 2)$, przy zakresie czasu $[0\ 200]$, otrzymano w ten sposób wykresy przedstawione na Rys. C.1. Wybrano taką konfigurację ponieważ w oparciu o literaturę [50, 55] wiadomo że, przy pewnych ułożeniach początkowych cząstek, cząstki mogą zachowywać się w sposób niefizyczny. Po to by uniknąć sztucznych wyników [54], należy dobrać odpowiednią dokładność numeryczną. Dokładność programu opisuje opcja: *RelTol* oraz *AbsTol*. Gdzie: *RelTol* oznacza oszacowanie błędu względnego liczone na krok, natomiast *AbsTol* oszacowanie maksimum błędu względnego. Oszacowanie błędu *RelTol* polega na wyznaczeniu różnicy pomiędzy poszczególnymi wartościami i podzieleniu jej przez bezwzględną początkową wartość zmiennej. Przy czym *AbsTol* oznacza jedynie różnicę pomiędzy poszczególnymi wartościami iteracji.

Na wykresie C.1 pokazany jest sposób dobierania tych opcji dokładności. Dopiero przy ustawieniu '*RelTol*' $\leq 1e - 6$, '*AbsTol*' $\leq 1e - 9$, uzyskany został poprawny wynik.



Rysunek C.1. Wynik użytych opcji w metodzie *ode113*. Wykresy przedstawiają położenia (rozwiązania równań różniczkowych) w funkcji $x(z)$. Na osi pionowej zaznaczone zostały położenia współrzędnej 'x', a na osi poziomej 'z'. Siła grawitacji skierowana jest pionowo w dół.

Podsumowując wybrano metodę *ode113*, stosującą się do naszego układu równań. Metoda została przetestowana pod względem dokładności i szybkości rozwiązywania naszego problemu. Metoda ta jest bardzo stabilną i popularną procedurą.

Program napisany w MATLAB-ie ma następującą strukturę:

- `main.m` - główny plik rozwiązujący równania różniczkowe metoda *ode113*. Plik zawiera warunki początkowe i funkcję rozwiązującą, kod przedstawiający rozwiązanie. Istnieje możliwość zapisania otrzymanych wyników.
- `rownania.m` - m-plik zawiera złożenie wszystkich poniższych m-plików w celu opisanie całego układu równań. W pliku tym istnieje możliwość zapisania do pliku wartości prędkości.
- `gravitacja.m` - tworzy macierz siły grawitacyjnej wiążąc ją z ilością cząstek punktowych.
- `odleglosc.m` - wylicza odległości pomiędzy dwoma punktami.

- `odlegosci.m` - przygotowanie macierzy $(3; 3 * N_0 - 3; N_0)$ z wyliczonymi odległościami pomiędzy kolejnymi punktami. Dla każdego punktu jest przeznaczona jedna macierz $(3; 3N_0 - 3)$. W niej zawarte są macierze 3×3 o tej samej wartości określającej odległość pomiędzy dwoma punktami.
- `wspolrzedne.m` - przygotowanie położenia punktów w formie wektorów o wielkości $(3, 1)$.
- `nwspolrzednych.m` - (optymalizacja) Dla przyspieszenia działania programu współrzędne zapamiętywane są w 3 różnych wektorach I,J,X, gdzie I i J określają współrzędne a X przechowuje wartości. Po wykonaniu pętli tworzona jest z nich macierz przy użyciu funkcji `sparse`.

Spis literatury

- [1] G. Nagele. On the dynamics and structure of charge-stabilized suspensions. *Phys. Rap.*, 272:215–372, 1996.
- [2] J.K.G. Dhont. *An introduction to dynamics of colloids*. Elsevier Science, 1996.
- [3] G.G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 9:8, 1851.
- [4] R. Zwanzig. *Nonequilibrium statistical mechanics*. Oxford, 2001.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifszyc. *Hydrodynamika*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1994.
- [6] D. J. Acheson. *Elementary fluid Dynamics*. Jesus College, Oxford, 1990.
- [7] L. Prandtl. *Dynamika przepływów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1956.
- [8] S. Kim and S. J. Karrila. *Microhydrodynamics. Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, London, 1991.
- [9] P.N. Shankar and M. Kumar. Experimental determination of the kinematic viscosity of glycerol-water mixtures. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 444:573–581, 1994.
- [10] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1986.
- [11] J.J. Thomson and H.F. Newall. On the formation of vortex rings by drops falling into liquids, and some allied phenomena. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 39:417–435, 1885.
- [12] W. Rybczyński. Über die fortschreitende bewegung einer flussigen kugel in einem zahren medium. *Bull. Acad. Sci. Cracovie*, A:40–46, 1911.
- [13] J.S. Hadamard. Mouvement permanent lent d’une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 152:1735–1738, 1911.
- [14] K. Adachi, S. Kiriyama, and N. Yoshioka. The behavior of a swarm of particles moving in a viscous fluid. *Chem. Eng. Sci.*, 33:115–121, 1978.
- [15] B. Metzger, M. Nicolas, and É. Guazzelli. Falling clouds of particles in viscous fluids. *J. Fluid Mech.*, 580:283–301, 2007.

- [16] J. M. Nitsche and G. K. Batchelor. Break-up of a falling drop containing dispersed particles. *J. Fluid Mech.*, 340:161–175, 1997.
- [17] G. Machu, W. Meile, L. C. Nitsche, and U. Schaffinger. Coalescence, torus formation and break-up of sedimenting drops: experiments and computer simulations. *J. Fluid Mech.*, 447:299–336, 2001.
- [18] M. L. Ekiel-Jeżewska, B. Metzger, and É. Guazzelli. Spherical cloud of point particles falling in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 18:038104, 2006.
- [19] G. C. Abade and F. R. Cunha. Computer simulation of particle aggregates during sedimentation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196:4597–4612, 2007.
- [20] G. Subramanian and D. L. Koch. Evolution of clusters of sedimenting low-Reynolds-number particles with Oseen interactions. *J. Fluid Mech.*, 603:63–100, 2008.
- [21] T. Bosse, L. Kleiser, C. Haertel, and E. Meiburg. Numerical simulation of finite Reynolds number suspension drops settling under gravity. *Phys. Fluids*, 17:037101, 2005.
- [22] F. Feuillebois. Sedimentation in a dispersion with vertical inhomogeneities. *J. Fluid Mech.*, 139:145, 1984.
- [23] G. K. Batchelor. Low-reynolds-number bubbles in fluidised beds. *Archives of Mech.*, 26:339–353, 1974.
- [24] A.J.C. Ladd. *private communication*.
- [25] M. L. Ekiel-Jeżewska, T. Gubiec, and P. Szymczak. Stokesian dynamics of close particles. *Phys. Fluids*, 2008.
- [26] R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, drops, and particles*. Dover, 2005.
- [27] Z. Adamczyk. Particles at interfaces. interactions, deposition, structure. *Interface Science and Technology*, 9, 2006.
- [28] D. M. Broday and R. Robinson. Application of cloud dynamics to dosimetry of cigarette smoke particles in the lungs. *Aerosol. Sci. Technol.*, 37:510, 2003.
- [29] S. Hokputsaa, K. Jumela, C. Alexanderb, and S. E. Hardinga. Hydrodynamic characterisation of chemically degraded hyaluronic acid. *Carbohydrate Polymers*, 52:111–117, 2003.
- [30] M. Ramia, D. L. Tullock, and N. Phan-Thien. The role of hydrodynamic interaction in the locomotion of microorganisms. *Biophys J.*, 65:755–778, 1993.

- [31] Y. Imai T. Ishikawa, G. Sekiya and T. Yamaguchi. Hydrodynamic interactions between two swimming bacteria. *Biophys J.*, 93:2217–2225, 2007.
- [32] S. Vogel. *Life in moving fluids*. Princeton University Press, 1994.
- [33] M. Manga, J. Castro, K.V. Cashman, and M. Loewenberg. Rheology of bubble-bearing magmas. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 87:15–28, 1998.
- [34] M. Manga, H.A. Stone, and R.J. O’Connell. The interaction of plume heads with compositional discontinuities in the earth’s mantle. *Journal of Geophysical Research*, 98:19,979–19,990, 1993.
- [35] M. Manga and H.A. Stone. Interactions between bubbles in magmas and lavas: Effects of deformation. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 63:269–281, 1994.
- [36] R. C. Kerr, C. Meriaux, and J. R. Lister. Effect of thermal diffusion on the stability of strongly tilted mantle plume tails. *J. Geophys. Res.*, 113, 2008.
- [37] M. Schwabe, M. Rubin-Zuzic, S.Zhdanov, A.V. Ivlev, H. M. Thomas, and G. E. Morfill. Formation of bubbles, blobs, and surface cusps in complex plasmas. *Phys. Rev. Lett.*, 102:255005, 2009.
- [38] A. Myłyk and M. L. Ekiel-Jeżewska. How walls influence destabilization of a suspension drop settling under gravity in a viscous fluid? *Colloids Surf. A.*, 365:109–111, 2010.
- [39] F. Kohlrausch. *Fizyka laboratoryjna*. PWN, 1959.
- [40] H. Szydlowski. *Pracownia fizyczna*. PWN, 1973.
- [41] A. Myłyk, W. Meile, G. Brenn, and M. L. Ekiel-Jeżewska. Break-up of suspension drops sedimenting in a viscous fluid close to a wall. *Phys. Fluids*, 23:063302, 2011.
- [42] J. R. Blake. A note on the image system for a stokeslet in a no-slip boundary. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 70:303–310, 1971.
- [43] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press., 1967.
- [44] B. Cichocki and R. B. Jones. Image representation of a spherical particle near a hard wall. *Physical A*, 258:273–302, 1998.
- [45] B. Cichocki, R. B. Jones, R. Kutteh, and E. Wajnryb. Friction and mobility for colloidal spheres in stokes flow near a boundary: The multipole method and applications. *J. Chem. Phys.*, 112:2548, 2000.
- [46] J. R. Blake. Fundamental singularities of viscous flow. part i: The image systems in

- the vicinity of a stationary no-slip boundary. *Journal of Engineering Mathematics*, 8:23–29, 1973.
- [47] G.S. Perkins and R.B. Jones. Hydrodynamic interaction of a spherical particle with a planar boundary: II Hard wall. *Physica A*, 189:447–477, 1992.
- [48] I. M. Jànosi, T. Tèl, D. E. Wolf, and J. A. C. Gallas. Chaotic particle dynamics in viscous flows: The three-particle Stokeslet problem. *Phys. Rev. E*, 56(3):2858–2868, 1997.
- [49] S. Alabrudziński, M. L. Ekiel-Jeżewska, D. Chehata-Gòmez, and T. A. Kowalewski. Particle clusters settling under gravity in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 21:073302, 2009.
- [50] M. L. Ekiel-Jeżewska and E. Wajnryb. Equilibria for the relative motion of three heavy spheres in Stokes fluid flow. *Phys. Rev. E*, 73:046309, 2006.
- [51] B. Cichocki, M. L. Ekiel-Jeżewska, and E. Wajnryb. Lubrication corrections for three-particle contribution to short-time self-diffusion coefficients in colloidal dispersions. *J. Chem. Phys.*, 111:3265–73, 1999.
- [52] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in fortran*. Cambridge, 1992.
- [53] S. Osowski, A. Cichocki, and K. Siwek. *MATLAB w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2006.
- [54] Maria L. Ekiel-Jeżewska and Eligiusz Wajnryb. Lifetime of a cluster of spheres settling under gravity in stokes flow. *Phys. Rev. E*, 83:067301, Jun 2011.
- [55] M. L. Ekiel-Jeżewska and E. Wajnryb. Equilibria for the relative motion of three heavy spheres in Stokes fluid flow. *Phys. Rev. E*, 73(046309), 2006.