Prof. dr hab. Zbigniew Peradzyński
Instytut Matematyki stosowanej I Mechaniki
Uniwersytet Warszawski, i
Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk

Warszawa 14.10.2005

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Agnieszki Martens
pt.

„Hamiltonowskie i Kwantowe Układy z Symetriami i Więzami. Modele Nieliniowe i ich Zastosowania Fizyczne"

Praca doktorska mgr Martens o objętości około 90 stron, składająca się z czterech rozdziałów poświecona jest problemom zupełnie całkowalnych układów mechanicznych zarówno w wersji klasycznej jak i kwantowej, dla których przestrzenią konfiguracyjna jest grupa Liego. Dobrym przykładem takiego układu jest bąk sztywny. W tym przypadku przestrzenią konfiguracyjną jest grupa obrotów SO(3). W przypadkach rozpatrywanych w omawianej pracy jest to najczęściej grupa przekształceń afinicznych bądź ogólniej grupa przekształceń liniowych. Poza niewątpliwą z matematycznego punktu widzenia elegancją takiego sformułowania, dodatkową i ważną motywacją do podjęcia tego typu badań stanowi fakt, że uzyskane rezultaty stanowić mogą skończenie wymiarowe przybliżenia dynamiki ciał o dużej (nieskończonej) liczbie stopni swobody opisywanych przez ośrodek ciągły. A to, że przestrzeń konfiguracyjna jest odpowiednio dobraną grupą Liego pozwala uniknąć powszechnie czynionego założenia małych odkształceń.
Warto tu może zauważyć za Arnoldem, że idealna nieściśliwa hydrodynamika może być rozważana jako nieskończenie wymiarowy bąk na grupie diffeomorfizmów zachowujących objętość. Co więcej Arnold postuluje by takie nieskończenie wymiarowe układy dynamiczne, których przestrzenią konfiguracyjną jest grupa przybliżać przez układy skończenie wymiarowe także zdefiniowane na rozmaitościach grupowych. Tak, więc praca p. Martens wychodzi naprzeciw tym postulatom.

Omówienie pracy

W rozdziale pierwszym autorka wprowadza i omawia podstawowe pojęcia, formułuje model ciała afinicznie sztywnego. Jest to, więc układ mechaniczny, którego przestrzeń konfiguracyjna jest afiniczną lub liniową grupą przekształceń. Zostały tam również zebrane niezbędne narzędzia matematyczne używane dalej w pracy dotyczące mechaniki hamiltonowskiej. Przedstawiono metodę obliczania zmiennych działania opartą na całkowaniu konturowym w płaszczyźnie zespolonej oraz omówione zostały podstawy kwantyzacji Bohra-Sommerfelda oraz główne idee kwantyzacji Schrödingerowskiej na rozmaitościach Riemanna. . Ścisłe sformułowanie kwantowej wersji zagadnienia, oparte na podejściu Schroedingerowskim bazuje na przestrzeni Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem względem miary indukowanej przez tensor metryczny użyty w wyrażeniu dla klasycznej energii kinetycznej. Podobnie, kwantowy operator energii kinetycznej jest wyrażony przez operator Laplace'a – Beltramiego zbudowany w oparciu o wspomniany tensor metryczny.

Rozdział drugi podobnie jak rozdział pierwszy, poświęcony jest zebraniu i omówieniu narzędzi matematycznych używanych w głównej części pracy. Dotyczy to zwłaszcza metody wielomianów Sommerfelda. W przypadku układów o dobrze określonej strukturze teorio-grupowej, ze znanymi grupami symetrii, pozwala to na rozwiązanie zagadnienia własnego w języku funkcji specjalnych, w tym - funkcji specjalnych na grupach Liego.

Główną część pracy zawierająca nowe wyniki stanowią rozdziały 3 i 4.

Tak wiec w **Rozdziale trzecim** autorka zajmuje się klasyczną i kwantową mechaniką bryły sztywnej z dylatacjami, a więc obiektu, którego przestrzeń konfiguracyjna daje się utożsamić z grupą Weyla, tj. iloczynem prostym grupy obrotów i grupy dylatacji. Rozpatrzono też „spinorowe" rozszerzenie tego modelu, zastępując grupę obrotów przez jej grupę nakrywającą SU(2). Znalezione zostały zmienne działania i przedyskutowano zagadnienia degeneracji. Szczególną uwagę poświęcono modelom z potencjałami „typu Bertranda", dla których dynamika ruchu obrotowego jest całkowicie zdegenerowana. Szczegółowej analizie poddano przypadki potencjałów umożliwiających ścisłe rachunki analityczne, a jednocześnie ciekawe z fizycznego punktu widzenia. Wyznaczono quasi-klasyczne poziomy energetyczne Bohra-Sommerfelda. W celu wyznaczenia zmiennych działania posłużono się metodą całkowania zespolonego opracowaną przez Maxa Borna. W oparciu o metodę wielomianów Sommerfelda udało się podać ścisłe rozwiązanie zagadnienia kwantowego dla potencjałów użytych w zagadnieniu klasycznym i przeanalizować degenerację problemu. Okazało się, że jak to często ma miejsce w zagadnieniach o wysokiej symetrii i jasnej strukturze geometrycznej, występuje tu wyraźna odpowiedniość między widmem kwantowym a quasi-klasycznym widmem Bohra-Sommerfelda. W rozdziale tym położono szczególny nacisk na potencjały kombinujące całkowicie zdegenerowane modele Bertranda dla bąka kulistego z odpowiednimi potencjałami sprężystymi dla dylatacji.

W rozdziale czwartym omówiono zagadnienia związane z dynamiką dwuwymiarowego ciała afinicznie sztywnego. W tym przypadku przestrzenią konfiguracyjną jest (GL(2, **R**). W szczególności rozważane były modele z izotropowym tensorem bezwładności oraz izotropowym potencjałem sprężystym (tzn. zależącym tylko od niezmienników deformacji). Okazuje się, że istotną rolę odgrywa wtedy wybór właściwych współrzędnych uogólnionych i wygodnie posługiwać się wtedy tzw. „rozkładem dwubiegunowym", polegającym na tym, że macierz reprezentującą konfigurację afiniczną przedstawiamy w postaci iloczynu trzech macierzy: ortogonalnej, diagonalnej i pewnej innej ortogonalnej. Dla ciała o izotropowym momencie bezwładności pozwala to zredukować problem klasyczny do dwóch stopni swobody (niezmienników deformacji). To samo udało się także autorce przeprowadzić na poziomie kwantowym. Wyznaczono rodzinę potencjałów pozwalających na klasyczną i kwantową separację zmiennych związanych z deformacjami, które jednocześnie wydają się mieć szansę na użycie w realistycznych modelach drgań sprężystych tak klasycznych jak i kwantowanych. Podobnie jak w przypadku 3-wymiarowego bąka z dylatacjami, znaleziono dla tych potencjałów