O pewnych zastosowaniach analizy teoriogrupowej do równań różniczkowych drugiego rzędu

Tomasz Czyżycki

Instytut Matematyki Uniwersytetu w Białymstoku

Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Zakład Mechaniki i Fizyki Płynów
Warszawa, 23 marca 2011

Plan:

1. Twierdzenie Tresse'a i teoriogrupowe własności nieliniowego równania Schrödingera
2. Przekształcenia równoważności rodziny równań różniczkowych Riccatiego

Oznaczenia i definicje

Definicja

Niech $x \in \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *niech* G *będzie grupą Liego przekształceń gładkiej rozmaitości* M *ze współrzędnymi* (x, u) *oraz niech* $\underset{m}{G}$ *oznacza przedłużenie działania grupy* G *na przestrzeń żetów odwzorowania* u, *czyli* $(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u})$.

a) Funkcję $F(x, u)$ *nazywamy* **niezmiennikiem** *grupy* G *gdy:*

$$\forall_{\varphi \in G}\ F(\varphi(x, u)) = F(x, u).$$

b) Funkcję $F(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u})$ *nazywamy* **niezmiennikiem różniczkowym** *(rzędu* m*) grupy* G *jeśli:*

$$\forall_{\underset{m}{\varphi} \in \underset{m}{G}}\ F(\underset{m}{\varphi}(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u})) = F(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{m}{u}).$$

Definicja, c.d.

c) Niech $X = \xi^i(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{s}{u})\partial_{x_i} + \eta(x, u, \underset{1}{u}, ..., \underset{s}{u})\partial_u$ oznacza pole wektorowe,
$\underset{m}{X}$ oznacza przedłużenie m – tego rzędu pola X na przestrzeń żetów $(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, ..., \underset{m}{u})$ i jest zadane formułą:

$$\underset{m}{X} = X + \sum_{p=1}^{m} \zeta^{i_1,\dots,i_p}\partial_{u_{x_{i_1},\dots,i_p}},$$

gdzie współczynniki $\zeta^{i_1,\dots,i_p}$ są zdefiniowane następująco:

$$\zeta^{i_1,\dots,i_p} = D_{i_1,\dots,i_p}(\eta) - u_{x_{i_1},\dots,x_{i_p},x_{i_k}} \cdot D_{i_1,\dots,i_p}(\xi^k),$$

sumowanie jest względem k; $(i_1, i_2, ..., i_m)$ są ustalone,

Definicja, c.d.

Mając generator infinitezymalny X grupy Liego G można korzystać z infinitezymalnego kryterium niezmienniczości:

$$\underset{m}{X} F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0.$$

d) X nazywamy operatorem symetrii równania różniczkowego $L(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0$, jeżeli zachodzi równość

$$\underset{m}{X} L \Big|_{L=0} = 0$$

Uwaga

Operatory symetrii danego równania różniczkowego tworzą algebrę Liego z mnożeniem zadanym przez komutator.

Definicja, c.d.

Mając generator infinitezymalny X grupy Liego G można korzystać z infinitezymalnego kryterium niezmienniczości:

$$\underset{m}{X} F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0.$$

d) X nazywamy operatorem symetrii równania różniczkowego $L(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{m}{u}) = 0$, jeżeli zachodzi równość

$$\underset{m}{X} L\Big|_{L=0} = 0$$

Uwaga

Operatory symetrii danego równania różniczkowego tworzą algebrę Liego z mnożeniem zadanym przez komutator.

Definicja

a) Maksymalny (względem ilości elementów) zbiór funkcjonalnie niezależnych niezmienników rzędu $r \leqslant m$ danej grupy Liego G nazywamy **bazą** *niezmienników rzędu m grupy G,*

b) Q nazywamy **operatorem niezmienniczego różniczkowania**, *jeśli dla każdego niezmiennika różniczkowego F grupy G wyrażenie QF też jest niezmiennikiem różniczkowym grupy G.*

c) Ogólnym niezmiennikiem różniczkowym rzędu s grupy Liego G nazywamy zbiór wszystkich jej niezmienników różniczkowych od rzędu zero do rzędu s włącznie.

Twierdzenie (Tresse, 1894)

Dla danej r–wymiarowej grupy Liego przekształceń G $(r < +\infty)$, działającej na gładkiej rozmaitości $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ze współrzędnymi (x, u), $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, $u : V \to \mathbb{R}$ istnieje skończona baza funkcjonalnie niezależnych niezmienników oraz istnieją operatory niezmienniczego różniczkowania Q takie, że dowolny niezmiennik skończonego rzędu grupy G może być otrzymany w skończonej ilości operacji funkcjonalnych oraz niezmienniczych różniczkowań niezmienników bazowych.

Lemat

Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą Liego grupy Liego G z tw. Tresse'a; niech operatory $X_\nu = \xi^i_\nu(x,u)\partial_{x_i} + \eta_\nu(x,u)\partial_u$ for $\nu = 1, ..., r$ będą bazowymi elementami $\mathcal{A}$ oraz $\xi^i(x,u) = [\xi^i_1, ..., \xi^i_r]^T$, $\eta(x,y) = [\eta_1, ..., \eta_r]^T$.

Własności funkcjonalnej bazy niezmienników z tw. Tresse'a są następujące:

1) Baza zawiera się w ogólnym niezmienniku różniczkowym minimalnego rzędu $s \geqslant 1$ takiego, że:

$$r = rank\left[\xi^i(x,u), \eta(x,u), \zeta^{i_1}(x,u,\underset{1}{u}), ..., \zeta^{i_1,\dots,i_{s-1}}(x,u,...,\underset{s-1}{u})\right].$$

2) Operatory niezmienniczego różniczkowania są postaci:

$$Q = \lambda^k(x,u,\underset{1}{u},...,\underset{s}{u})D_{x_k},$$

gdzie λ spełnia warunek:

$$\underset{s}{X}_\nu\lambda = \lambda^k D_{x_k}(\xi_\nu).$$

Lemat

3) Jeżeli grupa G działa w przestrzeni n niezależnych zmiennych oraz k zależnych zmiennych, to ilość elementów bazy rzędu m wyraża się wzorem:

$$R(m) = n + k \cdot \binom{n+m}{n} - r_m,$$

gdzie r_m jest rzędem macierzy współczynników m–tego przedłużenia operatorów X_ν.

4) Jeżeli wszystkie niezmienniki rzędu s można otrzymać z niezmienników rzędu $0, 1, ..., s-1$ w skończonej ilości operacji funkcjonalnych i niezmienniczych różniczkowań to baza niezmienników z tw. Tresse'a zawiera się w ogólnym niezmienniku różniczkowym rzędu $s-1$. Analogiczna własność zachodzi dla niezmienników niższych rzędów.

5) Funkcjonalna baza niezmienników grupy G z tw. Tresse'a wraz z operatorami niezmienniczego różniczkowania jednoznacznie wyznaczają grupę G.

Przykład

Rozważmy grupę obrotów w $\mathbb{R}^3$*:* $\begin{cases} \widetilde{x} = x\cos a - y\sin a \\ \widetilde{y} = x\sin a + y\cos a \\ \widetilde{u} = u \end{cases}$,

z generatorem infinitezymalnym $X = -y\partial_x + x\partial_y$.

Operatory niezmienniczego różniczkowania mają postać:

$$Q_1 = u_x D_x + u_y D_y, \quad Q_2 = -u_y D_x + u_x D_y.$$

Niezmienniki rzędu zerowego spełniają równanie $X\omega = 0$ *i są to wyrażenia:*

$$\omega_{01} = u,\ \omega_{02} = x^2 + y^2$$

$$\underset{1}{X} = -y\partial_x + x\partial_y - u_y\partial_{u_x} + u_x\partial_{u_y}$$

Wszystkie niezmienniki pierwszego rzędu można otrzymać z czterech elementów:

$$u,\ x^2 + y^2,\ u_x^2 + u_y^2 = Q_1(\omega_{01}),\ xu_x + yu_y = \frac{1}{2}Q_1(\omega_{02})$$

Rozważmy nieliniowe równanie Schrödingera w postaci:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + W(|\psi|) \cdot \psi = 0,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^1$ a W jest dowolną gładką funkcją,a $|\psi|^2 = \psi\psi^*$
Bazowe elementy algebry symetrii tego równania są postaci:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}, \quad X_4 = t\partial_x + \frac{i}{2}x(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$$

z relacjami komutacyjnymi:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = X_2, \quad [X_2, X_3] = 0,$$

$$[X_2, X_4] = \frac{i}{2}X_3, \quad [X_3, X_4] = 0.$$

Rozważmy nieliniowe równanie Schrödingera w postaci:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + W(|\psi|) \cdot \psi = 0,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^1$ a W jest dowolną gładką funkcją,a $|\psi|^2 = \psi\psi^*$
Bazowe elementy algebry symetrii tego równania są postaci:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}, \quad X_4 = t\partial_x + \frac{i}{2}x(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$$

z relacjami komutacyjnymi:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0, \quad [X_1, X_4] = X_2, \quad [X_2, X_3] = 0,$$

$$[X_2, X_4] = \frac{i}{2}X_3, \quad [X_3, X_4] = 0.$$

Niezmiennikiem rzędu zerowego jest: $\omega_0 = \psi\psi^* = |\psi|^2$.
Niezmienniki rzędu pierwszego znajdujemy całkując układ równań charakterystycznych dla operatora X_4 i zapisując rozwiązania w postaci niezmienniczej względem X_3:

$$\omega_1 = \frac{\psi_x}{\psi} + \frac{\psi_x^*}{\psi^*}, \quad \omega_2 = \frac{\psi_t}{\psi} - i \cdot \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2, \quad \omega_3 = \frac{\psi_t^*}{\psi^*} + i \cdot \left(\frac{\psi_x^*}{\psi^*}\right)^2.$$

Zauważmy, że ω_i, $i = 0, 1, 2, 3$ są funkcjonalnie niezależne (nad $\mathbb{R}$). Ponadto macierz współczynników pierwszego przedłużenia operatorów $X_1, ..., X_4$ ma rząd 4. Stąd jest to maksymalny układ niezmienników pierwszego rzędu tej algebry.
Ogólny niezmiennik różniczkowy drugiego rzędu tej algebry ma 10 elementów bazowych, spośród których ω_i for $i = 0, 1, 2, 3$ są rzędu niższego niż drugi a pozostałe sześć zawiera pochodne rzędu drugiego.
Wyznaczamy operatory niezmienniczego różniczkowania Q_1, Q_2 korzystając z tw. Tresse'a.

Niezmiennikiem rzędu zerowego jest: $\omega_0 = \psi\psi^* = |\psi|^2$.
Niezmienniki rzędu pierwszego znajdujemy całkując układ równań charakterystycznych dla operatora X_4 i zapisując rozwiązania w postaci niezmienniczej względem X_3:

$$\omega_1 = \frac{\psi_x}{\psi} + \frac{\psi_x^*}{\psi^*}, \quad \omega_2 = \frac{\psi_t}{\psi} - i \cdot \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)^2, \quad \omega_3 = \frac{\psi_t^*}{\psi^*} + i \cdot \left(\frac{\psi_x^*}{\psi^*}\right)^2.$$

Zauważmy, że ω_i, $i = 0, 1, 2, 3$ są funkcjonalnie niezależne (nad $\mathbb{R}$).
Ponadto macierz współczynników pierwszego przedłużenia operatorów $X_1, ..., X_4$ ma rząd 4. Stąd jest to maksymalny układ niezmienników pierwszego rzędu tej algebry.
Ogólny niezmiennik różniczkowy drugiego rzędu tej algebry ma 10 elementów bazowych, spośród których ω_i for $i = 0, 1, 2, 3$ są rzędu niższego niż drugi a pozostałe sześć zawiera pochodne rzędu drugiego.
Wyznaczamy operatory niezmienniczego różniczkowania Q_1, Q_2 korzystając z tw. Tresse'a.

Układ równań dla operatora X_1 ma postać:

$$\underset{2\;1}{X} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda^1 \cdot D_t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda^2 \cdot D_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{tzn.} \quad \begin{bmatrix} \lambda^1_t \\ \lambda^2_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy, że λ^1, λ^2 nie zależą od t. Analogicznie, z równania dla X_2 mamy, że nie zależą one od x. Zatem w układzie dla X_3, X_4 bierzemy $\lambda^i(\psi, \psi^*, \psi_t, \psi^*_t, \psi_x, \psi^*_x)$:

$$\psi \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_\psi \\ \lambda^2_\psi \end{bmatrix} - \psi^* \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*} \\ \lambda^2_{\psi^*} \end{bmatrix} + \psi_t \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_t} \\ \lambda^2_{\psi_t} \end{bmatrix} + \psi_x \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_x} \\ \lambda^2_{\psi_x} \end{bmatrix} - \psi^*_t \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_t} \\ \lambda^2_{\psi^*_t} \end{bmatrix} - \psi^*_x \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_x} \\ \lambda^2_{\psi^*_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{i}{2} x\psi \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_\psi \\ \lambda^2_\psi \end{bmatrix} - \frac{i}{2} x\psi^* \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*} \\ \lambda^2_{\psi^*} \end{bmatrix} + \left(\frac{i}{2} x\psi_t - \psi_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_t} \\ \lambda^2_{\psi_t} \end{bmatrix} + \left(\frac{i}{2} \psi + \frac{i}{2} x\psi_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_x} \\ \lambda^2_{\psi_x} \end{bmatrix} -$$

$$- \left(\frac{i}{2} x\psi^*_t + \psi^*_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_t} \\ \lambda^2_{\psi^*_t} \end{bmatrix} - \left(\frac{i}{2} \psi^* + \frac{i}{2} x\psi^*_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_x} \\ \lambda^2_{\psi^*_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^1 \end{bmatrix}.$$

Układ równań dla operatora X_1 ma postać:

$$\underset{2\;1}{X} \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda^1 \cdot D_t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda^2 \cdot D_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{tzn.} \quad \begin{bmatrix} \lambda^1_t \\ \lambda^2_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy, że λ^1, λ^2 nie zależą od t. Analogicznie, z równania dla X_2 mamy, że nie zależą one od x. Zatem w układzie dla X_3, X_4 bierzemy $\lambda^i(\psi, \psi^*, \psi_t, \psi^*_t, \psi_x, \psi^*_x)$:

$$\psi \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_\psi \\ \lambda^2_\psi \end{bmatrix} - \psi^* \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*} \\ \lambda^2_{\psi^*} \end{bmatrix} + \psi_t \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_t} \\ \lambda^2_{\psi_t} \end{bmatrix} + \psi_x \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_x} \\ \lambda^2_{\psi_x} \end{bmatrix} - \psi^*_t \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_t} \\ \lambda^2_{\psi^*_t} \end{bmatrix} - \psi^*_x \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_x} \\ \lambda^2_{\psi^*_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{i}{2} x\psi \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_\psi \\ \lambda^2_\psi \end{bmatrix} - \frac{i}{2} x\psi^* \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*} \\ \lambda^2_{\psi^*} \end{bmatrix} + \left(\frac{i}{2} x\psi_t - \psi_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_t} \\ \lambda^2_{\psi_t} \end{bmatrix} + \left(\frac{i}{2} \psi + \frac{i}{2} x\psi_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi_x} \\ \lambda^2_{\psi_x} \end{bmatrix} -$$

$$- \left(\frac{i}{2} x\psi^*_t + \psi^*_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_t} \\ \lambda^2_{\psi^*_t} \end{bmatrix} - \left(\frac{i}{2} \psi^* + \frac{i}{2} x\psi^*_x \right) \cdot \begin{bmatrix} \lambda^1_{\psi^*_x} \\ \lambda^2_{\psi^*_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując ten układ mamy:

$$\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \qquad \vee \qquad \begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi\psi^*\\ i(\psi\psi_x^*-\psi_x\psi^*)\end{bmatrix}.$$

Stąd operatory niezmienniczego różniczkowania są postaci:

$$Q_1=D_x, \qquad Q_2=\psi\psi^* D_t+i(\psi\psi_x^*-\psi_x\psi^*)D_x.$$

Zauważmy, że współczynniki w tych operatorach są rzeczywiste. Zatem wyrażenia

$$\omega_4=D_x\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)=\frac{\psi_{xx}}{\psi}-\frac{\psi_x^2}{\psi^2}, \quad \omega_4^*=\overline{\omega_4}$$

$$\omega_5=Q_2\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)=\psi\psi^*\cdot\left(\frac{\psi_{tx}\psi-\psi_x\psi_t}{\psi^2}\right)+i(\psi\psi_x^*-\psi_x\psi^*)\cdot\left(\frac{\psi_{xx}}{\psi}-\frac{\psi_x^2}{\psi^2}\right),$$

$$\omega_5^*=\overline{\omega_5}, \quad \omega_6=Q_2(\omega_2), \quad \omega_6^*=\overline{Q_2(\omega_2)}$$

są niezmiennikami różniczkowymi drugiego rzędu tej algebry.

Rozwiązując ten układ mamy:

$$\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\qquad \vee \qquad \begin{bmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\psi\psi^*\\ i(\psi\psi_x^*-\psi_x\psi^*)\end{bmatrix}.$$

Stąd operatory niezmienniczego różniczkowania są postaci:

$$Q_1=D_x,\qquad Q_2=\psi\psi^*D_t+i(\psi\psi_x^*-\psi_x\psi^*)D_x.$$

Zauważmy, że współczynniki w tych operatorach są rzeczywiste. Zatem wyrażenia

$$\omega_4=D_x\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)=\frac{\psi_{xx}}{\psi}-\frac{\psi_x^2}{\psi^2},\quad \omega_4^*=\overline{\omega_4}$$

$$\omega_5=Q_2\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)=\psi\psi^*\cdot\left(\frac{\psi_{tx}\psi-\psi_x\psi_t}{\psi^2}\right)+i(\psi\psi_x^*-\psi_x\psi^*)\cdot\left(\frac{\psi_{xx}}{\psi}-\frac{\psi_x^2}{\psi^2}\right),$$

$$\omega_5^*=\overline{\omega_5},\quad \omega_6=Q_2(\omega_2),\quad \omega_6^*=\overline{Q_2(\omega_2)}$$

są niezmiennikami różniczkowymi drugiego rzędu tej algebry.

Niezmienniki ω_k, ω_k^*, $k = 4, 5, 6$ są funkcjonalnie niezależne (nad $\mathbb{R}$) i tworzą bazę ogólnego niezmiennika drugiego rzędu. Dalej można pokazać, że niezmienniki ω_i, $i = 0, 1, 2, 3$ oraz operatory Q_1, Q_2 wystarczają, aby wyznaczyć wszystkie niezmienniki drugiego rzędu. Można też skonstruować nieliniowe równanie Schrödingera z otrzymanych niezmienników. W tym celu zbudujmy pomocniczy niezmiennik Ω:

$$\Omega = i \cdot \omega_2 + \omega_4 = i\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{\psi_{xx}}{\psi}.$$

Bierzemy niezmiennicze równanie:

$$\Omega = F(\omega_0),$$

gdzie F jest dowolną funkcja. Wtedy mamy

$$i\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{\psi_{xx}}{\psi} = F(|\psi|^2).$$

Mnożąc to wyrażenie przez ψ i podstawiając $F(|\psi|^2) = -W(|\psi|)$ otrzymujemy badane równanie Schrödingera $i\psi_t + \psi_{xx} + W(|\psi|) \cdot \psi = 0$.

Niezmienniki $\omega_k, \omega_k^*,\ k = 4, 5, 6$ są funkcjonalnie niezależne (nad $\mathbb{R}$) i tworzą bazę ogólnego niezmiennika drugiego rzędu. Dalej można pokazać, że niezmienniki $\omega_i,\ \ i = 0, 1, 2, 3$ oraz operatory Q_1, Q_2 wystarczają, aby wyznaczyć wszystkie niezmienniki drugiego rzędu. Można też skonstruować nieliniowe równanie Schrödingera z otrzymanych niezmienników. W tym celu zbudujmy pomocniczy niezmiennik Ω:

$$\Omega = i \cdot \omega_2 + \omega_4 = i\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{\psi_{xx}}{\psi}.$$

Bierzemy niezmiennicze równanie:

$$\Omega = F(\omega_0),$$

gdzie F jest dowolną funkcja. Wtedy mamy

$$i\frac{\psi_t}{\psi} + \frac{\psi_{xx}}{\psi} = F(|\psi|^2).$$

Mnożąc to wyrażenie przez ψ i podstawiając $F(|\psi|^2) = -W(|\psi|)$ otrzymujemy badane równanie Schrödingera $i\psi_t + \psi_{xx} + W(|\psi|) \cdot \psi = 0$.

Szczególny przypadek

Rozważmy nieliniowe równanie Schrödingera postaci:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0.$$

Jest ono niezmiennicze względem pięciowymiarowej algebry Liego symetrii:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*},$$

$$X_4 = t\partial_x + \frac{i}{2}x(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \quad X_5 = 2t\partial_t + x\partial_x - \psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}$$

gdzie ψ^* jest sprzężeniem zespolonym funkcji ψ oraz $\psi\psi^* = |\psi|^2$.

$$R(0) = 2+2\cdot\binom{2+0}{2} - 4 = 0, \quad R(1) = 2+2\cdot\binom{2+1}{2} - 5 = 3, \quad R(2) = 9$$

$$\omega_1 = \frac{\psi_x}{|\psi|\psi} + \frac{\psi_x^*}{|\psi|\psi^*}, \quad \omega_2 = \frac{\psi_t}{|\psi|^2\psi} - i\cdot\left(\frac{\psi_x}{|\psi|\psi}\right)^2, \quad \omega_3 = \frac{\psi_t^*}{|\psi|^2\psi^*} + i\cdot\left(\frac{\psi_x^*}{|\psi|\psi^*}\right)^2$$

$$\omega_4 = \frac{1}{|\psi|^2\psi^2}(\psi_{xx}\psi - \psi_x^2), \qquad \omega_4^* = \overline{\omega_4},$$

$$\omega_5 = \frac{\psi_{tx}\psi - \psi_x\psi_t}{|\psi|^3\psi^2} + \frac{i(\psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*)}{|\psi^5|}\cdot\left(\frac{\psi_{xx}}{\psi} - \frac{\psi_x^2}{\psi^2}\right), \quad \omega_5^* = \overline{\omega_5},$$

$$\omega_6 = \frac{1}{|\psi|^6}\cdot[\psi\psi^*\cdot D_t(\Omega) + i(\psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*)\cdot D_x(\Omega)], \quad \omega_6^* = \overline{\omega_6}$$

gdzie $\quad \Omega = \dfrac{\psi_t}{\psi} - i\left(\dfrac{\psi_x}{\psi}\right)^2.$

Operatory niezmienniczego różniczkowania są postaci:

$$Q_1 = \frac{1}{|\psi|} D_x, \quad Q_2 = \frac{1}{|\psi|^2} D_t + \frac{i(\psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*)}{|\psi|^4} D_x$$

okazuje się, że wszystkie niezmienniki różniczkowe drugiego rzędu można otrzymać z niezmienników pierwszego rzędu.
Niezmiennicza postać rozważanego równania Schrödingera to:

$$i\omega_2 + \omega_4 + 1 = 0$$

Wniosek

Nieliniowe równanie Schrödingera nie jest bazowym niezmiennikiem swojej grupy Liego symetrii punktowej.

Operatory niezmienniczego różniczkowania są postaci:

$$Q_1 = \frac{1}{|\psi|} D_x, \quad Q_2 = \frac{1}{|\psi|^2} D_t + \frac{i(\psi\psi_x^* - \psi_x\psi^*)}{|\psi|^4} D_x$$

okazuje się, że wszystkie niezmienniki różniczkowe drugiego rzędu można otrzymać z niezmienników pierwszego rzędu.
Niezmiennicza postać rozważanego równania Schrödingera to:

$$i\omega_2 + \omega_4 + 1 = 0$$

Wniosek

Nieliniowe równanie Schrödingera nie jest bazowym niezmiennikiem swojej grupy Liego symetrii punktowej.

Rozważmy rodzinę równań różniczkowych Riccatiego ze zmiennymi współczynnikami $a(x), b(x), c(x)$:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x). \tag{1}$$

Przekształceniem równoważności rodziny równań Riccatiego (1) nazywamy nieosobliwą zamianę zmiennych

$$\widetilde{x} = \alpha(x, y), \ \widetilde{y} = \beta(x, y), \tag{2}$$

zachowującą zbiór

$$\Omega_R = \{y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) : \ y, a, b, c : V \to \mathbb{R}, \ V \subseteq \mathbb{R}\}, \tag{3}$$

tzn. przekształcającą każde równanie $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \in \Omega_R$ w równanie

$$\widetilde{y}\,' = \widetilde{a}(\widetilde{x})\widetilde{y}\,^2 + \widetilde{b}(\widetilde{x})\widetilde{y} + \widetilde{c}(\widetilde{x}) \in \Omega_R, \tag{4}$$

gdzie funkcje $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ mogą być różne od a, b, c.

Twierdzenie

Algebra Liego $\mathcal{A}$ grupy Liego G_R ma bazowe elementy postaci

$$X = A(x)\partial_x + \big(B(x)y^2 - C(x)y + D(x)\big)\partial_y +$$

$$+\big((C(x) - A'(x))a + B(x)b + B'(x)\big)\partial_a +$$

$$+\big(2B(x)c - 2D(x)a - A'(x)b - C'(x)\big)\partial_b +$$

$$+\big(D'(x) - D(x)b - (A'(x) + C(x))c\big)\partial_c,$$

gdzie $A(x), B(x), C(x), D(x)$ są dowolnymi gładkimi funkcjami zmiennej x.

Przekształcenia grupowe, generowane przez $X_A = A\partial_x - A'a\,\partial_a - A'b\,\partial_b - A'c\,\partial_c$ dla $B = C = D = 0$ są postaci

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \widetilde{A}^{-1}(\varepsilon + \widetilde{A}(x)) = \alpha(x), \\ \widetilde{y} = y, \end{cases}$$

Twierdzenie

Algebra Liego $\mathcal{A}$ grupy Liego G_R ma bazowe elementy postaci

$$X = A(x)\partial_x + \big(B(x)y^2 - C(x)y + D(x)\big)\partial_y +$$

$$+\big((C(x) - A'(x))a + B(x)b + B'(x)\big)\partial_a +$$

$$+\big(2B(x)c - 2D(x)a - A'(x)b - C'(x)\big)\partial_b +$$

$$+\big(D'(x) - D(x)b - (A'(x) + C(x))c\big)\partial_c,$$

gdzie $A(x), B(x), C(x), D(x)$ są dowolnymi gładkimi funkcjami zmiennej x.

Przekształcenia grupowe, generowane przez $X_A = A\partial_x - A'a\,\partial_a - A'b\,\partial_b - A'c\,\partial_c$ dla $B = C = D = 0$ są postaci

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \widetilde{A}^{-1}(\varepsilon + \widetilde{A}(x)) = \alpha(x), \\ \widetilde{y} = y, \end{cases}$$

Dla $X_B = By^2\partial_y + (Bb + B')\partial_a + 2Bc\,\partial_b$, $(A = C = D = 0)$ mamy

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = \dfrac{y}{1 - \varepsilon B(x)y}. \end{cases}$$

Dla $X_C = -Cy\partial_y + Ca\,\partial_a - C'\partial_b - Cc\,\partial_c$, $(A = B = D = 0)$ mamy

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = ye^{-\varepsilon C(x)}. \end{cases}$$

Dla $X_D = D\partial_y - 2Da\,\partial_b + (D' - Db)\partial_c$, $(A = B = C = 0)$ mamy

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x, \\ \widetilde{y} = y + \varepsilon D(x). \end{cases}$$

Niezmienniki przekształceń równoważności rodziny równań Riccatiego

Ze względu na to, że niezmienniki całej grupy G_R nie istnieją, wyznaczamy niezmienniki pewnych podgrup grupy G_R.
W szczególności podgrup generowanych przez operatory X_A, X_B, X_C, X_D.

Baza podalgebry	Bazowe niezmienniki		Niezmiennicze różniczkowanie
	ze zmienną y	ze zmiennymi a, b, c (bez x, y)	
X_A	y	$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a}$	$\frac{1}{a} D_x$
X_B	$\frac{b}{2c} + \frac{1}{y}$	$c,\ 2ac - \frac{1}{2}b^2 - b' + b\frac{c'}{c}$	D_x
X_C	ay	$ac,\ \frac{a'}{a} + b$	D_x
X_D	$\frac{b}{a} + 2y$	$a,\ 2ac - \frac{1}{2}b^2 + b' - b\frac{a'}{a}$	D_x
(X_A, X_B)	$\frac{b}{2c} + \frac{1}{y}$	$\frac{2a}{c} + \frac{b^2}{2c^2} - \frac{b'c - bc'}{c^3}$	$\frac{1}{c} D_x$
(X_A, X_C)	$\frac{ay^2}{c}$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert ac\rvert}}\left(\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c} + 2b\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\lvert ac\rvert}} D_x$
(X_A, X_D)	$\frac{b}{a} + 2y$	$2\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b'a - ba'}{a^3}$	$\frac{1}{a} D_x$
(X_B, X_C)	$\frac{2c}{y} + b - \frac{c'}{c}$	$b^2 - 4ac + 2b' - 2\frac{c''}{c} + 3\frac{c'^2}{c^2} - 2\frac{bc'}{c}$	D_x
(X_C, X_D)	$2ay + b + \frac{a'}{a}$	$b^2 - 4ac - 2b' - 2\frac{a''}{a} + 3\frac{a'^2}{a^2} + 2\frac{ba'}{a}$	D_x

Przykład - badanie równoważności równań Riccatiego

Zbadamy równoważność następujących równań

$$y' = y^2 - 2x^2 y + x^4 + 2x + 4, \quad z' = 3t^2 z^2 - 6t^8 z + 3t^{14} + 6t^5 + 12t^2$$

W tym celu porównujemy niezmienniki poszczególnych podgrup grupy G_R, poczynając od transformacji zawierających jedną dowolną funkcję. Ponieważ funkcje $a, c,\ ac$ nie są niezmiennikami wnioskujemy, że w tym przypadku nie wystarczą przekształcenia generowane przez X_B, X_C, X_D. Następnie badamy niezmienniki przekształceń generowanych przez X_A oraz ich niezmiennicze kombinacje dla pierwszego równania.

$$\omega_{11} = \frac{b_1}{a_1} = -2x^2, \quad \omega_{12} = \frac{c_1}{a_1} = x^4 + 2x + 4.$$

Niezmienniki powyższe zależą od x, więc wyznaczamy ich niezmiennicze kombinacje.

Przykład cd.

Ponieważ $x = \sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|}$ oraz $\omega_{12} = \frac{\omega_{11}^2}{4} + 2\sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|} + 4$, więc niezmienniczą kombinacją jest funkcja

$$\Phi_1(\omega_{11}, \omega_{12}) = \omega_{12} - \frac{\omega_{11}^2}{4} - 2\sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|} = 4.$$

Z drugiego równania otrzymujemy semi–niezmienniki

$$\omega_{21} = \frac{b_2}{a_2} = -2t^6, \quad \omega_{22} = \frac{c_2}{a_2} = t^{12} + 2t^3 + 4$$

oraz niezmienniczą kombinację

$$\Phi_2(\omega_{21}, \omega_{22}) = \omega_{22} - \frac{\omega_{21}^2}{4} - 2\sqrt{\left|\frac{\omega_{21}}{-2}\right|} = t^{12} + 2t^3 + 4 - t^{12} - 2\sqrt{t^6} = 4.$$

Przykład cd.

Niezmiennicze kombinacje zbudowane z bazowych niezmienników tej podgrupy są identyczne. Ponadto przekształcenia równoważności badanych równań zadaje pewna zamiana zmiennej niezależnej, którą wyznaczymy przy użyciu niezmienników zawierających tę zmienną.

$$x = \sqrt{\left|\frac{\omega_{11}}{-2}\right|} = \sqrt{\left|\frac{\omega_{21}}{-2}\right|} = t^3.$$

Bezpośrednim rachunkiem przekonujemy się, że taka zamiana zmiennej x przekształca jedno równanie w drugie.

Bibliografia

- Ovsiannikov L.V. 1982 *Group Analysis of Differential Equations*, (New York: Academic)
- Tresse A. 1894 *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations, Acta Math.* v. 18, str. 1 – 88
- Czyżycki T. *The Tresse theorem and differential invariants for the nonlinear Schrödinger equation* J.Phys.A: Math. Theor, **40** (2007), str. 9331 – 9342
- Czyżycki T., Hrivnák J. *Equivalence problem and integrability of the Riccati equations*, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, vol. 17, Issue 3, 2010, str. 371–388, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland