Warszawa, 15. 10. 2007

Doc. dr hab. Kazimierz Piechór
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Recenzja rozprawy doktorskiej p. mgr Małgorzaty Zdanowicz pt.

Analiza matematyczna równań modelujących plazmę w silniku jonowym

Celem rozprawy Pani Zdanowicz jest problem rozwiązalności (istnienia rozwiązań i ich jednoznaczności) zagadnień początkowo-brzegowych dla quasi-liniowych układów typu hiperbolicznego, których współczynniki przy pochodnych nie są, jak to zazwyczaj bywa, funkcjami od rozwiązań, ale mogą zależeć od nich w sposób funkcjonalny, np. mogą być całkami z poszukiwanych funkcji. Jako jedno ze źródeł tego rodzaju problemów autorka podaje równania opisujące plazmę w silniku Halla, gdzie wyrażenia na prąd elektronowy i temperaturę elektronów zawierają całki, w których występuje poszukiwana gęstość elektronów.

Rozprawa liczy łącznie 125 stron i składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów merytorycznych, dwóch dodatków, i spisu 36 najważniejszych pozycji literatury.

Rozdział pierwszy ma charakter rozdziału wprowadzającego. Jego celem jest pokazanie, na przykładzie plazmy w silniku Halla, że istnieją układy równań różniczkowych, będące modelami matematycznymi ważnych zagadnień techniki, w których występuje funkcjonalna zależność współczynników od rozwiązania. Podane jest kilka układów równań modelujących zachodzące tu zjawiska i przeprowadzono ich klasyfikację.

Rozdział drugi dotyczy dowodów twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia początkowego dla liniowego hiperbolicznego układu równań różniczkowych cząstkowych. Głównym celem tego rozdziału jest podanie wszystkich szczegółów dowodów twierdzeń pominiętych w monografii Rożdiestwieńkiego i Janienki „Układy równań quasi-liniowych i ich zastosowania w dynamice gazów", którą dalej będę oznaczał przez R J. Można powiedzieć, że wkład doktorantki polega na rozwiązaniu szeregu zadań, niekiedy niezupełnie trywialnych. Przykładem najpoważniejszego takiego zadania jest podrozdział 2.10, w którym rozważany jest przypadek, gdy lewe wektory własne macierzy współczynników przy pochodnej po zmiennej x są funkcjami o wahaniu skończonym.

Podobny charakter ma **rozdział trzeci** , w którym również podaje się te szczegóły dowodów, które zostały pominięte w monografii RJ. Tym razem chodzi jednak o przypadek znacznie trudniejszy, a mianowicie o analizę problemów istnienia rozwiązań i ich jednoznaczności dla quasi-liniowych układów równań hiperbolicznych. Już na wstępie przypadek ten staje się o wiele bardziej kłopotliwy od poprzedniego, gdyż obszar określoności, a więc obszar w którym poszukujemy rozwiązań, staje się znany dopiero wtedy, gdy znamy rozwiązanie. Ta sytuacja wymaga więc specjalnego postępowania, które w monografii R. J. jest tylko naszkicowane.

Następne dwa rozdziały, w których rozważane są nowe rzeczy, stanowią zasadniczą część rozprawy pani Zdanowicz.

Rozdział czwarty dotyczy istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla zagadnienia Cauchy'go dla quasi-liniowego układu równań, w którym elementami macierzy współczynników są wartości pewnych operatorów działających na niewiadome funkcje. Materiał zawarty w tym rozdziale stanowi, moim zdaniem, najważniejszą część rozprawy doktorskiej pani Zdanowicz. W rozprawie mgr. Zdanowicz podstawowymi założeniami są założenia $(A_1)-(A_5)$ ze strony 56. Założenia te jednak nie są sformułowane dla wyjściowego układu (4.1) ale dla układu (4.3), który nazywany jest układem w postaci charakterystycznej, a który powstał z układu wyjściowego (4.1) poprzez szereg nieliniowych transformacji. Takie postępowanie może i musi wywoływać wątpliwości, czy dla jakiegoś konkretnego układu w postaci (4.1), a zwłaszcza dla układów wprowadzonych w rozdziale pierwszym, odpowiadający mu układ w postaci charakterystycznej (4.3) będzie spełniać założenia $(A_1)-(A_5)$, lub inaczej, czy rozwiniętą w rozprawie teorię można stosować do danego rozważanego układu (4.1)?

W głównym zarysie, idea rozwiązania postawionego zagadnienia polega na adaptacji metod wypracowanych, i przedstawionych w rozdziale trzecim, dla układów quasi-liniowych z funkcyjną zależnością macierzy współczynników od rozwiązania. Można nawet ustalić pary odpowiadających sobie wzorów czy pojęć , np. (3.3) i (4.3) (czyli układy w postaci charakterystycznej), pojęcia układów przedłużonych (3.11), (3.12) i (4.10), (4.11), i kilka innych. Autorka dąży do podania dowodów pewnych lematów, które mają swoje odpowiedniki w przypadku klasycznym w rozdziale trzecim. Jednak teraz jest to o wiele trudniejsze. Zasadniczą bowiem różnicą o daleko idących konsekwencjach dla dowodów jest brak w rozdziale czwartym tzw. układu majoryzującego (3.14), (3.15), który w istotnym stopniu ułatwia analizę przypadku zależności funkcyjnej (rozdział trzeci). Dlatego wyniki obecnego rozdziału mimo pewnych oznak naśladownictwa uważam za istotne i twórcze osiągnięcia pani Zdanowicz.

Rozdział piąty ma tytuł nieco mylący, bo zapowiada on, że będą rozważane tylko układy liniowe, a przecież rozważane są też zagadnienia mieszane dla układów quasi-liniowych. Rozdział ten dotyczy zagadnienia nie mniej ambitnego niż poprzednio, a mianowicie zagadnienia mieszanego z nieliniowym, funkcjonalnym warunkiem brzegowym. Rozwiązań poszukuje się a prostokącie $0 \le t \le T_0, 0 \le x \le l$. Zasadniczym zagadnieniem wstępnym jest ilość charakterystyk przychodzących i wychodzących do każdego z boków prostokąta $0 \le t \le T_0, x=0$ lub $x=l$, gdyż od tego zależy ilość warunków, jakie można zadawać na każdym z tych boków. W rozprawie przyjmuje się upraszczające, ale uzasadnione, założenie że niektóre wartości własne macierzy współczynników są ściśle dodatnie, inne są ściśle ujemne w rozważanym obszarze zmiennych niezależnych (t,x), co gwarantuje, że docierają do odpowiednich boków, a pozostałe, jeżeli są, przechodzą przez górną podstawę rozważanego prostokąta. Rozważane są kolejno jedno równanie liniowe, układ trzech równań liniowych i układy liniowe o dowolnej kończonej ilości równań o diagonalnej i niediagonalnej macierzy współczynników. Dodatkowo autorka rozważa pokrótce, ale w sposób przekonujący, zagadnienie mieszane dla układu quasi-liniowego z funkcjonalną zależnością współczynników i warunków brzegowych od rozwiązań. Ten sposób postępowania jest moim zdaniem słuszny, gdyż pozwala czytelnikowi wyrobić sobie właściwą intuicję w tej subtelnej i zawiłej problematyce. Dowodzi się, przy pewnych dodatkowych założeniach, istnienia rozwiązań, które autorka nazywa uogólnionymi, a które częściej nazywane są łagodnymi (ang. *mild solution*) .Mając te rozwiązania dowodzi się, wzmacniając założenia, że istnieją również rozwiązania klasy C^1.

Uwagi ogólne o rozprawie

Rozprawa dotyczy podstawowych pytań, jakimi są kwestie istnienia rozwiązań i ich jednoznaczności, dla szerokiej klasy równań różniczkowych cząstkowych występujących w niektórych zagadnieniach biologii, fizyki, czy też techniki. Udzielenie odpowiedzi na te pytania nie jest rzeczą prostą ani łatwą, chociaż wiele ścieżek jest już przetartych. Sukcesem pani Zdanowicz jest udzielenie pełnej odpowiedzi na postawione pytania.