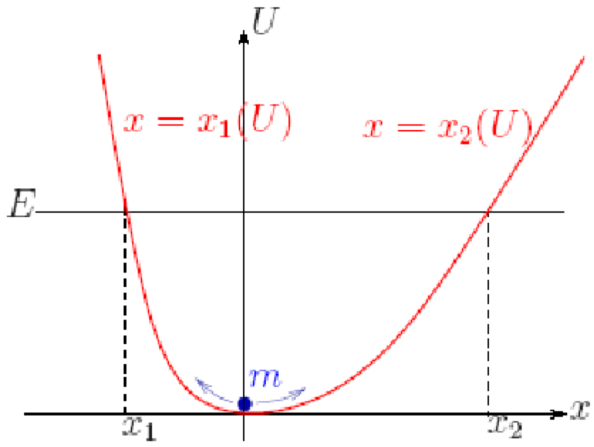
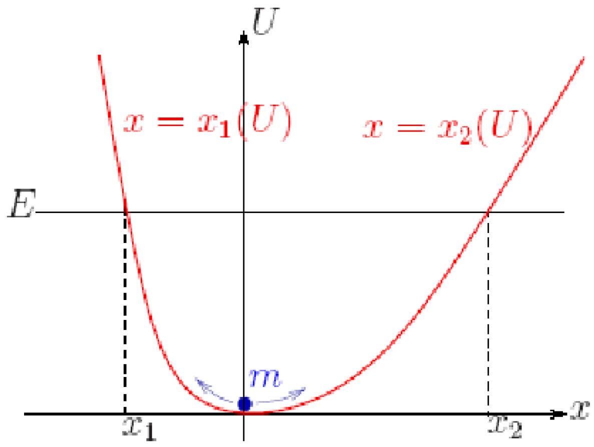
Zagadnienie odwrotne w rozpraszaniu na potencjale i w rozpadzie Gamowa

Spis treści

Problem klasyczny



Problem klasyczny

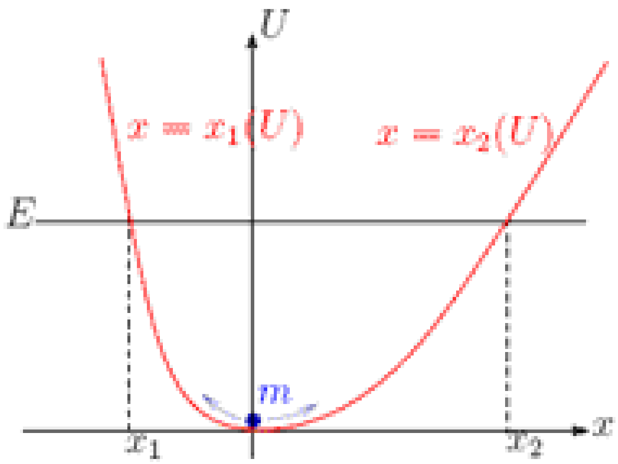


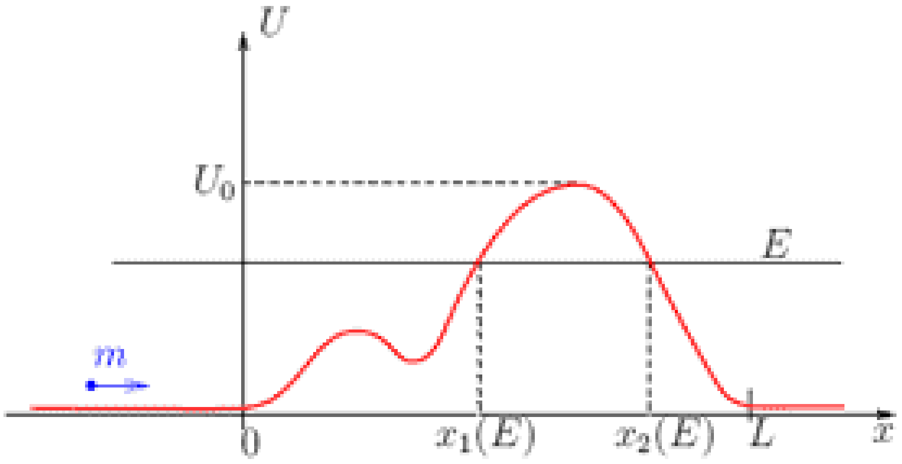
$$T(E)=\sqrt{2\mathrm{m}}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2\mathrm{m}}}\int_0^U\frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}$$

$$x(\tilde{U})=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\mathrm{m}}}\int_0^{\tilde{U}}\frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\tilde{U}-E}}$$

Problem klasyczny



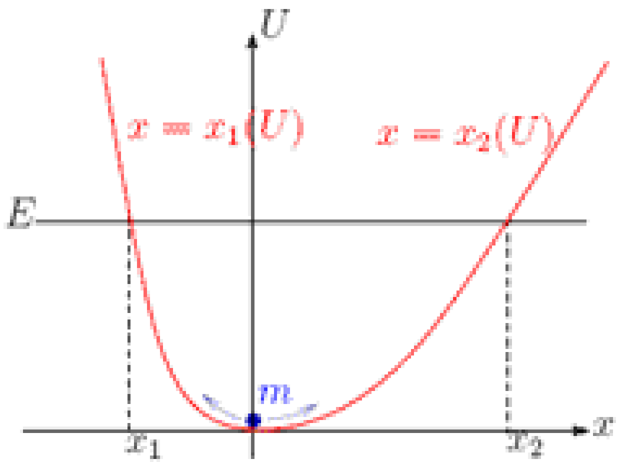


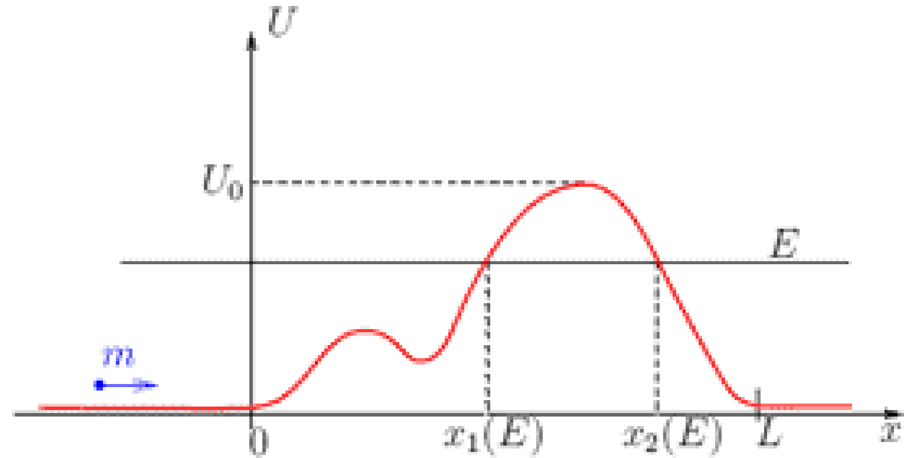
$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}$$

$$x(\tilde{U})=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^{\tilde{U}}\frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\tilde{U}-E}}$$

Problem klasyczny





$$T(E)=\sqrt{2\mathrm{m}}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$$

$$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2\mathrm{m}}}\int_0^U\frac{T(E)\,dE}{\sqrt{U-E}}$$

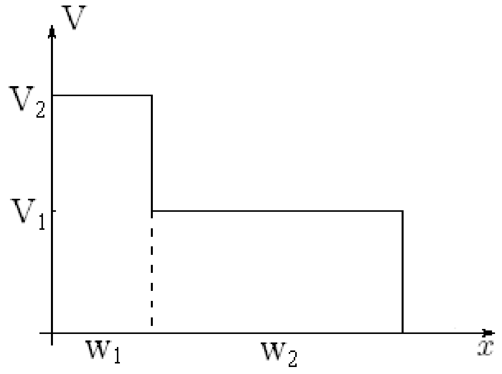
$$x(\tilde{U})=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\mathrm{m}}}\int_0^{\tilde{U}}\frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\tilde{U}-E}}$$

$$T(E)=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^L\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\qquad (E>U_0)$$

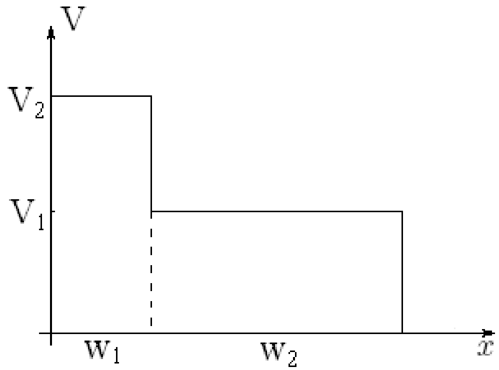
$$R(E)=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_1(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\qquad (E\le U_0)$$

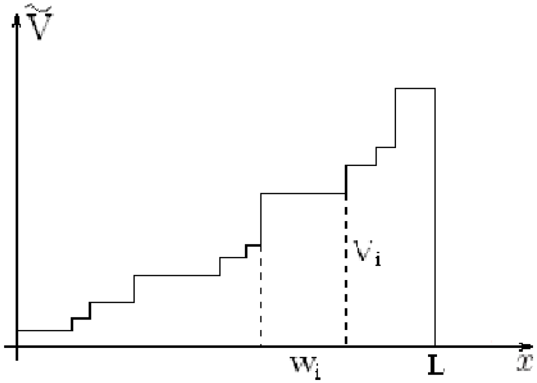
$$x(\tilde{U})=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{\tilde{U}}\frac{R(E)\,dE}{\sqrt{\tilde{U}-E}}$$

Potencjał kanoniczny

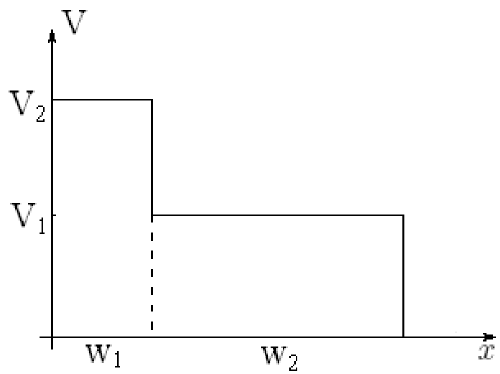


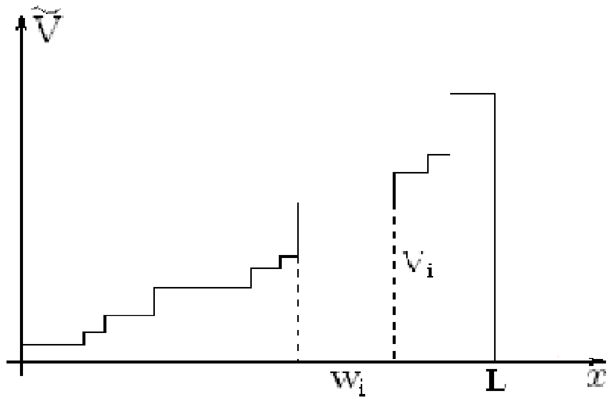
Potencjał kanoniczny





Potencjał kanoniczny





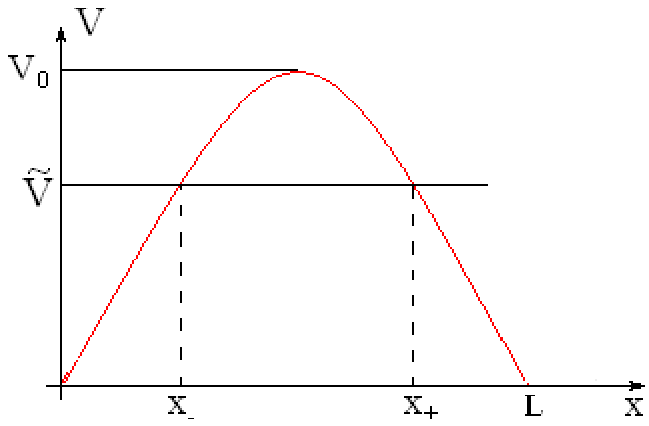
$$T(E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^L \sqrt{E - \tilde{V}(x)}\, dx = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{V_0} \sqrt{E - \tilde{V}}\, \frac{dx}{d\tilde{V}}\, d\tilde{V}$$

$$T(E) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{V_0} \int_0^L \sqrt{E - \tilde{V}}\, \delta[\tilde{V} - V(x)]\, dx\, d\tilde{V} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^L \sqrt{E - V(x)}\, dx$$

Potencjał kanoniczny

a).Parabola zadana wzorem:

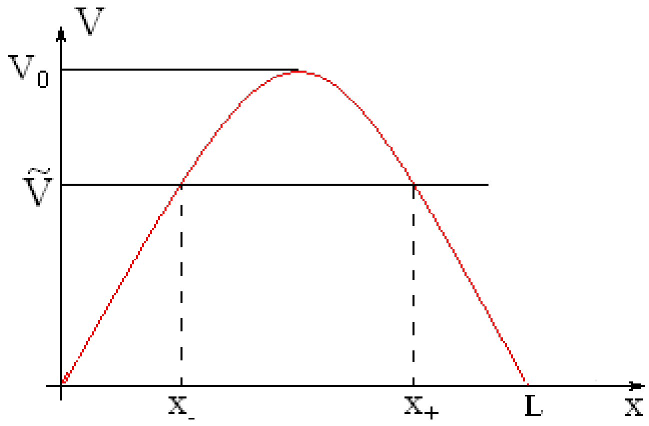
$$V(x) = 4V_0\left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$



Potencjał kanoniczny

a).Parabola zadana wzorem:

$$V(x) = 4V_0\left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$



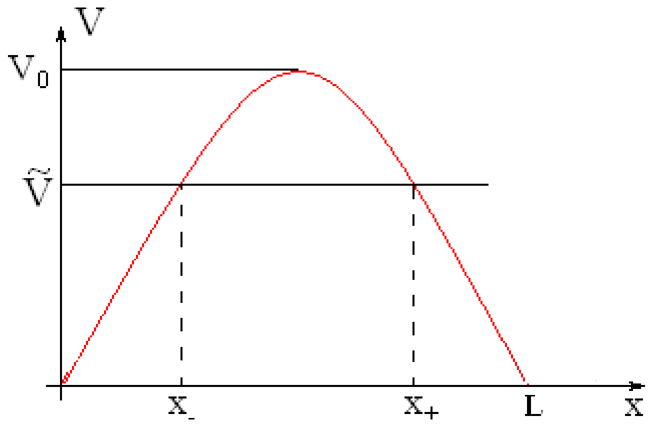
wartości punktów:

$$x_{\pm} = \frac{L}{2}\left[1 \pm \left[1 - \frac{\tilde{V}}{V_0}\right]^{(1/2)}\right]$$

Potencjał kanoniczny

a).Parabola zadana wzorem:

$$V(x) = 4\mathrm{V}_0\left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$



wartości punktów:

$$x_{\pm} = \frac{L}{2}\left[1 \pm \left[1 - \frac{\tilde{V}}{V_0}\right]^{(1/2)}\right]$$

$$x(\tilde{V}) = (L - x_+) + (x_- - 0)$$

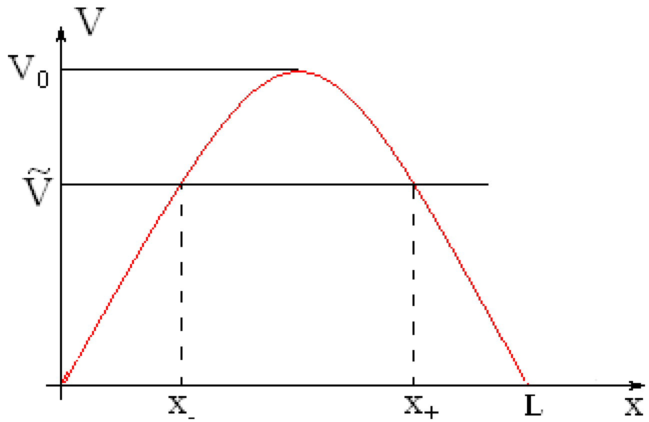
Po dokonaniu odwrócenia powyższego wzoru otrzymamy potencjał kanoniczny postaci:

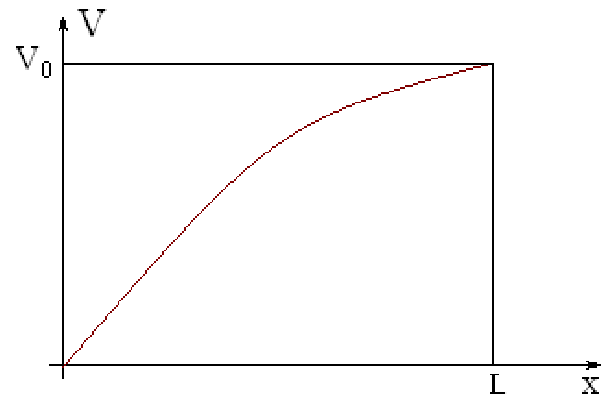
$$\tilde{V}(x) = V_0\left[2\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

Potencjał kanoniczny

a).Parabola zadana wzorem:

$$V(x) = 4V_0\left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$





wartości punktów:

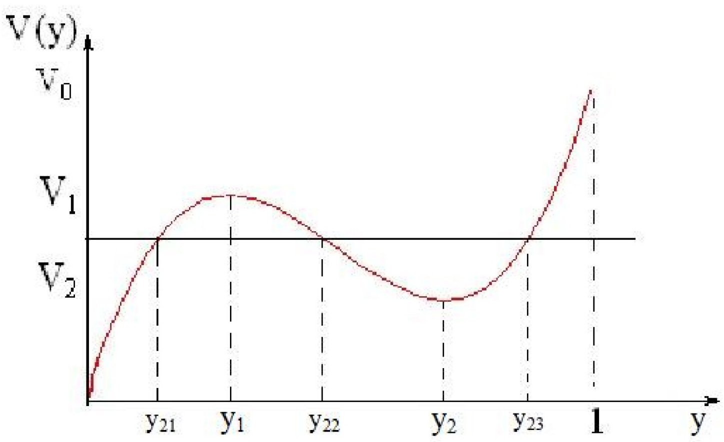
$$x_{\pm} = \frac{L}{2}\left[1 \pm \left[1 - \frac{\tilde{V}}{V_0}\right]^{(1/2)}\right]$$

$$x(\tilde{V}) = (L - x_+) + (x_- - 0)$$

Po dokonaniu odwrócenia powyższego wzoru otrzymamy potencjał kanoniczny postaci:

$$\tilde{V}(x) = V_0\left[2\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

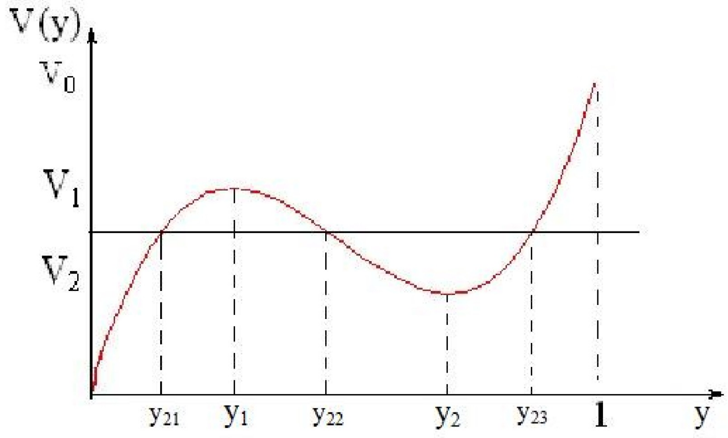
Potencjał kanoniczny

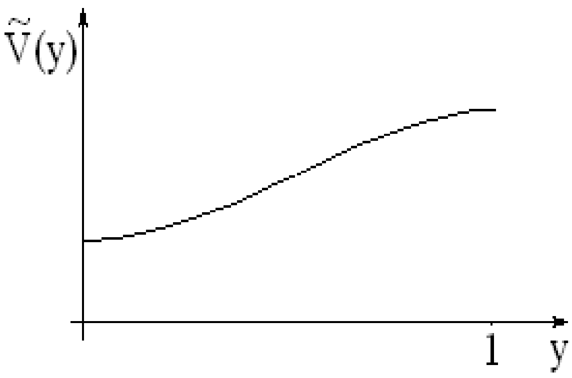


$$V(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$$

$$y(\tilde{V}) = (y_{23} - y_{22}) + (y_{21} - 0)$$

Potencjał kanoniczny



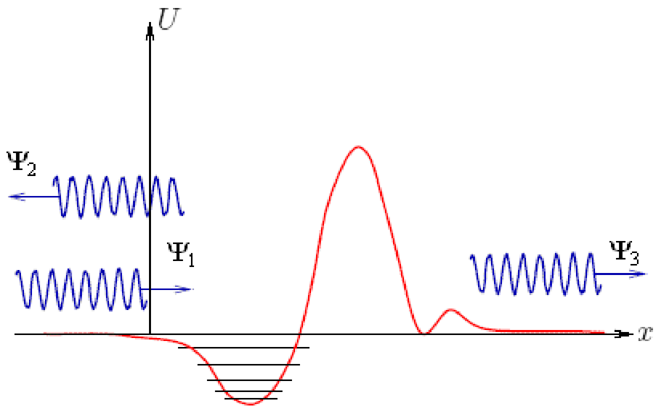


$$V(y) = ay^3 + by^2 + cy + d$$

$$\tilde{V}(y) = -\frac{ay^3}{8} - \frac{by^2}{8} + y\left(\frac{c}{2} - \frac{5b^2}{24a}\right) + \frac{b^3}{72a^2} - \frac{bc}{6a}$$

$$y(\tilde{V}) = (y_{23} - y_{22}) + (y_{21} - 0)$$

Problem kwantowy

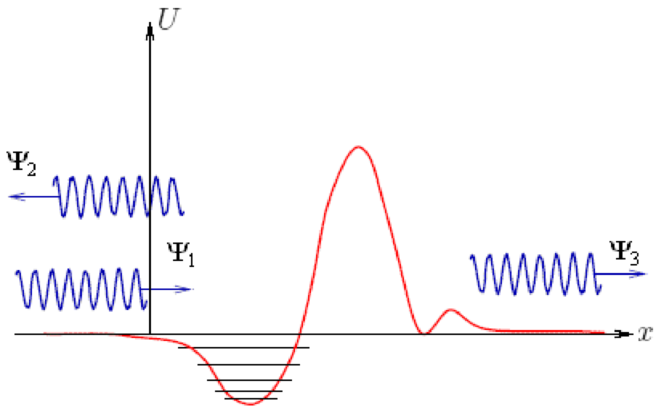


Problem kwantowy
dla E > 0:

$$\Psi_1(x) \sim e^{ikx}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_2(x) \sim b(k)\, e^{-ikx}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_3(x) \sim a(k)\, e^{ikx}, \left(x \to +\infty\right)$$



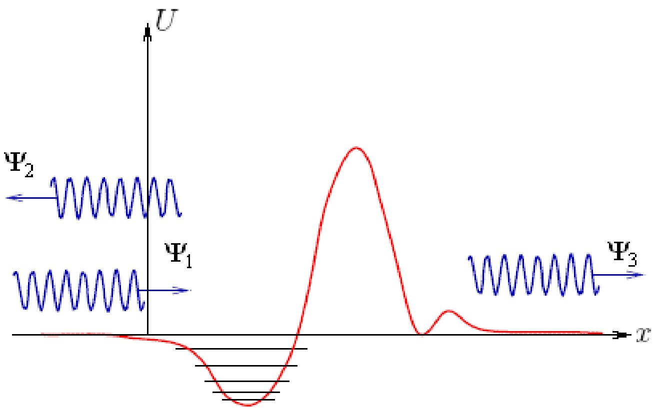
Problem kwantowy

dla E > 0:

$$\Psi_1(x) \sim e^{ikx}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_2(x) \sim b\left(k\right) e^{-ikx}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_3(x) \sim a\left(k\right) e^{ikx}, \left(x \to +\infty\right)$$



dla E < 0:

$$\Psi_1(x) \sim c_n e^{K_n x}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_2(x) \sim d_n e^{K_n x}, \left(x \to +\infty\right)$$

$$K_n = \sqrt{\frac{-2\mathrm{mE}_n}{\hbar^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}}$$

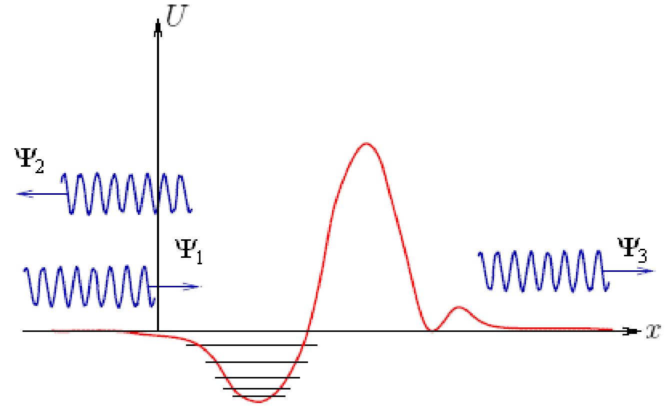
Problem kwantowy

dla E > 0:

$$\Psi_1(x) \sim e^{ikx}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_2(x) \sim b(k)\, e^{-ikx}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_3(x) \sim a(k)\, e^{ikx}, \left(x \to +\infty\right)$$



dla E < 0:

$$\Psi_1(x) \sim c_n e^{K_n x}, \left(x \to -\infty\right)$$

$$\Psi_2(x) \sim d_n e^{K_n x}, \left(x \to +\infty\right)$$

$$b(k), \left(c_n . \kappa_n\right)$$
$$\downarrow$$
$$U(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x)$$

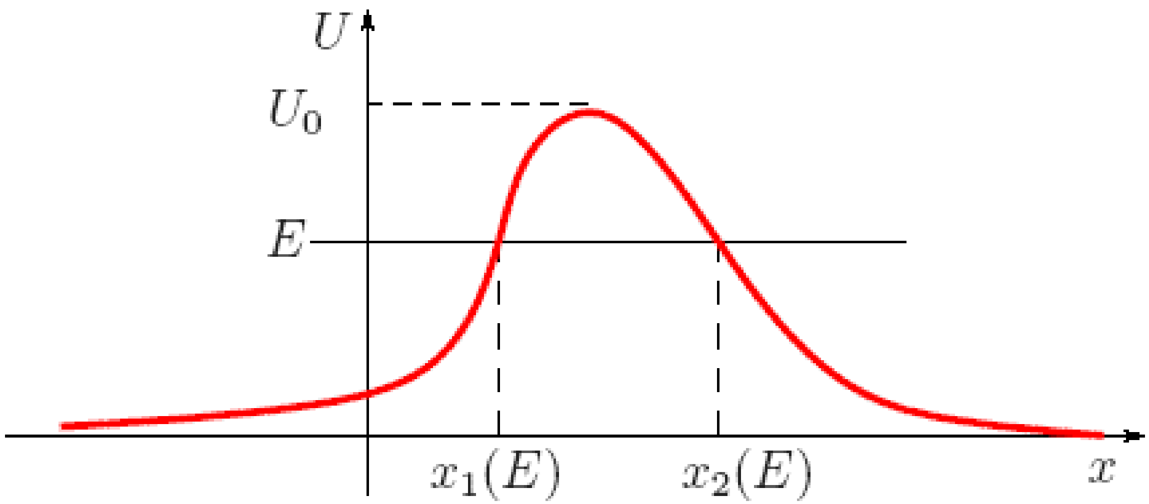
$$K_n = \sqrt{\frac{-2\mathrm{mE}_n}{\hbar^2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\mathrm{mE}}{\hbar^2}}$$

Wzór Gamowa

Kwantowa cząstka o energii E zderzając się z barierą potencjału daje skończone prawdopodobieństwo pokonania bariery, nawet jeśli jej energia jest mniejsza niż maksymalny potencjał bariery.

$$T(E)=\exp\left(\frac{-2}{\hbar}\int\sqrt{2\mathrm{m}(U(x)-E)}\,dx\right)$$



Wzór odwrotny Gamowa:

$$T(E) = \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2\mathrm{m}(U(x) - E)}\, dx \right)$$

Wzór odwrotny Gamowa

$$T(E) = \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2\mathrm{m}(U(x) - E)}\, dx \right)$$

Odwrócenie wzóru Gamowa

$$\frac{dT(E)}{dE} = \int_{\alpha}^{U_0} \left(\frac{dx_1}{dU} - \frac{dx_2}{dU} \right) dU \int_{\alpha}^{U} \frac{dE}{\sqrt{(U-E)(E-\alpha)}}$$

Wzór odwrotny Gamowa

$$T(E) = \exp\left(\frac{-2}{\hbar} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \sqrt{2\mathrm{m}(U(x) - E)}\, dx \right)$$

Odwrócenie wzóru Gamowa

$$\frac{dT(E)}{dE} = \int_{\alpha}^{U_0} \left(\frac{dx_1}{dU} - \frac{dx_2}{dU} \right) dU \int_{\alpha}^{U} \frac{dE}{\sqrt{(U - E)(E - \alpha)}}$$

całkowe równanie Abela:

$$\int_{0}^{E} \frac{\Phi(U)\, dU}{\sqrt{E - U}} = f(E)$$

Wzór odwrotny Gamowa

$$T(E)=\exp\left(\frac{-2}{\hbar}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\sqrt{2\mathrm{m}(U(x)-E)}\,dx\right)$$

Odwrócenie wzóru Gamowa

$$\frac{dT(E)}{dE}=\int_{\alpha}^{U_0}\left(\frac{dx_1}{dU}-\frac{dx_2}{dU}\right)dU\int_{\alpha}^{U}\frac{dE}{\sqrt{(U-E)(E-\alpha)}}$$

całkowe równanie Abela:

$$\int_{0}^{E}\frac{\Phi(U)\,dU}{\sqrt{E-U}}=f(E)$$

$$x_1(U)-x_2(U)=-\frac{\hbar}{\pi\sqrt{2\mathrm{m}}}\int_{U}^{U_0}\frac{dT(E)}{dE}\frac{dE}{T(E)\sqrt{E-U}}$$

Wzór odwrotny Gamowa

$$T(E)=\exp\left(\frac{-2}{\hbar}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\sqrt{2\mathrm{m}(U(x)-E)}\,dx\right)$$

Odwrócenie wzóru Gamowa

$$\frac{dT(E)}{dE}=\int_{\alpha}^{U_0}\left(\frac{dx_1}{dU}-\frac{dx_2}{dU}\right)dU\int_{\alpha}^{U}\frac{dE}{\sqrt{(U-E)(E-\alpha)}}$$

całkowe równanie Abela:

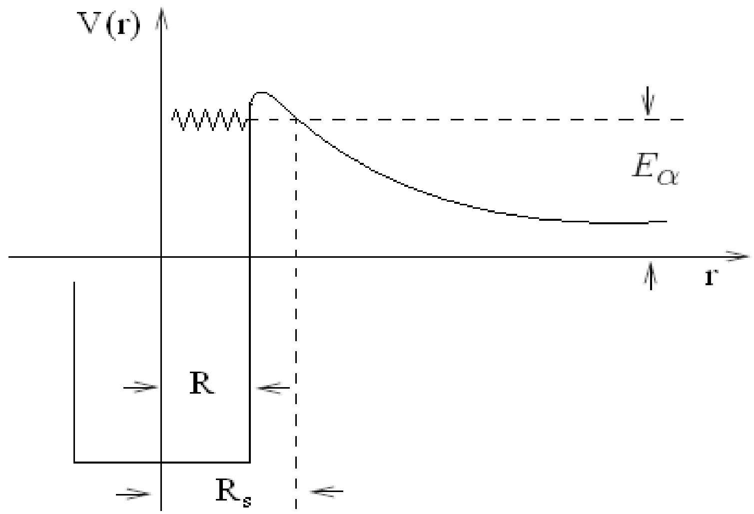
$$\int_0^E\frac{\Phi(U)\,dU}{\sqrt{E-U}}=f(E)$$

$$x_1(U)-x_2(U)=-\frac{\hbar}{\pi\sqrt{2\mathrm{m}}}\int_U^{U_0}\frac{dT(E)}{dE}\frac{dE}{T(E)\sqrt{E-U}}$$

odwrotny wzór:

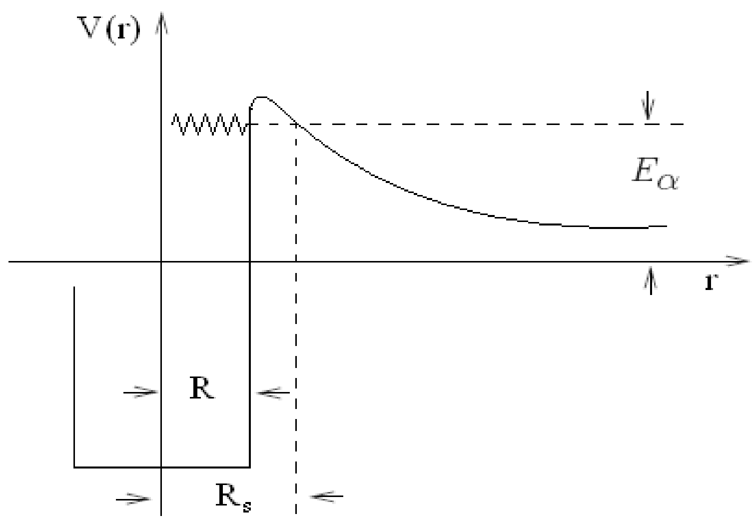
$$x(\tilde{U})=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{\tilde{U}}\frac{T(E)}{\sqrt{(\tilde{U}-E)}}\,dE$$

Teoria rozpadu α

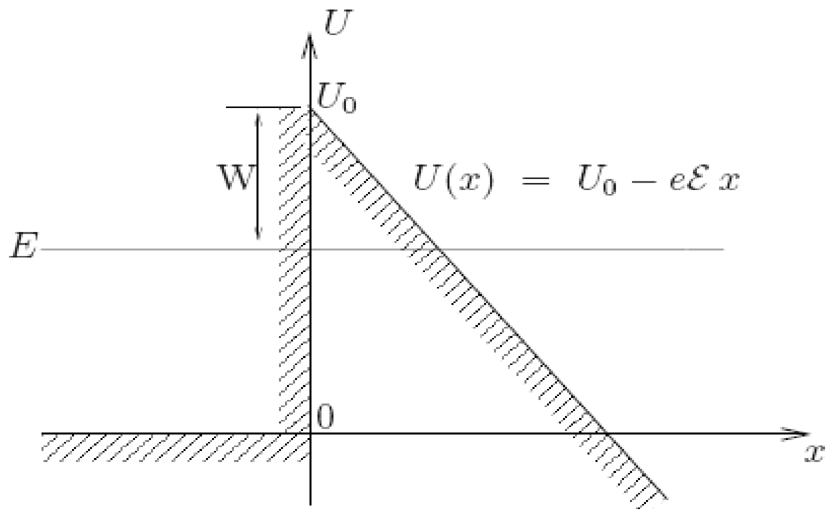


Teoria rozpadu α

$$T(E) \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{R}^{R_\alpha}\sqrt{2m(V-E_\alpha)}\,dr\right)$$



Zjawisko zimnej emisji



$$x(U) = \frac{-1}{eE}(U_0 - U)$$

Podsumowanie

- rozwiązanie problemu odwrotnego polegało na jednoznacznym wyznaczeniu potencjału opisującego barierę znając jedynie wartość współczynnika prawdopodobieństwa
- niejednoznaczność rozwiązania zmusiła do wprowadzenie pojęcia potencjału kanonicznego
- odwrócenie formuły całkowej było możliwe jedynie ale przypadku 1D, bądź dla zmiennych radialnych

Transformacja Laplace'a

Transformacja Laplace'a odwzorowuje funkcję f(t) w funkcję f(s) zgodnie ze wzorem:

$$\overline{f(s)} = \int f(t) e^{-st} dt$$

Odwzorowanie to przyporządkowuje funkcji f(t) zmiennej rzeczywistej t funkcję $\bar{f}(s)$ zmiennej zespolonej s. Do określenia przekształcenia odwrotnego stosuje się wzór:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \overline{f(s)} e^{st} ds .$$

Aby przekształcenie było matematycznie dobrze określone musi zachodzić:

dla $|f(t)| \leq M e^{\rho t}$

gdzie M i ρ są pewnymi stałymi.