Rozwiazania chaotyczne równan rózniczkowych czastkowych

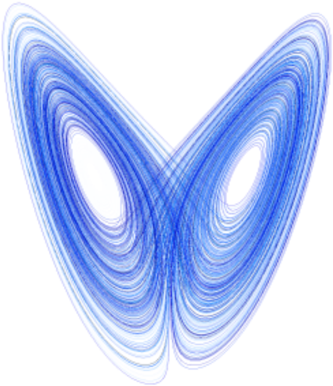
Mikołaj Karpiński

IPPT PAN

11 marca 2009

Układ Lorenza

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$$
$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy$$



Niech X będzie przestrzenią Banacha.

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

$u \in X$, $A : D(A) \to X$.

Półgrupy operatorów

Definicja

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Powiemy, że rodzina operatorów $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ na X, $T(t)\colon X \to X$ jest półgrupą jeżeli:

- $T(0) = Id$;
- $T(s)T(t) = T(s+t)$;

Jeśli ponadto spełniony jest warunek:

- $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ dla każdego $x \in X$;

to tę półgrupę nazwiemy mocno ciągłą.

Półgrupy operatorów

Definicja

Operator A z dziedziną
$D(A) = \{x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{istnieje}\}$ określony wzorem:

$$Ax = lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

$x \in D(A)$ nazywamy tworzącą albo generatorem półgrupy T.

Hipercykliczność i chaos

Definicja

Mocno ciągła półgrupa ograniczonych operatorów liniowych $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest:

- **hipercykliczna**, jeżeli istnieje taki $x \in X$, że zbiór $\{T(t)x \mid t \geqslant 0\}$ jest gęsty w X;

Hipercykliczność i chaos

Definicja

Mocno ciągła półgrupa ograniczonych operatorów liniowych $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest:

- **hipercykliczna**, jeżeli istnieje taki $x \in X$, że zbiór $\{T(t)x \mid t \geqslant 0\}$ jest gęsty w X;
- jeśli ponadto gęsty jest zbiór $\{x \in X \mid \exists t \geqslant 0, \text{ takie że } T(t)x = x\}$, to tę półgrupę nazwiemy **chaotyczną**.

Hipercykliczność i chaos

Oznaczmy przez:

- $X_0 = \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} T(t)x = 0\}$;

Hipercykliczność i chaos

Oznaczmy przez:

- $X_0 = \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} T(t)x = 0\}$;
- $X_\infty = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \exists w \in X \quad \exists t > 0,$ $\|w\| < \varepsilon, \quad \|T(t)w - x\| < \varepsilon\}$;

Hipercykliczność i chaos

Oznaczmy przez:

- $X_0 = \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} T(t)x = 0\}$;
- $X_\infty = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \exists w \in X \quad \exists t > 0,$ $\|w\| < \varepsilon, \quad \|T(t)w - x\| < \varepsilon\}$;
- $X_p = \{x \in X \mid \exists t > 0 \quad T(t)x = x\}$.

Hipercykliczność i chaos

Oznaczmy przez:

- $X_0 = \{x \in X \mid \lim_{t\to\infty} T(t)x = 0\}$;
- $X_\infty = \{x \in X \mid \forall \varepsilon > 0 \quad \exists w \in X \quad \exists t > 0,$ $\|w\| < \varepsilon, \quad \|T(t)w - x\| < \varepsilon\}$;
- $X_p = \{x \in X \mid \exists t > 0 \quad T(t)x = x\}$.

Twierdzenie

Niech $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ będzie mocno ciągłą półgrupą w ośrodkowej przestrzeni Banacha X. Jeżeli X_0 i X_∞ są gęste w X, to $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest hipercykliczna.

Hipercykliczność i chaos

Twierdzenie

Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, zaś A będzie generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ na X. Jeżeli:

- widmo punktowe A, $\sigma_p(A)$, ma niepuste wnętrze U spełniające warunek $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$;

Hipercykliczność i chaos

Twierdzenie

Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, zaś A będzie generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ na X. Jeżeli:

- widmo punktowe A, $\sigma_p(A)$, ma niepuste wnętrze U spełniające warunek $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$;
- istnieje selekcja przyporządkowująca każdej wartości własnej $\lambda \in U$ odpowiadający jej wektor własny x_λ w taki sposób, że dla każdego $\phi \in X^*$ funkcja $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, x_\lambda \rangle$ jest analityczna na U;

Hipercykliczność i chaos

Twierdzenie

Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, zaś A będzie generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ na X. Jeżeli:

- widmo punktowe A, $\sigma_p(A)$, ma niepuste wnętrze U spełniające warunek $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$;
- istnieje selekcja przyporządkowująca każdej wartości własnej $\lambda \in U$ odpowiadający jej wektor własny x_λ w taki sposób, że dla każdego $\phi \in X^*$ funkcja $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, x_\lambda \rangle$ jest analityczna na U;
- $F_\phi \equiv 0$ na U wtedy i tylko wtedy gdy $\phi = 0$;

Hipercykliczność i chaos

Twierdzenie

Niech X będzie ośrodkową przestrzenią Banacha, zaś A będzie generatorem mocno ciągłej półgrupy $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ na X. Jeżeli:

- widmo punktowe A, $\sigma_p(A)$, ma niepuste wnętrze U spełniające warunek $U \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$;
- istnieje selekcja przyporządkowująca każdej wartości własnej $\lambda \in U$ odpowiadający jej wektor własny x_λ w taki sposób, że dla każdego $\phi \in X^*$ funkcja $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, x_\lambda \rangle$ jest analityczna na U;
- $F_\phi \equiv 0$ na U wtedy i tylko wtedy gdy $\phi = 0$;

to półgrupa $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ jest chaotyczna.

Hipercykliczność i chaos

Dowód opiera się na obserwacji, że przy tych założeniach mamy wystarczająco dużo trajektorii postaci $T(t)x_\lambda = e^{\lambda t}x_\lambda$. Gdy:

Hipercykliczność i chaos

Dowód opiera się na obserwacji, że przy tych założeniach mamy wystarczająco dużo trajektorii postaci $T(t)x_\lambda = e^{\lambda t}x_\lambda$. Gdy:

- $\Re e \lambda < 0$ to trajektorie zmierzają do zera;

Hipercykliczność i chaos

Dowód opiera się na obserwacji, że przy tych założeniach mamy wystarczająco dużo trajektorii postaci $T(t)x_\lambda = e^{\lambda t}x_\lambda$. Gdy:

- $\Re e\lambda < 0$ to trajektorie zmierzają do zera;
- $\Re e\lambda = 0$ to trajektorie są okresowe;

Hipercykliczność i chaos

Dowód opiera się na obserwacji, że przy tych założeniach mamy wystarczjąco dużo trajektorii postaci $T(t)x_\lambda = e^{\lambda t}x_\lambda$. Gdy:

- $\Re e\lambda < 0$ to trajektorie zmierzają do zera;
- $\Re e\lambda = 0$ to trajektorie są okresowe;
- $\Re e\lambda > 0$ to możemy zapisać $x_\lambda = T(t)e^{-\lambda t}x_\lambda$, gdzie $e^{-\lambda t}x_\lambda$ zmierza do zera gdy $t \to \infty$.

Równanie

Rozpatrzmy półgrupę na $X = L^2([0,\infty),\mathbb{C})$ generowaną przez równanie:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= au_{xx}(x,t) + bu_x(x,t) + cu(x,t) \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \quad \text{i pewnego} \quad f \in X \end{aligned}$$

Równanie

Rozpatrzmy półgrupę na $X = L^2([0,\infty),\mathbb{C})$ generowaną przez równanie:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= au_{xx}(x,t) + bu_x(x,t) + cu(x,t) \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \quad \text{i pewnego} \quad f \in X \end{aligned}$$

Aby pokazać jej chaotyczność musimy pokazać, że:

- operator $A = au_{xx} + bu_x + cu$ jest generatorem mocno ciągłej półgrupy na X;

Równanie

Rozpatrzmy półgrupę na $X = L^2([0,\infty),\mathbb{C})$ generowaną przez równanie:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= au_{xx}(x,t) + bu_x(x,t) + cu(x,t) \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \quad \text{i pewnego} \quad f \in X \end{aligned}$$

Aby pokazać jej chaotyczność musimy pokazać, że:

- operator $A = au_{xx} + bu_x + cu$ jest generatorem mocno ciągłej półgrupy na X;
- istnieje otwarty podzbiór $U \in \sigma_p(A)$ spełniający warunek $U \cap i\mathbb{R}$;

Równanie

Rozpatrzmy półgrupę na $X = L^2([0,\infty),\mathbb{C})$ generowaną przez równanie:

$$\begin{array}{rcl} u_t(x,t) & = & au_{xx}(x,t) + bu_x(x,t) + cu(x,t) \\ u(0,t) & = & 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) & = & f(x) \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \quad \text{i pewnego} \quad f \in X \end{array}$$

Aby pokazać jej chaotyczność musimy pokazać, że:

- operator $A = au_{xx} + bu_x + cu$ jest generatorem mocno ciągłej półgrupy na X;
- istnieje otwarty podzbiór $U \in \sigma_p(A)$ spełniający warunek $U \cap i\mathbb{R}$;
- dla każdego $\phi \in X^*$ funkcja $F_\phi \colon U \to \mathbb{C}$ spełnia warunki twierdzenia.

Mocna ciągłość półgrupy

Można pokazać, że do tego by rozpatrywana półgrupa była mocno ciągła, wystarczy założenie $a, b > 0$.

Widmo punktowe

Szukamy wartości własnych operatora A, czyli funkcji $f_\lambda(x) \in X$ spełniających warunki:

- $af_\lambda'' + bf_\lambda' + cf_\lambda = \lambda f_\lambda$;
- $f_\lambda(0) = 0$.

Warunki te spełnia funkcja:

$$f_\lambda = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(e^{x\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{\lambda-c}{a}}} - e^{-x\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{\lambda-c}{a}}}\right).$$

Widmo punktowe

Szukamy wartości własnych operatora A, czyli funkcji $f_\lambda(x) \in X$ spełniających warunki:

- $af_\lambda'' + bf_\lambda' + cf_\lambda = \lambda f_\lambda$;
- $f_\lambda(0) = 0$.

Warunki te spełnia funkcja:

$$f_\lambda = e^{-\frac{b}{2a}x}\left(e^{x\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{\lambda-c}{a}}} - e^{-x\sqrt{(\frac{b}{2a})^2+\frac{\lambda-c}{a}}}\right).$$

Można pokazać, że funcja f_λ należy do $X = L^2$ jeśli spełnione są warunki:

- $\Re e(\lambda) < -\frac{a}{b^2}(\Im m(\lambda))^2 + c$
- $\Im m(\lambda) < c$

zbiór λ spełniających ten warunek oznaczmy przez V.

Widmo punktowe

Ponieważ chcemy by podzbiór widma przecinał oś urojoną, powyższe warunki dają nam warunek na c:

$$c > 0$$

Warunki na F_ϕ

Wybieramy podzbiór widma punktowego:

$$U = V \backslash \left\{ \lambda \in \mathbb{C} | \quad \Im(\lambda) = 0, \quad \Re(\lambda) \leqslant c - \frac{b^2}{4a} \right\}$$

Dla tego podzbioru można pokazać, że dla $\phi \in X^*$ funkcje $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, f_\lambda \rangle$ są analityczne oraz że są stale równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi = 0$.

Warunki na F_ϕ

Wybieramy podzbiór widma punktowego:

$$U = V \setminus \left\{ \lambda \in \mathbb{C} | \quad \Im(\lambda) = 0, \quad \Re(\lambda) \leqslant c - \frac{b^2}{4a} \right\}$$

Dla tego podzbioru można pokazać, że dla $\phi \in X^*$ funkcje $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, f_\lambda \rangle$ są analityczne oraz że są stale równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi = 0$.

Wniosek

Przy założeniach $a, b, c > 0$, rozwiązania równania:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= au_{xx}(x,t) + bu_x(x,t) + cu(x,t) \\ u(0,t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ u(x,0) &= f(x) \quad \text{dla} \quad x \geqslant 0 \quad \text{i pewnego} \quad f \in X \end{aligned}$$

są chaotyczne.

Równanie

Weźmy równanie:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= au_{xx}(x,t) + xu_x(x,t) + cu(x,t) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{i pewnego} \quad u_0 \in X \end{aligned}$$

gdzie $a > 0$, a $X = L^2(\mathbb{R})$.

Równanie

Weźmy równanie:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= a u_{xx}(x,t) + x u_x(x,t) + c u(x,t) \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{i pewnego} \quad u_0 \in X \end{aligned}$$

gdzie $a > 0$, a $X = L^2(\mathbb{R})$.

Korzystając z własności transformaty Fouriera problem chaotyczności rozwiązań tego zagadnienia jest równoważny problemowi chaotyczności rozwiązań:

Równanie 2

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(\xi,t) &= (-a\xi^2 + c - 1)\widehat{u}(\xi,t) - \xi \widehat{u}_\xi(\xi,t) \\ \widehat{u}(\xi,0) &= \widehat{u}_0(\xi) \end{aligned}$$

Rozwiązanie

Korzystając z metody charakterystyk:

$$\frac{d}{dt}\xi = \xi, \qquad \xi(0) = \xi_0$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{u} = ((c-1) - a\xi^2)\widehat{u}, \qquad \widehat{u}(0,\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot)$$

rozwiązujemy to równanie, dostając:

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}_0(\xi e^{-t})e^{(c-1)t - \frac{a\xi^2}{2}[1-e^{-2t}]}$$

Półgrupę generowaną przez to równanie oznaczmy przez $\{S_t\}_{t\geqslant 0}$

Topologiczna tranzytywność

Twierdzenie

Niech $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ będzie mocno ciągłą półgrupą liniową na ośrodkowej przestrzeni Banach X. Wtedy następujące warunki są równoważne:

- $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ jest hipercykliczna;
- dla wszystkich $y \in X$, $z \in X$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $v \in X$ oraz takie $t > 0$, że $\|y - v\| < \varepsilon$ i $\|z - T(t)v\| < \varepsilon$.

Topologiczna tranzytywność

Uwagi:

- skorzystamy z twierdzenia i pokażemy topologiczną tranzytywność;
- pokażemy ją dla funkcji z $L^2(0, +\infty)$;
- dla funkcji $f \in L^2(0, +\infty)$, których nośnik $\mathrm{supp} f \subset [a, b] \subset (0, +\infty)$ możemy przeprowadzić ewolucję "w tył", tzn.

$$S_{-t} f \in L^2(0, +\infty)$$

Topologiczna tranzytywność

Weźmy funkcje $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in L^2(0, +\infty)$, takie że $\mathrm{supp}\widetilde{f}_i \subset [a_i, b_i]$.

- dobieramy $T, g > 0$, tak by $[a_i, b_i] \subset [ge^{-T}, g]$;
- definiujemy $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1 + S_{-2T}\widetilde{f}_2$

Topologiczna tranzytywność

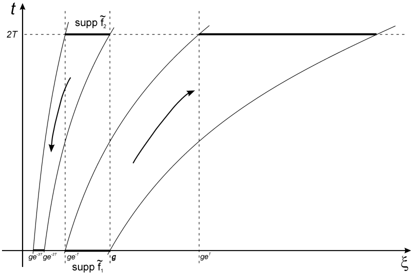
Weźmy funkcje $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in L^2(0, +\infty)$, takie że $\mathrm{supp}\widetilde{f}_i \subset [a_i, b_i]$.

- dobieramy $T, g > 0$, tak by $[a_i, b_i] \subset [ge^{-T}, g]$;
- definiujemy $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1 + S_{-2T}\widetilde{f}_2$

Wystarczy pokazać, że:

- $\|\widetilde{f} - \widetilde{f}_1\| = \|S_{-2T}\widetilde{f}_2\| < \varepsilon$
- $\|S_{2T}\widetilde{f} - \widetilde{f}_2\| = \|S_{2T}\widetilde{f}_1\| < \varepsilon$

Da się to uzyskać dla dostatecznie dużego T przy założeniu $c > \frac{1}{2}$.



Topologiczną tranzytywność

By pokazać topologiczną $\{S_t\}_{t \geqslant 0}$ trzeba zauważyć, że:

- każdą funkcję z $L^2(0, +\infty)$ można przybliżyć funkcją o zwarym nośniku oddzilonym od zera;
- podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla funkcji z $L^2(-\infty, 0)$, a rozwiązania te możemy "skleić".

Gęstość orbit okresowych

Analogicznie dowodzi się gęstości orbit okresowych:

- rozpatrujem najpierw przypadek $f \in L^2(0, +\infty)$;
- funkcję f przybliżamy funkcją $\widetilde{f}$ dla której $\mathrm{supp}\widetilde{f} \subset [a, b]$;
- definiujemy funkcję $\widetilde{u}_0$:
  1. $\widetilde{u}_0(\xi) = \widetilde{f}(\xi)$ dla $\xi \in (ge^{-T}, g)$;
  2. $\widetilde{u}_0(\xi) = 0$ dla $\xi \in (ge^{-2T}, ge^{-T})$;
  3. $\widetilde{u}_0$ jest punktem okresowym $\{S_t\}_{t \geqslant 0}$ o okresie $2T$
- pokazujemy, że dla dostatecznie dużego T spełniony jest warunek $\|\widetilde{u}_0 - \widetilde{f}\| \leqslant \varepsilon$